ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

LÊ THỊ HỒNG THÚY

BẤT ĐẲNG THỨC TRONG SỐ HỌC VÀ MỘT SỐ DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

LÊ THỊ HỒNG THÚY

BẤT ĐẲNG THỨC TRONG SỐ HỌC VÀ MỘT SỐ DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: **GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu**

Thái Nguyên - 2018

Mục lục

MỞ ĐẦU

Chuyên đề số học là một nội dung rất quan trọng ở bậc trung học phổ thông. Các dạng toán về đếm số phần tử, so sánh và sắp thứ tự các số trong tập hợp là nội dung cơ bản của các đề thi HSG quốc gia và Olympic toán khu vực và quốc tế.

Đặc biệt là trong lý thuyết số, các hàm số học liên quan đến tính toán các ước của một số nguyên, gắn với phép đếm số các ước số và các dạng toán liên quan đến biểu diễn các số nguyên là trọng tâm trong các khảo sát đẳng thức và bất đẳng thức trong số học.

Luận văn này nhằm mục đích tìm hiểu chi tiết các tính chất của hàm số học và một số dạng toán về bất đẳng thức và cực trị liên quan trong số học.

Ngoài phần Mở đầu và Kết luận, luận văn được chia thành ba chương đề cập đến các vấn đề sau đây:

Chương 1 trình bày về bài toán về đếm, ước lượng và sắp thứ tự.

Chương 2 trình bày các dạng bất đẳng thức và các tính toán liên quan đến tập rời rạc và các hàm số học.

Chương 3 trình bày một số bài toán về cực trị và các đề thi học sinh giỏi quốc gia, Olympic khu vực và quốc tế liên quan đến bất đẳng thức số học.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của Nhà giáo nhân dân, GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới GS - Người thầy rất nghiêm khắc, tận tâm trong công việc và đã truyền thụ nhiều kiến thức quý báu cũng như kinh nghiệm nghiên cứu khoa học cho tác giả trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu đề tài.

Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành đến Ban Giám hiệu, Phòng đào tạo sau đại học, khoa Toán - Tin của trường Đại học Khoa học - Đại học

Thái Nguyên, cùng các thầy cô giáo đã tham giảng dạy và hướng dẫn khoa học cho lớp Cao học toán K10C.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu, tập thể giáo viên toán trường THPT Lý Nhân Tông, thành phố Bắc Ninh và gia đình đã tạo điều kiện cho tác giả có cơ hội học tập và nghiên cứu.

Chương 1. Các tính toán trên tập hữu hạn số nguyên

1.1 Số nguyên và các tính chất liên quan

Trước tiên, ta xét một số hàm số học cơ bản.

Định nghĩa 1.1 (Hàm số Euler $\varphi(n)$)**.** Cho số tự nhiên $n \geq 1$. Ta ký hiệu $\varphi(n)$ là số các số tự nhiên bé hơn n và nguyên tố cùng nhau với n. Quy ước $\varphi(1) = 1$.

Định lý 1.1. Hàm $\varphi(n)$ có tính chất nhân tính theo nghĩa: Nếu a, b là hai số nguyên tố cùng nhau thì

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b).$$

Chứng minh.
Rõ ràng ta có thể giải thiết $a > 1, b > 1$. Các số nguyên dương không vượt quá ab được liệt kê như sau:

1	2		a
$a+1$	$a+2$	$\ldots\ldots\ldots$	$2a$
$2a+1$	$2a+2$		$3a$
$ka+1$	$ka+2$	$\ldots\ldots\ldots$	$(k+1)a$
$(b-1)a+1$	$(b-1)a+2$		ba

Các số đó sắp thành bảng có dạng $ax + y$, trong đó $0 \leq x \leq b-1, 1 \leq y \leq a$.

Xét các số ở cột thứ y. Ta có $(ax + y, a) = (y, a)$. Vì một số nguyên tố với ab khi và chỉ khi nó nguyên tố với a và b, do đó các số này phải nằm ở cột thứ y mà $(y, a) = 1$. Có cả thảy $\varphi(a)$ cột như vậy. Xét một cột thứ y, với $(y, a) = 1$.

Các số ở trong cột này là

$$y, a + y, 2a + y, \dots, (b-1)a + y.$$

Giả sử r_x là số dư khi chia $ax + y$ cho b. Như vậy $(ax + y, b) = (r_x, b)$. Dễ dàng thấy rằng vì $(a, b) = 1$ nên $r_{x_1} \neq r_{x_2}$ với $x_1 \neq x_2$. Như vậy ta có đẳng thức tập hợp

$$\{r_0, r_1, \dots, r_{b-1}\} = \{0, 1, \dots, b-1\}.$$

Vậy số các x mà $(ax + y, b) = 1$ chính là số các x mà $(r_x, b) = 1$ tức chính là $\varphi(b)$.

Vậy cả thẩy có $\varphi(a)\varphi(b)$ số nguyên tố với a và nguyên tố với b. Đó chính là các số nguyên tố với ab. Nói cách khác $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

Từ định lý này ta suy ra công thức tính $\varphi(n)$ như sau.

Định lý 1.2. Giả sử $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ là phân tích tiêu chuẩn của $n > 1$. Khi đó

$$\varphi(n) = n\Big(1 - \frac{1}{p_1}\Big)\Big(1 - \frac{1}{p_2}\Big)\dots\Big(1 - \frac{1}{p_k}\Big).$$

Chứng minh.
Theo định lý 1.1, ta có $\varphi(n) = \varphi(p_1^{\alpha_1}) \dots \varphi(p_k^{\alpha_k})$.

Định lý sẽ được chứng minh nếu ta chứng tỏ rằng ứng với p là một số nguyên tố thì $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha(1 - \dfrac{1}{p})$. Thật vậy, vì p là nguyên tố nên với mỗi $k \leq p^\alpha$ thì $(k, p) = 1$ hoặc $k \vdots p$.

Số các số $k \leq p^\alpha$ và là bội của p là $\left[\dfrac{p^\alpha}{p}\right] = p^{\alpha - 1}$.

Vậy

$$\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^\alpha(1 - \frac{1}{p}).$$

Ví dụ 1.1. Với $n = 360 = 2^3.3^2.5$ thì

$$\varphi(360) = 360\Big(1 - \frac{1}{2}\Big)\Big(1 - \frac{1}{3}\Big)\Big(1 - \frac{1}{5}\Big) = 96.$$

Tầm quan trọng của hàm $\varphi(n)$ trong số học được thể hiện trong định lý Euler. Sau đây là một sự suy rộng của định lý Euler.

Định lý 1.3 (Định lý Euler mở rộng)**.** Cho a và m là hai số tự nhiên. Khi đó ta có

$$a^m \equiv a^{m - \varphi(m)} \pmod{m}.$$

Chứng minh.
Ta phải chứng minh

$$A = a^m - a^{m-\varphi(m)} = a^{m-\varphi(m)}(a^{\varphi(m)} - 1)$$

chia hết cho m.

Giả sử m có phân tích tiêu chuẩn là

$$m = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \ldots q_k^{\alpha_k}.$$

Ta sẽ chứng minh rằng nếu $(a, q_i) = 1$ thì $(a^{\varphi(m)} - 1) \vdots q^{\alpha_i}$, còn nếu $a \vdots q$ thì $a^{m-\varphi(m)} \vdots q^{\alpha_i}$, và như vậy $A \vdots m$.

Thật vậy, nếu $(a, q_i) = 1$ thì theo định lý Euler

$$(a^{\varphi(q_i^{\alpha_i})} - 1) \vdots q_i^{\alpha_i}.$$

Mặt khác,

$$\varphi(q_i^{\alpha_i}) = q_i^{\alpha_i}(1 - \frac{1}{q_i}).$$

là ước của $\varphi(m)$ (suy ra từ công thức tính $\varphi(m)$).

Do đó

$$(a^{\varphi(m)} - 1) \vdots (a^{\varphi(q_i^{\alpha_i})} - 1) \vdots q^{\alpha_i}.$$

Nếu $a \vdots q_i$ thì

$$a^{m-\varphi(m)} \vdots q^{m-\varphi(m)}.$$

Mặt khác, rõ ràng $m - \varphi(m) \geq \alpha_i$ (vì có ít nhất α_i số không nguyên tố với m là $q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \ldots q_i^{\alpha_i}$). Do đó

$$a^{m-\varphi(m)} \vdots q^{m-\varphi(m)} \vdots q_i^{\alpha_i}.$$

Định lý được chứng minh.

Định lý 1.4 (Định lý Fermat)**.** Cho p là một số nguyên tố và a là một số nguyên không chia hết cho P khi ấy ta có

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p.$$

Chứng minh. Theo giả thiết, ta có $\varphi(p) = p - 1$ và a là nguyên tố với p nên theo định lý Euler ta được $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

Định lý 1.5 (Định lý Fermat dạng khác)**.** Cho p là một số nguyên tố và a là một số nguyên tùy ý khi ấy ta có

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

Chứng minh. Nếu a chia hết cho p thì hiển nhiên $a^p \equiv a \pmod{p}$. Nếu a không chia hết cho p thì theo định lý 1.4 ta có $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ cho nên sau khi nhân hai vế của đồng dư thức này với a ta được $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Ngược lại từ định lý 1.5 ta có thể suy ra định lý 1.4. Thật vậy, từ $a^p \equiv a \pmod{p}$ và a là một số nguyên không chia hết cho số nguyên tố p thế thì a nguyên tố với p nên bằng cách chia cho a ta được $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Chính vì vậy, người ta nói định lý 1.5 là dạng khác của định lý Fermat.

Ví dụ 1.2. Tìm các số nguyên x để $9x + 5$ là tích của hai số nguyên liên tiếp.
Lời giải. Giả sử $9x + 5 = n(n + 1)$ với $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow 36x + 20 = 4n^2 + 4n$. suy ra

$$36x + 21 = (2n + 1)^2 \Rightarrow 3(12x + 7) = (2n + 1)^2.$$

Số chính phương $(2n + 1)^2$ chia hết cho 3 nên nó cũng chia hết cho 9. Mặt khác $(12x + 7)$ không chia hết cho 3 nên $3(12x + 7)$ không chia hết cho 9.
Mâu thuẫn trên chứng tỏ không tồn tại số nguyên x nào để $9x + 5 = n(n + 1)$.

Ví dụ 1.3. Tìm các số nguyên x để biểu thức sau là một số chính phương
$x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3$.
Lời giải. Đặt $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3 = y^2$ với $y \in \mathbb{N}$.
Ta thấy $y^2 = (x^4 + 2x^3 + x^2) + (x^2 + x + 3) = (x^2 + x)^2 + (x^2 + x + 3)$
Đặt $x^2 + x = a$ ta có $y^2 = a^2 + (x^2 + x + 3)$. Từ đó có $y^2 - a^2 = x^2 + x + 3 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0 \Rightarrow y^2 > a^2$.
Dễ thấy $(a + 2)^2 - y^2 = 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\, 0 \Rightarrow (a + 2)^2 > y^2$.
Do đó $a^2 < y^2 < (a + 2)^2 \Rightarrow y^2 = (a + 1)^2$.
Suy ra $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3 = (x^2 + x + 1)^2$. Suy ra $x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1; x = -2$.
Thử lại, với $x = 1; x = -2$ thì biểu thức $9 = 3^2$. Vậy $x = 1; x = -2$ là các giá trị cần tìm.

Ví dụ 1.4. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$xy = z^2. \tag{1.1}$$

Lời giải. Giả sử x_0, y_0, z_0 thỏa mãn (1.1) và có ƯSCLN bằng d.

Giả sử $x_0 = dx_1, y_0 = dy_1, z_0 = dz_1$ thì (x_1, y_1, z_1) cũng thỏa mãn (1.1).

Do đó, ta có thể giả sử $(x, y, z) = 1$ thì x, y, z đôi một nguyên tố cùng nhau vì nếu hai trong ba số x, y, z có ước chung là d thì số còn lại cũng chia hết cho d. Ta có $x.y = z^2$ mà $(x, y) = 1$ nên $x = a^2, y = b^2$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$. Bởi vậy

$(1.1) \Leftrightarrow z^2 = x.y = (ab)^2 \Leftrightarrow z = (ab)$.

Như vậy ta được biểu thức nghiệm

$x = ta^2; y = tb^2; z = ab \ \ (t \in \mathbb{N}^*)$.

Ngược lại, dễ thấy các số x, y, z có dạng trên thỏa mãn (1.1). Vậy công thức trên cho ta tất cả các nghiệm nguyên dương của (1.1).

Ví dụ 1.5. Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2 + xy + y^2 = x^2y^2. \tag{1.2}$$

Lời giải. $(1.2) \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2y^2 + xy \Leftrightarrow (x + y)^2 = xy(xy + 1)$.

Ta thấy xy và $xy + 1$ là hai số nguyên liên tiếp nên:

+ Xét $xy = 0$, ta có $xy = 0$ và $x^2 + y^2 = 0$

$$\Leftrightarrow x = y = 0.$$

+ Xét $xy + 1 = 0$, ta có : $xy = -1$ và $x^2 + y^2 = 2$

$$\Leftrightarrow (x, y) = (1, -1); (-1, 1).$$

Thử lại, ba cặp số $(0, 0); (1, -1); (-1, 1)$. đều thỏa mãn phương trình đã cho. Vậy phương trình trên có ba nghiệm nguyên là $(x, y) = (0, 0); (1, -1); (-1, 1)$.

b. Hàm tổng các ước của một số tự nhiên

Định nghĩa 1.2 (xem [2],[3])**.** Cho số nguyên dương n. Ta ký hiệu $\sigma(n)$ là tổng các ước của n.

Định lý 1.6 (xem [2],[3])**.** *Hàm số $\sigma(n)$ có tính chất nhân tính theo nghĩa: Nếu a, b là hai số nguyên tố cùng nhau thì $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$.*

Chứng minh.

Thật vậy, giả sử $a_1, \dots a_k$ là các ước của $a, k = d(a)$ và $b_1, \dots, b_l$ là các ước của $b, l = d(b)$. Khi đó $a_i b_j (1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l)$ là tất cả các ước của ab. Vậy $\sigma(ab) = \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{k} a_i b_j = \left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{l} b_j\right) = \sigma(a)\sigma(b)$.

Từ định lý này ta suy ra công thức tính $\sigma(n)$ như sau:

Định lý 1.7 (xem [2],[3])**.** Giả sử $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ là phân tích tiêu chuẩn của n. Khi đó $\sigma(n) = \left(\frac{p_1^{\alpha_1+1}}{p_1 - 1}\right)\left(\frac{p_2^{\alpha_2+1}}{p_2 - 1}\right) \dots \left(\frac{p_k^{\alpha_k+1}}{p_k - 1}\right)$.

Chứng minh.

Theo định lý trên , ta có $\sigma(n) = \sigma(p_1^{\alpha_1})\sigma(p_2^{\alpha_2}) \dots \sigma(p_k^{\alpha_k})$.

Vậy ta chỉ cần chứng minh $\sigma(p^\alpha) = \dfrac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1}$.

Thật vậy, tất cả các ước của p^α là $1, p, p^2, \dots, p^\alpha$.

Do đó $\sigma(p^\alpha) = 1 + p + \cdots + p^\alpha = \dfrac{p^{\alpha+1-1}}{p - 1}$.

Định lý 1.8 (xem [2],[3])**.** a) n là số nguyên tố khi và chỉ khi $\sigma(n) = n + 1$.
b) $\sigma(n)$ là một số lẻ nếu và chỉ nếu n là số chính phương hoặc $\dfrac{n}{2}$ là số chính phương.

Chứng minh.

a) Nếu n là số nguyên tố thì $\sigma(n) = n + 1$. Ngược lại, nếu $\sigma(n) = n + 1$ và n là hợp số thì n có ước là 1, a và n với $(1 < a < n)$. Vậy $\sigma(n) \geq n + 1 + a > n + 1$.
Nếu $n = 1$ thì $\sigma(n) = 1 < n + 1$.

b) Nếu $n = m^2$ hoặc $n = 2m^2$ thì $n = 2^\alpha p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, ở đó $p_1, p_2, \dots, p_k$ là các số nguyên tố lẻ còn α_i là chẵn. Khi đó $\sigma(n) = \sigma(2^\alpha)\sigma(p_1^{\alpha_1})\sigma(p_2^{\alpha_2}) \dots \sigma(p_k^{\alpha_k})$.
Ta có $\sigma(2^\alpha) = 2^{\alpha+1} - 1$ là số lẻ, $\sigma(p_i^{\alpha_i}) = 1 + p_i + \cdots + p_i^{\alpha_i}$ là một số lẻ vì là tổng của một số lẻ là các số lẻ. Vậy $\sigma(n)$ lẻ.
Đảo lại, giả sử $\sigma(n)$ lẻ, và giả sử $n = 2^\alpha p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$. Khi đó với mỗi $i, \sigma(p_i^{\alpha_i})$ là số lẻ. Mặt khác $\sigma(p_i^{\alpha_i}) = 1 + p_i + \cdots + p_i^{\alpha_i} \equiv \alpha_1 + 1 \pmod 2$ suy ra α_i là chẵn. Do đó, nếu α chẵn thì n là số chính phương. Nếu α lẻ thì $\dfrac{n}{2}$ là một số chính phương.

Liên quan đến hàm $\sigma(n)$ ta có khái niệm số hoàn chỉnh.

Định nghĩa 1.3 (xem [2],[3])**.** Một số tự nhiên n được gọi là số hoàn chỉnh nếu

$\sigma(n) = 2n$, tức là n bằng tổng các ước của nó (không kể chính nó).

Ví dụ 1.6. 6, 28 là các số hoàn chỉnh, vì $6 = 1 + 2 + 3, 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

Ngay từ thời cổ Hi Lạp, nhà toán học Euclid đã chứng minh được sự kiện lý thú sau:

Định lý 1.9 (xem [2],[3])**.** Nếu k là số tự nhiên sao cho $2^k - 1$ là một số nguyên tố thì số $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ là một số hoàn chỉnh.

Chứng minh.
Đặt $p = 2^k - 1$. Ta có $\sigma(n) = \sigma(2^{k-1})\sigma(p) = (2^k - 1)(p + 1) = (2^k - 1).2^k = 2n$.
Rõ ràng số hoàn chỉnh có dạng trên là một số chẵn (vì $k > 1$).
Đến thế kỷ 18, Euler đã phát hiện ra rằng: Tất cả các số hoàn chỉnh chẵn đều có dạng trên. Ta có định lý sau:

Định lý 1.10 (xem [2],[3])**.** Nếu n là một số hoàn chỉnh chẵn thì n có dạng

$$n = 2^k(2^{k+1} - 1).$$

Ở đó $k \geq 1$ và $2^{k+1} - 1$ là một số nguyên tố.

Chứng minh.
Ta biểu diễn n dưới dạng $n = 2^k b$ với $k \geq 1$ và b là số lẻ.
Ta có $\sigma(n) = \sigma(2^k)\sigma(b) = (2^{k+1} - 1)\sigma(b)$.
Mặt khác, n là số hoàn chỉnh do đó $\sigma(n) = 2n = 2^{k+1}b$.
Vậy suy ra $(2^{k+1} - 1)\sigma(b) = 2^{k+1}b$. Hay $\dfrac{b}{\sigma(b)} = \dfrac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}}$.
Vì 2^{k+1} và $2^{k+1} - 1$ là nguyên tố cùng nhau nên tồn tại c để

$$b = (2^{k+1} - 1)c, \sigma(b) = 2^{k+1}c.$$

Vì $k \geq 1$ nên $b > c$ tức là một ước của b. Nếu $c > 1$ thì $b, c, 1$ là các ước của b, do đó $\sigma(b) \geq b + c + 1 = (2^{k+1} - 1)c + c + 1 = 2^{k+1}c + 1$, điều này trái với $\sigma(b) = 2^{k+1}c$.
Vậy $c = 1$. Do đó $b = 2^{k+1} - 1$ và $n = 2^k b = 2^k(2^{k+1} - 1)$.
Vì $\sigma(b) = 2^{k+1} = b + 1$ nên b là số nguyên tố.

Từ định lý Euclid và định lý Euler ta suy ra có bao nhiêu số k để $2^k - 1$ là số nguyên tố thì có bấy nhiêu số hoàn chỉnh chẵn. Dễ thấy rằng nếu $2^k - 1$ là số nguyên tố thì k phải là số nguyên tố. Một số nguyên tố dạng $2^k - 1$ được gọi là số nguyên tố Mersenne. Cho đến năm 2018 người ta mới tìm được 50 số nguyên tố k để $2^k - 1$ là số nguyên tố. Đó là các số 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11213, 19937, 21701, 44497, 86243, 23209, 110503, 132049, 216091, . Và con số k thứ 49 tìm được năm 2016 là 74207281 còn đến năm 2018 kỷ lục mới tìm được ứng với k = 77232917.

Người ta chưa biết được tập hợp số nguyên tố Mersenne là hữu hạn hay vô hạn do đó cũng chưa biết tập hợp các số hoàn chỉnh chẵn là hữu hạn hay vô hạn.

Cho đến nay người ta chưa tìm thấy một số hoàn chỉnh lẻ nào và cũng không biết là liệu có số hoàn chỉnh lẻ hay không. Có giả thuyết cho rằng không có số hoàn chỉnh lẻ.

1.2 Một số đồng nhất thức số học

1.2.1 Một số đẳng thức về các hàm $d(n)$, $\sigma(n)$ và $\varphi(n)$

Bài toán 1.1 (xem [1],[3])**.** Cho dãy số nguyên dương x_n xác định theo quy luật sau $x_0 = a, x_{n+1} = d(x_n), (\forall n \geq 0)$.

a) Chứng minh rằng $\forall a \in \mathbb{N}^*$ tồn tại chỉ số n_0 (phụ thuộc a) sao cho $x_n = 2$ với mọi $n \geq n_0$.

b) Hãy cho ví dụ chứng tỏ rằng chỉ số n_0 có thể lớn tùy ý nếu a đủ lớn.

Lời giải. Ta có $d(n) \leq 2\sqrt{n} < n$ nếu $n > 4$. Với $n = 4$ và $n = 3$ thử trực tiếp cho thấy $d(4) = 3 < 4, d(3) = 2 < 3$.

Với $n = 2, d(2) = 2$.

Vậy ta có $d(n) < n,\ \ \forall n > 2$ và $d(2) = 2$.

Suy ra $x_{n+1} < x_n$ nếu $x_n > 2$.

Vì (x_n) là các số nguyên dương nên bắt đầu từ chỉ số n_0 nào đó ta phải có $x_{n_0} = 2$. Khi ấy $x_n = 2,\ \ \forall n \geq n_0$.

b) Lưu ý rằng $d(2^{n-1}) = n$. Xét dãy m_k xác định bởi $m_0 = 3, m_{k+1} = 2^{m_k - 1}$, ta có $d(m_{k+1}) = m_k$.

Vậy $\underbrace{d \dots d(m_{k+1})}_{k+1} = m_0 = 3$. Nghĩa là:

Nếu $a = m_k$ thì $x_n = 2$ nếu và chỉ nếu $n \geq k+1$ sẽ lớn tùy ý khi k lớn tùy ý.

Bài toán 1.2 (xem [1],[3])**.** Chứng minh rằng nếu $\sigma(n) = 2n+1$ thì n là bình phương của một số lẻ.

Lời giải. Vì $\sigma(n) = 2n+1$ là một số lẻ do đó theo định lý 6.4 ta có $n = 2^\alpha m^2$, ở đó $\alpha \geq 0$ còn m là số lẻ. Ta cần chứng minh $\alpha = 0$.

Ta có $\sigma(n) = 2n+1 = 2^{\alpha+1}m^2 + 1$. Do tính chất nhân tính của hàm $\sigma(n)$ ta lại có $\sigma(n) = \sigma(2^\alpha).\sigma(m^2) = (2^{\alpha+1} - 1).\sigma(m^2)$.

Vậy $2^{\alpha+1}m^2 + 1 = (2^{\alpha+1} - 1).\sigma(m^2) \vdots 2^{\alpha+1} - 1$.

Ta lại có $2^{\alpha+1}m^2 + 1 = 2^{\alpha+1}m^2 + 1 - m^2 + m^2 = m^2(2^{\alpha+1} - 1) + (m^2+1) \vdots 2^{\alpha+1} - 1$.

Suy ra $m^2 + 1 \vdots 2^{\alpha+1} - 1$.

Nếu $a > 0$ thì $2^{\alpha+1} - 1$ có dạng $4k-1$, do đó có ước nguyên tố p dạng $4k-1$.

Vậy $m^2 \equiv -1 \pmod{p}$.

Suy ra $m^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} = (-1) \pmod{p}$

Điều này trái với định lý Fermat. Vậy $\alpha = 0$.

Bài toán 1.3 (xem [1],[3])**.** Chứng minh rằng $\varphi(n) \geq \dfrac{\sqrt{n}}{2}$ với mọi n, và $\varphi(n) < n - \sqrt{n}$ nếu n là hợp số.

Lời giải. Giả sử n có phân tích tiêu chuẩn $n = 2^\alpha p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$. Theo công thức tính $\varphi(n)$ ta có $\varphi(n) = 2^{\alpha-1} p_1^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2 - 1} \dots p_k^{\alpha_k - 1}(p_1 - 1)\dots(p_k - 1)$.

Chú ý rằng $p_i - 1 \geq \sqrt{p_i}$ và $\alpha_i - \dfrac{1}{2} \geq \dfrac{\alpha_i}{2}$ ta có

$$\varphi(n) \geq 2^{\alpha-1} p_1^{\alpha_1} - \frac{1}{2} \dots p_k^{\alpha_k} - \frac{1}{2} \geq 2^{\alpha-1}.p_1^{\frac{\alpha_1}{2}} \dots p_k^{\frac{\alpha_k}{2}} \geq \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

Giả sử n là hợp số. Gọi p_1 là ước nguyên tố bé nhất của n. Khi đó $p_1 \leq \sqrt{n}$. Do đó $\varphi(n) \leq n(1 - \dfrac{1}{p_1}) = n - \dfrac{n}{p_1} \leq n - \sqrt{n}$.

Bài toán 1.4 (xem [1],[3])**.** Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên k, tồn tại ít nhất một số nguyên dương n để cho $\varphi(n+k) = \varphi(n)$.

Lời giải. Nếu k lẻ thì $\varphi(k+k) = \varphi(2k) = \varphi(2)\varphi(k) = \varphi(k)$. Vậy có thể chọn $n = k$. Xét trường hợp k chẵn. Gọi p là số nguyên tố bé nhất trong tập hợp các số nguyên tố không phải là ước của k. Ta có $\varphi(pk) = \varphi(p)\varphi(k) = (p-1)\varphi(k)$. Giả sử $p_1, p_2, \ldots, p_r$ là các ước nguyên tố của k. Mọi ước nguyên tố của $p-1$ cũng nằm trong tập $(p_1, p_2, \ldots, p_r)$ do cách chọn p. Vậy thì:

$$\varphi((p-1)k) = (p-1)k(1-\frac{1}{p_1})\ldots(1-\frac{1}{p_r}) = (p-1)\varphi(k).$$

Suy ra $\varphi(pk) = \varphi((p-1)k)$. Vậy có thể chọn $n = (p-1)k$.

1.2.2 Đẳng thức giữa các tổng bình phương

Định lý 1.11 (Tổng hai bình phương)**.** Giả sử n được biểu diễn dưới dạng phân tích chuẩn
$n = 2^r \Pi p_i^{s_i} q_j^{t_j}$, trong đó $p_i \equiv 1 \pmod 4$, $q_j \equiv 3 \pmod 4$
Điều kiện cần và đủ để n biểu diễn thành tổng của hai bình phương là các số t_j chẵn với mọi j.
Để chứng minh định lý ta cần sử dụng các bổ đề sau:

Bổ đề 1.1. Giả sử số nguyên tố $q \setminus a^2 + b^2$. Nếu $q \equiv 3 \pmod 4$ thì $q \setminus a, q \setminus b$.

Chứng minh. Dễ thấy $q \setminus a$ thì $q \setminus b$. Giả sử ngược lại $q \nmid a, q \nmid b$. Khi đó theo giả thiết ta có $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod q$ hay là $a^{q-1} \equiv (-1)^{\frac{q-1}{2}}.b^{q-1} \pmod q$.
Theo định lý Fermat, ta có $(-1)^{\frac{q-1}{2}} \equiv 1 \pmod q$ hay (-1) là số chính phương theo mod q nên $q = 4k+1$. Mâu thuẩn này chứng minh bổ đề.

Bổ đề 1.2. Tích của hai số mà mỗi số là tổng của hai bình phương của hai số nguyên không âm cũng là tổng bình phương của hai số không âm.

Chứng minh. Giải sử $m = a^2 + b^2$, $n = c^2 + d^2, a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Khi đó

$$mn = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ad + bc)^2 + (ac - bd)^2$$

Bổ đề 1.3. Mọi số nguyên tố p dạng $4k+1$ đều có thể biểu diễn thành tổng bình phương của hai số nguyên dương.

Chứng minh. Giải sử $p = 4k+1$. Xét $a = (2k)!$ Ta có $(2k)! = (-1)^{2k}(2k)!$

$$= (-1)(-2)\dots(-2k) \equiv (p-1)(p-2)\dots(p-2k)$$

$$= 4k(4k-1)\dots(2k+1) \pmod p$$

Do đó $a^2 \equiv (2k)!(2k+1)\dots 4k = (4k)! = (p-1)! \equiv -1 \pmod p$ theo định lý Wilson.
Ký hiệu $q = [\sqrt{p}]$. Xét $(q+1)^2$ các số dạng $ax+y$ với $x, y = 0, 1, \dots, q$. Vì $(q+1)^2 p q^2$ nên theo Dirichlet tồn tại các cặp số $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ sao cho $ax_1 + y_1 \equiv ax_2 + y_2 \pmod p$ hay $a(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)$ chia hết cho p.
Đặt $x = |x_1 - x_2|$, $y = |y_1 - y_2|$. Ta có $a^2x^2 - y^2 = (ax-y)(ax+y)$. Theo trên $a^2 \equiv -1 \pmod p$. Vậy $x^2 + y^2 \equiv -a^2x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod p$.
Mặt khác $x^2 \leq q^2 \langle p$, $y^2 \leq q^2 < p$ mà p nguyên tố nên $0 < x^2 + y^2 < 2p$. Suy ra $x^2 + y^2 = p$. Rõ ràng $x \neq 0, y \neq 0$.
Bổ đề được chứng minh.

Chứng minh định lý 1.11.

Điều kiện đủ: Giả sử t_j chẵn $\forall j$. Ta có $2 = 1^2 + 1^2$ và các số nguyên tố p có dạng $4k+1$ có thể biểu diễn được thành tổng các bình phương của hai số nguyên dương, theo bổ đề 1.3.
Theo bổ đề 1.2, ta có $m = 2^r \Pi p_i^{s_i} = a^2 + b^2, a, b \in \mathbb{Z}$. Mặt khác, vì t_j chẵn $\forall j$ nên $\Pi q_j^{t_j} = h^2$ và do đó $n = m.h^2 = a^2 + b^2h^2 = (ah)^2 + (bh)^2$.

Điều kiện cần: Giải sử $n = a^2 + b^2$, $a, b \in \mathbb{Z}$ ta sẽ chứng minh các t_j chẵn $\forall j$ bằng phương pháp phản chứng. Giải sử $\exists q_j$ nguyên tố dạng $4k+3$ là ước của n có số mũ t_j lẻ. Khi đó $n = q_j^{t_j} B$, $(B, q_j) = 1$. Từ đó $a^2 + b^2 \vdots q_j^{t_j} \vdots q_j$. Theo bổ đề 1.1 ta có $a = a_1 q_j$, $b = b_1 q_j$. Do đó $a_1^2 + b_1^2 = q_j^{t_j - 2} B$
Nếu $t_j \rangle 2$, tiếp tục như trên và sau hữu hạn bước ta có $a_k^2 + b_k^2 = q_i B$ vì t_j lẻ và $a_k = q_j a_{k+1}$, $b_k = q_j b_{k+1}$. Suy ra $q_j(a_{k+1}^2 + b_{k+1}^2) = B$ dẫn đến $B \vdots q_j$.
Mâu thuẫn này chứng minh định lý.

Ví dụ 1.7. Phương trình $x^2 + y^2 = 50$ có nghiệm vì $50^2 = 5^2 + 5^2 = 7^2 + 1^2$. - Số nguyên tố 19 có dạng $4k+3$ nên $19 \neq x^2 + y^2$.

- Phương trình $x^2 + y^2 = 2003^{2003}$ vô nghiệm vì số nguyên tố 2003 có dạng $4k+3$ và số mũ của 2003^{2003} là lẻ.

Định lý 1.12 (Tổng của ba bình phương)**.** Các số có dạng $4^n(8k+7)$ không thể biểu diễn thành tổng của ba bình phương.

Chứng minh. Giả sử $4^n(8k+7) = x^2 + y^2 + z^2$ với $x > 0, y \geq 0, z \geq 0$. Do đó a^2 có dạng $4k$ hoặc $4k+1$ nên $x^2 + y^2 + z^2$ có dạng $4k$ khi và chỉ khi x, y, z đều chẵn.
Đặt $x = 2x_1$,$y = 2y_1$, $z = 2z_1$, khi đó đẳng thức trên có dạng
$4^{n-1}(8k+7) = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, x_1 > 0, y_1 \geq 0, z_1 \geq 0.$

Tiếp tục lập luận như trên n lần, ta có $(*) 8k+7 = x_n^2 + y_n^2 + z_n^2, x_n > 0, y_n \geq 0, z_n \geq 0$. Mặt khác a^2 có dạng $8k$, $8k+1$ hoặc $8k+4$ nên
Nếu $y_n = z_n = 0$ hay $y = z = 0$ thì (*) không xảy ra.
Nếu $y_n \neq 0, z_n = 0$ hay $y \neq 0, z = 0$ thì (*) không xảy ra.
Nếu x_n, y_n, z_n cùng khác không thì với các trường hợp sau thì (*) không xảy ra.
i. Một trong ba số lẻ, hai số còn lại chẵn.
ii. Hai trong ba số lẻ.
iii. Ba số lẻ.
iv. Ba số chẵn.
Vậy định lý được chứng minh.

Chú ý 1.1. Gauss đã chứng minh một số không có dạng $4^n(8k+7)$ có thể biểu diễn thành tổng của ba bình phương.

Định lý 1.13 (Định lý Lagrange về tổng của bốn bình phương)**.** Một số nguyên dương bao giờ cũng biểu diễn thành tổng bốn bình phương của các số nguyên không âm.
Trước hết ta sử dụng các bổ đề sau:

Bổ đề 1.4. Tích của hai số nguyên dương mà mỗi số là tổng của bốn bình phương các số nguyên không âm cũng sẽ là tổng của bốn bình phương các số nguyên không âm.

Chứng minh. Giả sử $m = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ và $n = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$.
Khi đó $mn = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2)$

$= (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4)^2 + (x_1y_1 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3)^2 + (x_1y_3 - x_3y_1 + x_4y_2 - x_2y_4)^2 + (x_1y_4 - x_4y_1 + x_2y_3 - x_3y_2)^2$.
Với x_i, y_i là các số nguyên không âm, $i = 1, 2, 3, 4$.

Bổ đề 1.5. Nếu p là số nguyên tố lẻ thì tồn tại $k, 0 < k < p$ sao cho kp là tổng của bốn bình phương các số nguyên không âm.

Chứng minh. Xét $\frac{1}{2}(p+1)$ số x^2 , $x = 0, 1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}$ và $\frac{1}{2}(p+1)$ số $-y^2 - 1, y = 0, 1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}$. Các số của mỗi tập này đôi một phân biệt theo mod p và cả hai tập này có $(p + 1)$ số phân biệt theo mod p. Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại $x, y \in 0, 1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}$ sao cho $x^2 \equiv -y^2 - 1 \pmod p$ suy ra $x^2 + y^2 + 1 = kp \Rightarrow kp = x^2 + y^2 + 1^2 + 0^2$
Mặt khác $kp = x^2 + y^2 + 1^2 < \frac{p^2}{4} + 1 = \frac{p^2}{2} + 1 < p^2 \Rightarrow k < p$
Vậy bổ đề được chứng minh.

Bổ đề 1.6. Nếu p là số nguyên tố thì p được biểu diễn thành tổng của bốn bình phương của các số nguyên không âm.

Chứng minh. Từ $2 = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2$ nên ta chỉ cần xét $p \geq 3$. Theo bổ đề 1.5 ta có $kp = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, 0 < k < p$.
Gọi k_0p là bội nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện trên. Ta sẽ chứng minh $k_0 = 1$. Giả sử $k_0\rangle 1$, ta thấy k_0 là lẻ. Thật vậy, nếu k_0 là chẵn thì $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ chẵn và do đó x_1, x_2, x_3, x_4 cùng chẵn hoặc cùng lẻ hoặc hai trong bốn số cùng chẵn, hai số là lẻ, giả sử x_1, x_2 chẵn x_3, x_4 lẻ. Khi đó cả ba trường hợp đều cho kết quả là $x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_3 + x_4, x_3 - x_4$ đều chẵn và do đó $\frac{1}{2}k_0p = (\frac{x_1 + x_2}{2})^2 + (\frac{x_1 - x_2}{2})^2 + (\frac{x_3 + x_4}{2})^2 + (\frac{x_3 - x_2}{2})^2$. Điều này trái với định nghĩa của k_0. Do đó k_0 phải lẻ. Lúc đó k_0 lẻ $k_0 \geq 3$ và k_0 không là ước đồng thời của các $x_i, i = 1, 2, 3, 4$ (vì $k_0 \nmid p$).
Ta chọn b_1, b_2, b_3, b_4 sao cho $y_i = x_i - b_ik_0, |y_i| < \frac{k_0}{2}$ và $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 > 0$.
Do đó $0\langle y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 \langle 4(\frac{k_0}{2})^2 = k_0^2, y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 \equiv 0 \pmod{k_0}$.
Như vậy

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = k_0p, 0 < k_1 < p$$

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = k_0k_1, 0 < k_1 < k_0.$$

Theo bổ đề 1.4 ta được $k_0^2 k_1 p = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2$, trong đó z_1, z_2, z_3, z_4 được xác định

$$z_1 = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \equiv 0 \pmod{k_0}.$$

Tương tự $z_2 \equiv 0 \pmod{k_0}$, $z_3 \equiv 0 \pmod{k_0}$, $z_4 \equiv 0 \pmod{k_0}$.
Từ đó $z_i = k_0 t(i = 1, 2, 3, 4)$ và ta có

$$k_1 p = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2$$

Điều này mâu thuẫn với định nghĩa của k_0. Vậy $k_0 = 1$. Bổ đề được chứng minh.

Ví dụ 1.8. $2.7 = 3^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2$, trong đó $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 0$. Do đó $\left(\dfrac{3+1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3-1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{2+0}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{2-0}{2}\right)^2 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 1.7 = 7$
Chứng minh định lý 1.13 Đầu tiên ta có $1 = 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2$. Giả sử $n \geq 2$ và n được phân tích thành tích các số nguyên tố. Theo bổ đề 1.6 và 1.4 ta được n là tổng của bốn bình phương các số nguyên không âm.

Ví dụ 1.9. $55 = 5.11$

$$5 = 2^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2.$$

$$11 = 3^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2.$$

Do đó $55 = \Big(6+1+0+0\Big)^2 + \Big(2-3+0+0\Big)^2 + \Big(2-0-0+0\Big)^2 + \Big(0+1-0+0\Big)^2.$

$$= 7^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2$$

Định lý 1.14 (Tổng của năm bình phương)**.** Mỗi số nguyên dương $n\rangle 169$ luôn biểu diễn được thành tổng năm bình phương của các số nguyên dương.
Chứng minh. Giả sử $n\rangle 169$, khi đó theo định lý 1.13, ta có $n - 169 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4 \geq 0$.
Nếu $x_i\rangle 0 (i = 1, 2, 3, 4)$ thì $n = 13^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$
Nếu $x_1, x_2, x_3\rangle 0, x_4 = 0$ thì $n = 12^2 + 5^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.
Nếu $x_1, x_2\rangle 0, x_3 = x_4 = 0$ thì $n = 12^2 + 4^2 + 3^2 + x_1^2 + x_2^2$.
Nếu $x_1\rangle 0, x_2 = x_3 = x_4 = 0$ thì $n = 10^2 + 8^2 + 2^2 + 1^2 + x_1^2$.
Nếu $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ thì $n = 169 = 2^2 + 2^2 + 5^2 + 6^2 + 10^2$.

1.2.3 Biểu diễn số tự nhiên thành tổng các lập phương

Bài toán 1.5 (Bài toán Waring)**.** Xét bài toán về biểu diễn một số thành tổng các lũy thừa k. Vào thế kỷ 18 nhà toán học Anh Waring đã phỏng đoán rằng, mọi số nguyên dương đều biểu diễn được thành tổng của 9 lập phương các số tự nhiên và đều biểu diễn được thành tổng của 19 lũy thừa 4 các số tự nhiên, tức là với mọi $n \in \mathbb{N}_*$ các phương trình

$$x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_9^3 = n.$$

$$x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{19}^4 = n.$$

luôn có nghiệm tự nhiên. Ông đã nêu giả thiết sau:
Cho số nguyên dương k. Khi đó có tồn tại số nguyên dương m (phụ thuộc vào k) sao cho mọi số nguyên dương n đều biểu diễn được thành tổng của m số, mỗi số có dạng $x^k, x \in \mathbb{N}$ tức là:
Tồn tại số nguyên dương m sao cho với mọi số nguyên dương n phương trình

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^k = n$$

có nghiệm tự nhiên.

Năm 1906 nhà toán học lỗi lạc Davit Hilbert đã chứng minh được phỏng đoán trên. Chứng minh của ông cực kỳ phức tạp.
Gọi g(k) là số m nhỏ nhất có tính chất trên, tức là mọi số nguyên dương n đều biểu diễn được thành tổng của g(k) số, mỗi số có dạng $x^k, x \in \mathbb{N}$ và tồn tại số n không biểu diễn được thành tổng của $m-1$ số, mỗi số có dạng $x^k, x \in \mathbb{N}$. Ta có $g(2) = 4$ (vì số 7 không biểu diễn được thành tổng của 3 bình phương và mọi số nguyên dương n đều biểu diễn được thành tổng của bốn bình phương). Người ta đã chứng minh được $g(3) = 9, g(4) \geq 19, g(5) = 37$ và với $k \leq 471600000$ thì

$$g(k) = [(\frac{3}{2})^k] + 2^k - 2.$$

Vẫn còn nhiều câu hỏi mở xung quanh hàm $g(k)$.

Các bài toán về số lũy thừa, nói riêng là số chính phương, thường không cần nhiều vốn kiến thức, nhưng đòi hỏi sự phân tích và tổng hợp giả thiết một cách thông minh, phương pháp biến đổi khéo léo, khả năng suy luận chặt chẽ, biện

luận đầy đủ. Chính vì thế mà các bài toán về số lũy thừa thường gặp trong các kì thi chọn học sinh giỏi cấp 2, cấp 3, thi toán quốc tế và các cuộc thi tuyển vào lớp 10.
Các bài toán về số lũy thừa khá phong phú, ở đây chỉ trình bày một số kiến thức cơ bản dùng để xét xem một số có là số chính phương, số lũy thừa hay không; đồng thời nêu một số bài toán liên quan đến các dạng của số lũy thừa. Còn nhiều bài toán về số lũy thừa trong hệ thập phân chưa được nêu ra ở đây.

Định nghĩa 1.4 (Số lũy thừa). a) Ta gọi lũy thừa bậc $r (r \geq 2)$ của một số tự nhiên a, tức là số a^r, là số lũy thừa.
b) Ta gọi bình phương của một số tự nhiên a, tức là số a^2, là số chính phương, như thế số chính phương là số lũy thừa bậc hai.
c) Số nguyên dương không chia hết cho số chính phương lớn hơn 1 nào được gọi là số phi chính phương.
Chẳng hạn, các số sau là số phi chính phương: 3; 5; 7; 6 = 2.3; 30 = 2.3.5. Các số sau không là số chính phương và cũng không là số phi chính phương:

$$12 = 2^2.3; 60 = 2^2.3.5.$$

Chú ý 1.2. 1) Số 0, số 1 là số chính phương và là số lũy thừa bậc tùy ý.

2) Các tên gọi số lũy thừa, số chính phương, số phi chính phương chỉ sử dụng cho các số nguyên không âm.

Tính chất 1.1.
a) Số phi chính phương hoặc là một số nguyên tố lớn hơn 1, hoặc là tích các số nguyên tố phân biệt với số mũ đều bằng 1.
b) Mỗi số nguyên dương a đều biểu diễn duy nhất được trong dạng tích của một số chính phương và một số phi chính phương, tức là có dạng $a = b^2c$.
Chứng minh.

a) Gọi p là ước số nguyên tố bất kì của số phi chính phương c với số mũ là s. Nếu $s \geq 2$ thì c chia hết cho p^2, trái với định nghĩa số phi chính phương, vậy $s = 1$.
b) Gọi c là số nguyên dương (số nguyên dương) lớn nhất thỏa mãn c^2 là ước của a thì $a = c^2b$. Nếu số b không là số phi chính phương thì nó phải chia hết cho

một số chính phương $k^2 > 1$, lúc đó $b = k^2n$ nên $a = c^2b = c^2k^2n = (ck)^2n$ mà $ck > c$, trái với sự xác định số c.

Giả sử số a có hai cách biểu diễn $a = c^2b = e^2f$, trong đó b, f là các số phi chính phương. Đặt $(c, e) = d$ thì $c = dc_1, e = de_1$ và $(c_1, e_1) = 1$. Lúc đó $c^2b = e^2f \Leftrightarrow d^2c_1^2b = d^2e_1^2f \Leftrightarrow c_1^2b = e_1^2f$. Từ đó và $(c_1, e_1) = 1$ thì $(c_1^2, e_1^2) = 1$ nên e_1^2 là ước số của b. Do b là số phi chính phương thì $e_1 = 1$. Xét tương tự thì $c_1 = 1$. Vậy cách biểu diễn $a = c^2b$ là duy nhất.

Tính chất 1.2.

a) Nếu số lũy thừa bậc n chia hết cho số nguyên tố p thì số đó chia hết cho p^n.

b) Nếu số chính phương chia hết cho số nguyên tố p thì số đó chia hết cho p^2.

Chứng minh.

a) Giả sử c^n chia hết cho số nguyên tố p với $n \geq 2$. Nếu $(c, p) = 1$ thì $(c^n, p) = 1$, điều này không xảy ra nên $(c, p) = p$, tức là c chia hết cho p , do đó c^n chia hết cho p^n. Khi $n = 2$ thì có câu b).

Tính chất 1.3.

a) Nếu số lũy thừa bậc n là tích của hai số nguyên tố cùng nhau, tức là $c^n = a.b$ với $(a, b) = 1$, thì mỗi thừa số a, b là số lũy thừa bậc n.

b) Nếu số chính phương là tích của hai số nguyên tố cùng nhau, tức là $c^2 = a.b$ với $(a, b) = 1$, thì mỗi thừa số a, b là số chính phương.

Chứng minh.

a) Đặt $(a, c) = e$ thì $a = ed$ và $c = em$ với $(d, m) = 1$. Từ $c^n = a.b$ với $n \geq 2$ có $e^nm^n = edb \Leftrightarrow e^{n-1}m^n = db$. Vì $(a, b) = 1$ thì $(e, b) = 1$, đồng thời có $e^{n-1}m^n = db$ nên b là ước của m^n. Từ $(d, m) = 1$ thì $(d, m^n) = 1$, đồng thời có $e^{n-1}m^n = db$ thì m^n là ước của b. Suy ra $b = m^n$ và $d = e^{n-1}$. Từ đó có $a = ed = d^n$. Khi $n = 2$ thì có câu b).

Tính chất 1.4. Căn bậc n của một số nguyên dương hoặc là số nguyên dương, hoặc là số vô tỉ. Nói cách khác, nếu $a^n = d$ với d là số nguyên dương mà a là số hữu tỉ thì a là số nguyên.

Chứng minh. Giả sử $d^{\frac{1}{n}} = a \Leftrightarrow a^n = d$ với d là số nguyên dương. Giả sử $a = \dfrac{r}{s}$ là phân số tối giản với r, s là các số nguyên dương, tức là $(r, s) = 1$, suy ra $(s, r^n) = 1$. Từ điều giả sử có $r^n = a^n s^n = ds^n$, suy ra s là ước số của r^n nên $s = (s, r^n) = 1$. Vậy nếu a là số hữu tỉ thì $a = r$ là số nguyên dương.

Tính chất 1.5. Giả sử a, b, m, n là các số nguyên dương thỏa mãn $a^m = b^n$ và $(m, n) = 1$ thì tồn tại số nguyên dương c sao cho $a = c^n$ và $b = c^m$.

Chứng minh. Theo điều kiện có nghiệm của phương trình vô định bậc nhất, nếu $(m, n) = 1$ thì tồn tại các số nguyên dương x, y sao cho $mx - ny = 1$. Từ đó có $b = b^{mx-ny} = \dfrac{b^{mx}}{b^{ny}} = \dfrac{b^{mx}}{a^{my}} = \left(\dfrac{b^x}{a^y}\right)^m$. Theo tính chất 3.4 thì $\dfrac{b^x}{a^y} = c$ là số nguyên dương, suy ra $b = c^m$, thay vào $a^m = b^n$ được $a = c^n$.

Tính chất 1.6. Cho số nguyên $s \geq 2$ thì chọn được số nguyên n_s sao cho với mỗi số nguyên $m \geq n_s$ thì tồn tại số lũy thừa a^s thỏa mãn $m < a^s < 2m$.

Chứng minh. Giả sử có $m < a^s < 2m$ hay là $m^{\frac{1}{s}} < a < (2m)^{\frac{1}{s}}$. Để tồn tại số a nguyên thì cần có $m^{\frac{1}{s}} + 1 < (2m)^{\frac{1}{s}} \Leftrightarrow (2m)^{\frac{1}{s}} - m^{\frac{1}{s}} > 1 \Leftrightarrow m^{\frac{1}{s}}(2^{\frac{1}{s}} - 1^{\frac{1}{s}}) > 1 \Leftrightarrow m > \dfrac{1}{(2^{\frac{1}{s}} - 1^{\frac{1}{s}})^s}$.

Ta cần chọn số nguyên $n_s \geq 1 + \dfrac{1}{(2^{\frac{1}{s}} - 1^{\frac{1}{s}})^s}$ thì với $m \geq n_s \geq 1 + \dfrac{1}{(2^{\frac{1}{s}} - 1^{\frac{1}{s}})^s}$ sẽ có $m^{\frac{1}{s}} < a < (2m)^{\frac{1}{s}}$.

Tính chất 1.7. Giả sử a, b, n là các số nguyên dương.

a) Nếu số b thỏa mãn $a^n < b < (a+1)^n$ thì số b không là số lũy thừa bậc n.

b) Nếu số b thỏa mãn $a^2 < b < (a+1)^2$ thì số b không là số chính phương.

Chứng minh.

a) Giả sử $b = c^n$ thì có $a^n < c^n < (a+1)^n$, suy ra $a < c < (a+1)$, nhưng không tồn tại số nguyên c như thế. Khi $n = 2$ thì ta thu được kết quả của câu b).

Định lý 1.15 (Định lí Liouville)**.** Với số nguyên dương a và $n \geq 2$ thì đẳng thức $(a-1)! + 1 = a^n$ chỉ xảy ra khi $a = 5$.

Chứng minh. Giả sử có số $a > 5$ thỏa mãn $(a-1)! + 1 = a^n (n > 1)$. Do $(a-1)!$ là số chẵn nên a^n là số lẻ, suy ra a là số lẻ.

Theo giả thiết có $(a-2)!(a-1) = a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1)$

$$\Leftrightarrow (a-2)! = (a^{n-1} - 1) + (a^{n-2} - 1) + \cdots + (a-1) + n. \quad (1.3)$$

Với $a > 5$ thì $a - 2 > \dfrac{a-1}{2} > 2$ nên $(a-2)!$ chứa tích $\dfrac{a-1}{2}.2 = a - 1$. Từ đó và (1.3) suy ra $a - 1$ là ước của n, do đó $n \geq a - 1$. Thay vào (1.3) được $(a-2)! \geq a^{a-2} + a^{a-3} + \cdots + a + 1 > a^{a-2}$, nhưng điều này không xảy ra nên không tồn tại số a như thế. Với $a \leq 5$ thì chỉ xảy ra đẳng thức $4! + 1 = 5^2$.

Nhận xét 1.1. Ta biết một số đẳng thức dạng $a!+1 = b^2$ $(n > 1)$ như : $4!+1 = 5^2$; $5! + 1 = 11^2$; $7! + 1 = 71^2$. Nhà toán học M. Kraitchik đã kiểm tra (năm 1924) với $a \leq 1020$ thì không có số a nào để $a! + 1$ là số chính phương.

Ta không biết với $a > 1020$ thì có số a nào để $a! + 1$ là số chính phương hay không?

Định lý 1.16 (xem [2],[3])**.**
a) Số chính phương có chữ số tận cùng là một trong các chữ số 0, 1, 4, 5, 6, 9 và không có chữ số tận cùng là 2, 3, 7, 8.
b) Nếu số chính phương có chữ số tận cùng là 5 thì hai chữ số cuối cùng là 25.
c) Nếu số chính phương có chữ số tận cùng là 6 thì chữ số hàng chục là chữ số lẻ.
d) Nếu số chính phương có chữ số tận cùng là 4 hoặc là chữ số lẻ 1, 5, 9 thì chữ số hàng chục là chữ số chẵn.

Chứng minh. Xét số $n = 10k + r$ với k, r đều là số nguyên và $0 \leq r \leq 9$ thì $n^2 = (10k + r)^2 = 20k(5k + r) + r^2$.Vì r^2 chỉ có thể là 00, 01, 04, 09, 16, 25, 36, 49, 64, 81 nên chữ số tận cùng của số chính phương chỉ có thể là 0, 1, 4, 5, 6, 9. Hơn nữa, do $20k(5k + r)$ là số chẵn nên chữ số hàng chục của số chính phương có cùng tính chẵn lẻ với r^2, từ đó kết luận được hai chữ số cuối cùng của n^2.

Định lý 1.17 (xem [2],[3])**.**
a) Số chính phương khi chia cho 3 có dạng $3n$ hoặc $3n + 1$ và không có dạng $3n + 2$.
b) Số chính phương khi chia cho 4 có dạng $4n$ hoặc $4n + 1$ và không có dạng $4n + 2, 4n + 3$.

c) Số chính phương khi chia cho 5 có dạng $5n$, hoặc $5n+1$, hoặc $5n+4$ và không có dạng $5n+2, 5n+3$.

d) Số chính phương khi chia cho 6 có dạng $6n$, hoặc $6n+1$, hoặc $6n+3$ hoặc $6n+4$ và không có dạng $6n+2, 6n+5$.

e) Số chính phương khi chia cho 8 có dạng $8n$ hoặc $8n+1$ hoặc $8n+4$ và không có dạng $8n+r$ với r bằng 2, 3, 5, 6, 7.

g) Số chính phương khi chia cho 9 có dạng $9n$ hoặc $9n+1$ hoặc $9n+4$ hoặc $9n+7$ và không có dạng $9n+r$ với r bằng 2, 3, 5, 6, 8.

Chứng minh. Áp dụng lập luận như ở chứng minh định lý 1.16.

a) Xét $n = 3k + r$ với k, r đều là số nguyên và $0 \leq r \leq 2$ thì $n^2 = (3k+r)^2 = 3k(3k+2r) + r^2$ và r^2 chỉ có thể là 0, 1, 4, từ đó rút ra kết luận.

Chứng minh tương tự cho các trường hợp còn lại.

Định lý 1.18 (xem [2],[3])**.**

a) Số lũy thừa bậc ba khi chia cho 4 không có dạng $4n+2$.

b) Số lũy thừa bậc ba khi chia cho 8 không có dạng $8n+r$ với r bằng 2, 4, 6.

c) Số lũy thừa bậc ba khi chia cho 9 không có dạng $9n+r$ với r bằng 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Chứng minh.

a) Chứng minh tương tự như chứng minh định lý 1.16. đpcm.

Để chứng minh một số là số lũy thừa ta có thể dùng các tính chất 1.4, tính chất 1.5, tính chất 1.6, tính chất 1.7, hoặc biến đổi số đang xét thành lũy thừa bậc n của số nguyên.

Tiếp theo, ta tính toán trên các số lũy thừa đã cho.

Bài toán 1.6 (xem [1],[3])**.** Chứng minh rằng mỗi cặp số nguyên dương (m, n) mà tổng và tích của chúng đều là số chính phương thì chúng có dạng $m = ka^2, n = kb^2$, trong đó $a^2 + b^2 = kc^2$ với k là số phi chính phương.

Lời giải. Giả sử $m + n = q^2$ và $m^n = e^2$. Đặt $d = (m, n)$ thì $m = dm_1, n = dn_1$ và $(m_1, n_1) = 1$ theo tính chất của ước chung lớn nhất. Thay vào $m^n = e^2$

được $d^2m_1n_1 = e^2$. Từ d^2 là ước của e^2, suy ra d là ước của e, tức là $e = dh$, thay vào đẳng thức trên được $m_1n_1 = h^2$. Từ đó và $(m_1, n_1) = 1$ thì $m_1 = u^2$ và $n_1 = v^2$ theo tính chất 1.5, tức là $m = du^2, n = dv^2$. Theo tính chất 1.3 viết được $d = kg^2$ với k là số phi chính phương. Đặt $a = gu, b = gv$ thì viết được $m = kg^2u^2 = ka^2, n = kg^2v^2 = kb^2$, trong đó k là số phi chính phương và $q^2 = m + n = ka^2 + kb^2 = k(a^2 + b^2)$. Đặt $(k, q) = p$ thì $k = ps, q = pc$ và $(s, c) = 1$ theo tính chất của ước chung lớn nhất. Từ đẳng thức trên $k = ps$ là ước của $q^2 = p^2c^2$, tức là $p^2c^2 = tps$, suy ra $pc^2 = ts$, mà $(s, c) = 1$ nên s là ước của p, tức là $p = rs$, do đó $k = ps = rs^2$, nhưng k là số phi chính phương nên $s = 1$, tức là $k = p$ và $q = pc = kc$. Thay vào đẳng thức $q^2 = k(a^2 + b^2)$ được $k^2c^2 = q^2 = k(a^2 + b^2)$ rút ra $kc^2 = a^2 + b^2$.

Ngược lại, dễ thấy các cặp số (m, n) có dạng trên thì có tổng và tích đều là số chính phương.(đpcm)

Bài toán 1.7 (xem [1],[3]). Cấp số cộng (nhị thức bậc nhất) chứa số chính phương

a) Chứng minh rằng nếu một cấp số cộng $a + bn$ (với $n = 1, 2, \dots$ và a, b là các số nguyên, $b > 0$) chứa một số chính phương thì cấp số đó chứa vô hạn số chính phương.

b) Nếu cấp số cộng $a + bn$ (với $n = 1, 2, \dots$ và a, b là các số nguyên, $b > 0$) chứa số chính phương $e^2 = a + bn$ thì tồn tại số chính phương $r^2 = d + bm$ thuộc cấp số cộng đó (với m, d là số nguyên) thỏa mãn $0 \le d \le b - 1$ và $-k \le r \le k$, trong đó $b = 2k$ hoặc $b = 2k + 1$.Từ đó hãy chỉ ra cách tìm số chính phương $a + bn$.

c) Tìm các số nguyên n sao cho $27 + 22n$ là số chính phương.

Lời giải.

a) Giả sử trong cấp số cộng $a + bn$ với $n = 1, 2, \dots$ tồn tại số $a + bn_0 = e^2$ thì các số dạng $(bn + e)^2 = b^2n^2 + 2ben + e^2 = b(bn^2 + 2en + n_0) + a$ cũng là số chính phương với $n = 1, 2, \dots$

b) Giả sử với các số nguyên a, b, n có số chính phương $a + bn = e^2$.

* Ta đặt số $a = bv + d$ với $0 \le d \le b - 1$ thì $e^2 = bn + a = bn + bv + d = b(n + v) + d$.

* Ta đặt số $e = bt + r$ với $-k \le r \le k$, trong đó $b = 2k$ hoặc $b = 2k + 1$, thì $bn + d = e^2 = (bt + r)^2 = b(bt^2 + 2tr) + r^2$ hay là $bm + d = r^2$ với $m = n - (bt^2 + 2tr)$.

Giả sử $b = 2k$ hoặc $b = 2k+1$. Ta chuyển việc xét số chính phương $a + bn = e^2$ về xét số chính phương $d + bm = r^2$ với $0 \le d \le b-1$ và $-k \le r \le k$ (với $b = 2k$ thì thừa một số), dẫn đến tìm số m sao cho $1-b \le -d \le bm = r^2 - d \le r^2 \le k^2 \le \frac{1}{4}b^2$, tức là $0 \le m \le \frac{1}{4}b$.

Như vậy số $a + bn = e^2$ là số chính phương khi và chỉ khi tồn tại số m sao cho $d + bm = r^2$ với các số d, m, r được xác định như trên.

c) Ta chuyển việc xét số chính phương $27 + 22n = e^2$ về xét số chính phương $5 + 22s = e^2$, trong đó $n = s - 1 \ge 1$. Đặt $e = 22t + r$ với ˘$10 \le r \le 10$ thì $22s + 5 = e^2 = 22(22t^2 + 2tr) + r^2$ nên 22 là ước số của $r^2 - 5$, suy ra $0 \le r^2 = 22m + 5 \le 100$, dẫn đến $0 \le m \le 4$. Từ đó ta tìm được $m = 2$ nên $r = 7$ hoặc $r = -7$. Từ $22n + 27 = e^2 = 22(22t^2 + 2tr) + 49$ suy ra hai nghiệm là $n_1 = 22t^2 + 14t + 1$ và $n_2 = 22t^2 - 14t + 1$, trong đó t là số tự nhiên tùy ý. đpcm

Chú ý rằng tồn tại cấp số cộng $a + bn$ không chứa số chính phương nào như $2 + 22n$.

Bài toán 1.8 (xem [1],[3])**.** Tam thức bậc hai chứa số chính phương

a) Tìm các số nguyên n sao cho $n^2 + 4n + 25$ là số chính phương. Từ đó hãy chỉ ra cách tìm số chính phương $n^2 + 2kn + c$.

b) Tìm các số nguyên n sao cho $n^2 + 3n + 11$ là số chính phương. Từ đó hãy chỉ ra cách tìm số chính phương $n^2 + (2k+1)n + c$.

Lời giải.

a) Giả sử $n^2 + 4n + 25 = e^2$ thì có $(n+2)^2 + 21 = e^2$ nên $e^2 - (n+2)^2 = 21$, hay là $(e - n - 2)(e + n + 2) = 1.3.7$. Xét các trường hợp sau đây.

1) $\begin{cases} e + n + 2 = 21 \\ e - n - 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e = 11 \\ n = 8 \end{cases}$ Lúc đó có $8^2 + 4.8 + 25 = 121 = 11^2$

2) $\begin{cases} e + n + 2 = 7 \\ e - n - 2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e = 5 \\ n = 0 \end{cases}$ Lúc đó có $0^2 + 3.0 + 25 = 5^2$

Giả sử $n^2 + 2kn + c = e^2$ thì có $(n+k)^2 + c - k^2 = e^2$ nên $e^2 - (n+k)^2 = c - k^2$, hay là $(e - n - k)(e + n + k) = c - k^2$. Vì $e - (n+k)$ và $e + (n+k)$ có cùng tính chẵn lẻ nên cần phân tích số $c - k^2$ thành tích hai số cùng tính chẵn lẻ.

Nếu $c - k^2 = u.v \ge 0$ với $0 \le u \le v$ và $u + v$ chẵn thì giải hệ phương trình $e - n - k = u$ và $e + n + k = v$ sẽ tìm được nghiệm (e, n).

Nếu $k^2 - c = u.v \geq 0$ với $0 \leq u \leq v$ và $u + v$ chẵn thì giải hệ phương trình $n + k - e = u$ và $e + n + k = v$ sẽ tìm được nghiệm (e, n).

b) Giả sử $n^2 + 3n + 11 = e^2$ hay là $4n^2 + 12n + 44 = 4e^2$ thì có $(2n + 3)^2 + 35 = 4e^2$ nên $4e^2 - (2n + 3)^2 = 35$, hay là $(2e - 2n - 3)(2e + 2n + 3) = 1.5.7$. Xét các trường hợp sau đây.

1) $\begin{cases} 2e + 2n + 3 = 35 \\ 2e - 2n - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e = 9 \\ n = 7 \end{cases}$ Lúc đó có $7^2 + 3.7 + 11 = 81 = 9^2$.

2) $\begin{cases} 2e + 2n + 3 = 7 \\ 2e - 2n - 3 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e = 3 \\ n = -1 \end{cases}$ Lúc đó có $1^2 - 3.1 + 11 = 9 = 3^2$.

Giả sử $n^2 + (2k + 1)n + c = e^2$ hay là $4n^2 + 4(2k + 1)n + 4c = 4e^2$ thì có $(2n + 2k + 1)^2 + 4c - (2k + 1)^2 = 4e^2$ nên $4e^2 - (2n + 2k + 1)^2 = 4c - (2k + 1)^2$, hay là $(2e - 2n - 2k - 1)(2e + 2n + 2k + 1) = 4c - (2k + 1)^2$.

Vì $2e - (2n + 2k + 1)$ và $e + (2n + 2k + 1)$ có cùng tính chẵn lẻ nên cần phân tích số $4c - (2k + 1)^2$ thành tích hai số cùng tính chẵn lẻ.

Nếu $4c - (2k + 1)^2 = u.v \geq 0$ với $0 \leq u \leq v$ và $u + v$ chẵn thì giải hệ phương trình $2e - 2n - 2k - 1 = u$ và $2e + 2n + 2k + 1 = v$ sẽ tìm được nghiệm (e, n).

Nếu $(2k + 1)^2 - 4c = u.v \geq 0$ với $0 \leq u \leq v$ và $u + v$ chẵn thì giải hệ phương trình $2n + 2k + 1 - 2e = u$ và $2e + 2n + 2k + 1 = v$ sẽ tìm được nghiệm (e, n).đpcm

Bài toán 1.9. Chứng minh rằng mỗi số sau không là số chính phương:

a) Tích hai số nguyên dương chẵn liên tiếp.

b) Tích bốn số nguyên dương liên tiếp.

Lời giải.

a) Giả sử $2a(2a + 2) = b^2$ thì số b phải chẵn, tức là $b = 2c$. Thay vào đẳng thức trên được $a(a + 1) = b^2$. Vì $(a, a + 1) = 1$ nên theo tính chất 1.3 phải có $a = c^2, a + 1 = e^2$, trong đó $c \geq 1$. Dễ thấy rằng $c^2 < c^2 + 1 < c^2 + 2c + 1 = (c + 1)^2$ nên theo tính chất 1.7 thì không tồn tại số chính phương $a + 1 = c^2 + 1 = e^2$, trái với điều giả sử.

b) Xét tích $a(a + 1)(a + 2)(a + 3) = a(a + 3)(a + 1)(a + 2) = (a^2 + 3a)(a^2 + 3a + 2)$. Số $a^2 + 3a = a(a + 3) = 2b$ là số chẵn vì hai số a và $a + 3$ có tính chẵn lẻ khác nhau. Lúc đó tích ban đầu trở thành $2b(2b + 2)$, sử dụng kết quả câu a). đpcm

Bài toán 1.10. Chứng minh rằng mỗi số sau không là số lũy thừa bậc n:

a) Tích hai số nguyên dương liên tiếp.

b) Tích hai số nguyên dương lẻ liên tiếp.

c) Tích ba số nguyên dương liên tiếp.

Lời giải.

a) Giả sử $a(a+1) = b^n$. Vì $(a, a+1) = 1$ nên theo tính chất 1.3 phải có $a = c^n, a+1 = e^n$, trong đó $c \geq 1$. Với $n \geq 2$ ta sẽ chỉ ra rằng $c^n < c^n+1 < (c+1)^n$, tức là có

$$a = c^n < a+1 = e^n = c^n+1 < (c+1)^n,$$

như thế theo tính chất 1.7 thì không tồn tại số $a+1 = e^n$.

Ta sẽ chứng minh quy nạp theo n rằng $c^n < c^n+1 < (c+1)^n$. Với $n = 2$ thì $c^2 < c^2+1 < c^2+2c+1 = (c+1)^2$, khẳng định đúng.

Giả sử khẳng định đúng đến n, xét số mũ $n+1$ có $c^n+1+1 < c.c^n + c =< (c^n+1)c < (c+1)^n(c+1) < (c+1)^{n+1}$, khẳng định đúng với $n+1$.

Vậy khẳng định đúng với số nguyên dương n bất kì nên không tồn tại số $a+1 = e^n$.

b) Xét số lẻ a và giả sử $a(a+2) = b^n$. Đặt $d = (a, a+2)$ thì d là ước của $(a+2) - a = 2$, nhưng do a lẻ nên $d = 1$. Theo tính chất 1.3 phải có $a = c^n$, $a+2 = e^n$, trong đó $c \geq 1$. Với $n \geq 2$, ta sẽ chỉ ra rằng $c^n < c^n+2 < (c+1)^n$, tức là có $a = c^n < a+2 = e^n = c^n+2 < (c+1)^n$, như thế theo tính chất 1.7 thì không tồn tại số $a+2 = e^n$.

Ta sẽ chứng minh quy nạp theo n rằng $c^n < c^n+2 < (c+1)^n$. Với $n = 2$ thì $c^2 < c^2+2 < c^2+2c+1 = (c+1)^2$, khẳng định đúng.

Giả sử khẳng định đúng đến n, xét số mũ $n+1$ có $c^{n+1}+2 < c.c^n + c^n + 2c + 2 < (c^n+2)(c+1) < (c+1)^n(c+1) < (c+1)^{n+1}$, khẳng định đúng với $n+1$. Vậy khẳng định đúng với số nguyên dương n bất kì nên không tồn tại số $a+1 = e^n$.

c) Giả sử $a(a+1)(a+2) = b^n$. Do $(a+1, a(a+2)) = 1$ nên theo tính chất 1.3 phải có $a+1 = c^n, a(a+2) = e^n$, trong đó $n \geq 2$ và $c \geq 2$. Từ đó $1 = (a+1)^2 - a(a+2) = c^{2n} - e^n = (c^2 - e)(c^{2n-2} + c^{2n-4}e + \cdots + c^2e^{n-2} + e^{n-1})$, nhưng vế phải của đẳng thức trên lớn hơn 1 khi $n \geq 2$,đpcm.

Ghi chú. 1) Các nhà toán học P. Erdös và J.L.Selfridge đã chứng minh được rằng: Tích của $n(n > 1)$ số nguyên dương liên tiếp không là số lũy thừa.

2) Nhà toán học P. Erdös đã chứng minh được rằng: Tích của $n(n > 1)$ số nguyên

dương lẻ liên tiếp không là số lũy thừa.
3) Xét tích hai số nguyên dương chẵn liên tiếp $2a(2a+2) = b^3 \Leftrightarrow (2a+1)^2 = b^3+1$. Ta biết có đẳng thức $3^2 = 2^3 + 1$.

Năm 1844 nhà toán học người Bỉ C. E.Catalan đã nêu giả thuyết: Hai số nguyên dương liên tiếp khác 8 và 9 thì không thể là những số lũy thừa. Nhiều nhà toán học đã tìm cách chứng minh giả thuyết này, mãi đến năm 2002 điều này mới được tiến sĩ Preda Mihailescu chứng minh đầy đủ (http://www.math.uni Paderborn de/ preda/ papers/ caterelle.ps).

Bài toán 1.11. Chứng minh rằng mỗi số sau không là số chính phương:
a) Tổng các bình phương của hai số lẻ.
b) Tổng các lũy thừa bậc chẵn của hai số lẻ.
Lời giải.

a) b) Có dạng $4k + 2$.

Bài toán 1.12 (xem [1],[3])**.** Chứng minh rằng tổng các bình phương của k số nguyên dương liên tiếp không là số chính phương với mỗi số k bằng 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
Lời giải.

a) Với $n \geq 1$, xét tổng $S_k = n^2 + (n+1)^2 + \cdots + (n+k-1)^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + (n+k-1)^2 - (1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2) = 1^2 + 2^2 + \cdots + (k-1)^2 + k^2 + (k+1)^2 - 1^2 + (k+2)^2 - 2^2 + \cdots + (k+n-1)^2 - (n-1)^2$.

Chú ý rằng $1^2 + 2^2 + \cdots + (k-1)^2 = \dfrac{1}{6}(k-1)k(2k-1)$.
Còn $k^2 + k(k+2) + k(k+4) + \cdots + k(k+2n-2) = nk^2 + 2k(1+2+\cdots+(n-1)) = nk^2 + kn(n-1) = kn^2 + k(k-1)n$. Từ đó $S_k = kn^2 + k(k-1)n + \dfrac{1}{6}(k-1)k(2k-1)$
Từ đó sẽ áp dụng tính chất 1.2, định lý 1.17 cho mỗi trường hợp sau đây.

* $S_3 = 3n^2 + 6n + 5 = 3(n+1)^2 + 2$, có dạng $3m + 2$.
* $S_4 = 4n^2 + 12n + 14 = 4(n^2 + 3n + 3) + 2$, có dạng $4m + 2$.
* $S_5 = 5n^2 + 20n + 30 = 5((n+2)^2 + 2)$. Số có dạng $m^2 + 2$ không chia hết cho 5 khi đặt $m = 5t + r$ với $r = 0, 1, 2, -1, -2$.
* Nếu $S_6 = 6n^2 + 30n + 55 = 6(n+2)(n+3) + 18 + 1 = m^2$ thì số m lẻ nên có $6(n+2)(n+3) + 18 = (m-1)(m+1)$. Vế phải chia hết cho 4, nhưng $18 = 2.9$.
* $S_7 = 7(n^2 + 6n + 13) = 7(7n + 14 + n^2 - n - 1)$. Số $n^2 - n - 1$ không chia hết cho

7 khi đặt $n = 7t + r$ với $r = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$.

* $S_8 = 4(2n^2 + 14n + 35)$. Nếu $2n^2 + 14n + 35 = m^2$ thì số m lẻ nên có $2(n+3)(n+4) + 10 = (m-1)(m+1)$. Vế phải chia hết cho 4, nhưng $10 = 2.5$.

* $S_9 = 9(n+4)^2 + 9.6 + 6$, có dạng $9m + 6$.

* $S_{10} = 5(2n^2 + 18n + 57)$. Số $2n^2 + 18n + 57 = 2(n^2 - n + 1) + 20n + 55$ không chia hết cho 5 khi đặt $n = 5t + r$ với $r = 0, 1, 2, -1, -2$.

Ghi chú. 1) Với $k = 2$ thì phương trình $n^2 + (n+1)^2 = m^2 \Leftrightarrow (2n+1)^2 - 2m^2 = -1 \Leftrightarrow t^2 - 2m^2 = -1$ (Phương trình Pell) với $t = 2n + 1$, có vô hạn nghiệm nguyên dương, chẳng hạn là $3^2 + 4^2 = 5^2$ và $20^2 + 21^2 = 29^2$. Dễ dàng chứng minh rằng:

Nếu phương trình $n^2 + (n+1)^2 = m^2$ có nghiệm $(n_1; n_1 + 1; m_1)$ thì nó cũng có nghiệm $(n_2; n_2 + 1; m_2)$ với $n_2 = 3n_1 + 2m_1 + 1; m_2 = 4n_1 + 3m_1 + 2$.

Mệnh đề đảo cũng đúng, tức là hệ thức trên cùng với $3^2 + 4^2 = 5^2$ là mọi nghiệm của phương trình $n^2 + (n+1)^2 = m^2$

2) Với $k = 11$ thì mệnh đề trên không đúng. Chẳng hạn:

$18^2 + 19^2 + 20^2 + 21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 + 25^2 + 26^2 + 27^2 + 28^2 = 77^2$.

Bài toán 1.13 (xem [1],[3])**.** Chứng minh rằng :

a) Tổng các lũy thừa bậc chẵn của ba số nguyên liên tiếp không là số lũy thừa bậc chẵn.

b) Tổng các lũy thừa bậc chẵn bằng nhau của 9 số nguyên liên tiếp không là số lũy thừa.

Lời giải.

a) Ba số nguyên liên tiếp khi chia cho 3 có các số dư khác nhau nên tổng các lũy thừa bậc chẵn của chúng có dạng $3n + 2$. Áp dụng định lý 1.17.

b) Viết mỗi số trong dạng $9t + r$ với $-4 \leq r \leq 4$ thì tổng các lũy thừa bậc chẵn đều bằng $2n$ của 9 số nguyên liên tiếp có dạng $S = 9m + 2(1^n + 4^n + 16^n) = 9k + 2(1^n + 4^n + 7^n)$.

Đặt $n = 3v + s$ với $0 \leq s \leq 2$ thì $1^n + 4^n + 7^n$ có dạng $9u + 3$ nên S có dạng $9x + 6$. Áp dụng tính chất 1.2.đpcm

Bài toán 1.14. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất với $n > 1$ sao cho tổng các bình phương của n số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến n là số chính phương.

Lời giải. Tổng các bình phương của n số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến n bằng $S = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

Giả sử $S = m^2$ thì $n(n+1)(2n+1) = 6m^2 \quad (1.4)$.

Xét các trường hợp sau

1) Nếu $n = 6k$ thì (1.4) có dạng $k(6k+1)(12k+1) = m^2$. Các thừa số ở vế trái nguyên tố sánh đôi nên áp dụng liên tiếp định lý 3 đối với tích $k(6k+1)$ và tích $k(6k+1)(12k+1)$ thì mỗi thừa số là số chính phương. Với $k = 1$ thì vế trái bằng 7.13 nên không là số chính phương. Với $k = 2$ thì vế trái có dạng $4k+2$ nên không là số chính phương. Với $k = 3$ thì vế trái có dạng $9k+3$ nên không là số chính phương. Với $k = 4$ thì $n = 24$, vế trái bằng 4.25.49 nên có $1^2 + 2^2 + \cdots + 24^2 = 70^2. \quad (1.5)$.

2) Nếu $n = 6k+1$ thì (1.4) có dạng $(6k+1)(3k+1)(2k+1) = m^2$. Lập luận tương tự trên, chú ý rằng số $2k+1$ nhỏ nhất (lớn hơn 1) là số chính phương khi $k = 4$, lúc đó $n = 25 > 24$.

3) Nếu $n = 6k+2$ thì (1.4) có dạng $(3k+1)(2k+1)(12k+5) = m^2$.

4) Nếu $n = 6k+3$ thì (1.4) có dạng $(2k+1)(3k+2)(12k+7) = m^2$.

5) Nếu $n = 6k+4$ thì (1.4) có dạng $(3k+2)(6k+5)(4k+3) = m^2$.

6) Nếu $n = 6k+5$ thì (1.4) có dạng $(6k+5)(k+1)(12k+1) = m^2$.

Cả bốn trường hợp trên đều không xảy ra đẳng thức khi $k = 0$.

Xét $k > 0$, lập luận như trên thì mỗi thừa số ở vế trái trong mỗi trường hợp đều là số chính phương. (*)

Chú ý rằng $12k+5 = 3(4k+1)+2$ và $6k+5 = 3(2k+1)+2$ nên mỗi tích ở vế trái trong mỗi trường hợp đều chứa thừa số $3t+2$, thừa số này không là số chính phương theo định lý 3.3, trái với (*).

Như vậy từ đẳng thức (1.5) và lập luận trên rút ra số $n = 24$ là số nhỏ nhất thỏa mãn đề bài. đpcm

Ghi chú. 1) Đã chứng minh được số $n = 24$ là số duy nhất thỏa mãn đề bài.

2) Cũng chứng minh được tổng $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ không là số lũy thừa bậc ba.

Chương 2. Bất đẳng thức số học

Trong chương này ta xét một số bất đẳng thức và tính toán liên quan đến tập rời rạc và bất đẳng thức trên lớp hàm số học

2.1 Bất đẳng thức trên tập số nguyên

Bài toán 2.1. Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{C_n^1} + \sqrt{C_n^2} + \cdots + \sqrt{C_n^n} \leq \sqrt{n(2^n - 1)}.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\left(\sqrt{C_n^1} + \sqrt{C_n^2} + \cdots + \sqrt{C_n^n}\right)^2 \leq (C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n)(1 + 1 + \cdots + 1).$$

Ta có

$$C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n - 1$$

nên

$$\sqrt{C_n^1} + \sqrt{C_n^2} + \cdots + \sqrt{C_n^n} \leq \sqrt{n(2^n - 1)}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ $C_n^1 = C_n^2 = \cdots = C_n^n \Leftrightarrow n = 1$.

Bài toán 2.2. Chứng minh rằng với $0 \leq k \leq n$ và $k, n \in \mathbb{Z}$ luôn có bất đẳng thức:

$$C_{2n+k}^n . C_{2n-k}^n \leq (C_{2n}^n)^2.$$

Lời giải. Cố định n, ta xét dãy số:
$u_k = C_{2n+k}^n . C_{2n-k}^n$ với $0 \leq k \in \mathbb{Z}$.

Khi đó, bất đẳng thức được biểu diễn dưới dạng: $u_k \leq u_0$ với $0 \leq k \in \mathbb{Z}$.

Ta đi chứng minh dãy u_k đơn điệu giảm. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
&u_{k+1} < u_k\\
&\Leftrightarrow \frac{(2n+k+1)!}{n!(n+k+1)!}\frac{(2n-k-1)!}{n!(n-k-1)!}\\
&< \frac{(2n+k)!}{n!(n+k)!}\frac{(2n-k)!}{n!(n-k)!}\\
&\Leftrightarrow \frac{2n+k+1}{n+k+1} < \frac{2n-k}{n-k}\\
&\Leftrightarrow n+2nk > 0.
\end{aligned}$$

Suy ra $u_k \le u_0$ với $0 \le k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow C_{2n+k}^n.C_{2n-k}^n \le (C_{2n}^n)^2$.

Bài toán 2.3. Với n là số nguyên dương, chứng minh rằng

$$\frac{1}{n}(C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \cdots + nC_n^n) \le n!$$

Lời giải. Với mọi x, và với n là số nguyên dương, ta có

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^{n-1}x^{n-1} + C_n^n x^n.$$

Lấy đạo hàm theo x hai vế của biểu thức trên ta được

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + \cdots + (n-1)C_n^{n-1}x^{n-2} + nC_n^n x^{n-1}.$$

Thay $x = 1$, vào ta được

$$n.2^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \cdots + nC_n^n.$$

Khi đó bất đẳng thức được chuyển về dạng

$$2^{n-1} \le n!$$

Ta chứng minh bất đẳng thức trên bằng phương pháp quy nạp.

Thật vậy, bất đẳng thức đúng với $n = 1$. Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$, k nguyên dương. tức là: $2^{k-1} \le k!$. Ta phải chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k+1$, tức là phải chứng minh $2^{k+1} \le (k+1)!$

Ta có $2^{k+1} = 2^k.2 \le 2k! \le (k+1)!$ vì $2 \le (k+1)$, điều phải chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $n = 1$.

Bài toán 2.4. Cho n là số nguyên dương và lớn hơn 1. Chứng minh rằng

$$2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Lời giải. Áp dụng công thức khai triển Newtơn, ta có

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = C_n^0 + C_n^1.\frac{1}{n} + C_n^2.\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + C_n^k.\left(\frac{1}{n}\right)^k + \dot{+} C_n^n\left(\frac{1}{n}\right)^n.$$

Ta có $C_n^0 = 1, C_n^1.\dfrac{1}{n} = 1$. Do đó $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n > 2$.

Ta lại có

$$\frac{C_n^k}{n^k} = \frac{n!}{n^k.k!.(n-k)!} \le \frac{1}{k!} \le \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Áp dụng bất đẳng thức này ứng với $k = 2, 3, \ldots, n$, ta thu được

$$\begin{aligned}
&\frac{C_n^2}{n^2} \le 1 - \frac{1}{2}\\
&\frac{C_n^3}{n^3} \le \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\\
&\ldots\\
&\frac{C_n^n}{n^n} \le \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = C_n^0 + C_n^1.\frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n} \frac{C_n^k}{n^k} < 2 + 1 - \frac{1}{n} < 3,$$

điều phải chứng minh.

Bài toán 2.5. Chứng minh rằng $C_{2017}^k + C_{2017}^{k+1} \le C_{2017}^{1008} + C_{2017}^{1009}$ với $0 \le k \le 1008, k \in \mathbb{N}$.

Lời giải. Nhận xét rằng, bất đẳng thức cần chứng minh có dạng: $C_{2018}^{k+1} \le C_{2018}^{1009}$.

Xét dãy số $u_k = C_{2018}^{k+1}$ với $0 \le k \le 1008, k \in \mathbb{N}$.

Ta chứng minh dãy u_k là dãy đơn điệu tăng. Thậy vậy, xét $u_{k+1} > u_k$ thì

$$\begin{aligned}
&C_{2018}^{k+2} > C_{2018}^{k+1}\\
&\Leftrightarrow \frac{2018!}{(k+2)!(2016-k)!} > \frac{2018!}{(k+1)!(2017-k)!}\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{k+2} > \frac{1}{2017-k}
\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow 2015 > 2k \Leftrightarrow k \leq 1007$

$\Rightarrow u_k \leq u_{1008} \forall k \leq 1008$

$\Leftrightarrow C_{2018}^{k+1} \leq C_{2018}^{1009}, 0 \leq k \leq 1008, k \in \mathbb{N}.$

Bài toán 2.6. Cho $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng

$$C_n^0.C_n^1.\ldots.C_n^n \leq \left(\frac{2^n - 2}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Lời giải. Ta có $C_n^0.C_n^1.\ldots.C_n^n = C_n^1.\ldots.C_n^{n-1}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$C_n^1.\ldots.C_n^{n-1} \leq \left(\frac{C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^{n-1}}{n-1}\right)^{n-1} = \left(\frac{2^n - 2}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Bài toán 2.7. Với n là số nguyên dương, $n \geq 2$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{n}(C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \cdots + nC_n^n) < n!$$

Lời giải. Với mọi x, và với n là số nguyên dương, ta có

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n n.$$

Lấy đạo hàm hai vế của đẳng thức trên ta được

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + \cdots + (n-1)C_n^{n-1}x^{n-2} + nC_n^n x^{n-1}.$$

Thay $x = 1$ vào hệ thức trên, ta được

$$n.2^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \cdots + nC_n^n.$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh được chuyển về dạng:

$$2^{n-1} < n!(*).$$

Ta chứng minh bất đẳng thức này bằng phương pháp qui nạp toán học.

Hiển nhiên với $n = 2$ bất đẳng thức $(*)$ đúng. Giả sử $(*)$ đúng với $n = k, k \geq 2, k$ là số nguyên dương, tức là: $2^{k-1} < k!$ Ta chứng minh $(*)$ đúng với $n = k+1$, tức là phải chứng minh $2^n < (n+1)!$.

Thật vậy, $2^n = 2.2^{n-1} < 2.(n!) < (n+1).n! = (n+1)!$, điều phải chứng minh.

2.2 Bất đẳng thức trong lớp hàm số học

Bài toán 2.8. Cho n là số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 1. Kí hiệu $\sigma(n)$ là tổng tất cả các ước tự nhiên của n (kể cả 1 và n), còn kí hiệu $\varphi(n)$ là số lượng các số nhỏ hơn n và nguyên tố cùng nhau với n. Chứng minh rằng với mọi $n \geq 2$, ta có

$$\sigma(n) + \varphi(n) \geq 2n.$$

Lời giải. Giả sử $1 = d_1 < d_2 < d_3 < \ldots < d_k = n$ là các ước tự nhiên của số n. Trong các số tự nhiên không vượt quá n, số lượng các bội của d_i bằng $\frac{n}{d_i}$; số lượng các số không lớn hơn n và không nguyên tố cùng nhau với n theo định nghĩa bằng $n - \varphi(n)$. Lại theo định nghĩa của $\sigma(n)$ thì

$$\sigma(n) = d_1 + d_2 + \ldots + d_{k-1} + d_k.$$

Vì $d_k = n$ nên Ta có

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_{k+1} = \sigma(n) - n. \tag{2.1}$$

Rõ ràng, ta có $\frac{n}{d_1} = d_k; \frac{n}{d_2} = d_{k-1}; \ldots; \frac{n}{d_k} = d_1$. Suy ra

$$\frac{n}{d_2} + \frac{n}{d_3} + \ldots + \frac{n}{d_k} = d_{k-1} + d_{k-2} + \ldots + d_1, \tag{2.2}$$

vì $\frac{n}{d_2} + \frac{n}{d_3} + \ldots + \frac{n}{d_k}$ là số lượng tất cả các bội số của các ước số $d_2, d_3, \ldots, d_k$ cộng lại (chú ý rằng ở đây nếu a vừa là bội số của các ước d_i và d_j với $i \neq j$ thì a trong tổng trên có mặt hai lần).

Do đó số lượng các ước không lớn hơn n và không nguyên tố cùng nhau với n không vượt quá số $\frac{n}{d_2} + \frac{n}{d_3} + \ldots + \frac{n}{d_k}$, tức là

$$\frac{n}{d_2} + \frac{n}{d_3} + \ldots + \frac{n}{d_k} \geq n - \varphi(n). \tag{2.3}$$

Từ (2.1), (2.2) và (2.3), suy ra

$$\sigma(n) - n \geq n - \varphi(n), \text{ hay } \sigma(n) + \varphi(n) \geq 2n.$$

Mà nếu p là số nguyên tố thì $\sigma(p) = p + 1$ do ước của p khi p là số nguyên tố là 1 và p còn $\varphi(p) = p - 1$ (vì nếu p là số nguyên tố thì các số nhỏ hơn p và nguyên tố cùng nhau với p là $1, 2, \dots, p-1$). Điều đó có nghĩa là khi p nguyên tố thì

$$\sigma(p) + \varphi(p) = 2p.$$

Tóm lại với mọi $n \geq 1$, ta có

$$\sigma(n) + \varphi(n) \geq 2n. \tag{2.4}$$

Dấu " = " trong (2.4) xảy ra khi và chỉ khi n là số nguyên tố.

Bài toán 2.9. Chứng minh rằng bất đẳng thức $\sigma(n) > 3n$ đúng với một tập hợp vô hạn các số tự nhiên n.

Lời giải. Rõ ràng nếu d là ước số của n, thì $\dfrac{n}{d}$ cũng là ước số của n. Vì vậy

$$\sigma(n) = d_1 + d_2 + \ldots + d_k = n\left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_k}\right).$$

Trong đó $d_1, d_2, \dots, d_k$ là tất cả các ước của n. Lấy n là số tùy ý sao cho nó là bội số của $16! = 1.2.3.\ldots.16$. Số các số n như vậy dĩ nhiên là vô hạn.

Nói riêng trong các ước của n có $1, 2, 3, \dots, 16$,

$$\sigma(n) = n\left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_k}\right) \geq n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{16}\right). \tag{2.5}$$

Do

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{16} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}\right)$$

nên hiển nhiên ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 2.\frac{1}{4} = \frac{1}{2};\\
&\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 4.\frac{1}{8} = \frac{1}{2};\\
&\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{16} > 8.\frac{1}{16} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

nên

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{16} > 3. \tag{2.6}$$

Từ (2.5) và (2.6) suy ra $\sigma(n) > 3n$.

Như vậy ta đã chứng minh được rằng tồn tại vô hạn số n sao cho ta có bất đẳng thức $\sigma(n) > 3n$.

Bài toán 2.10. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn các số tự nhiên n sao cho bất đẳng thức
$$\frac{\sigma(n)}{n} > \frac{\sigma(k)}{k}$$
đúng với mọi $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Lời giải. Giả thiết phản chứng chỉ tồn tại hữu hạn giá trị $n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn bất đẳng thức
$$\frac{\sigma(n)}{n} > \frac{\sigma(k)}{k}, \forall k = 1, 2, \ldots, n-1.$$
Giả sử N là số lớn nhất trong các giá trị n như thế.

Đặt
$$A_n = max\frac{\sigma(i)}{i}, n = 1, 2, \ldots; 1 \leq i \leq n.$$
Rõ ràng ta có $A_1 \leq A_2 \leq \ldots \leq A_N$.

Xét khi $n > N$. Theo định nghĩa của số N thì $\exists k_0 \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ sao cho
$$\frac{\sigma(n)}{n} > \frac{\sigma(k_0)}{k_0}.$$
Từ đó kết hợp với $m > n$ thì $A_m \geq A_n$ suy ra
$$A_N = A_{N+1} = A_{N+2} = \ldots$$

Như vậy dãy số $\{A_n\}, n = 1, 2, \ldots$ bị chặn trên bởi số $A_N = \dfrac{\sigma(N)}{N}$ (theo định nghĩa số N thì $\forall i = 1, 2, \ldots, N-1$ ta có $\dfrac{\sigma(N)}{N} > \dfrac{\sigma(i)}{i}$).

Xét số $2N$, ta thấy các ước của số $2N$ đều có dạng $2d$ (với $N \vdots d$) và số 1. Như vậy
$$\sigma(2N) \geq 2\sigma(N) + 1 \Rightarrow \frac{\sigma(2N)}{2N} \geq \frac{2\sigma(N)+1}{2N} = \frac{\sigma(N)}{N} + \frac{1}{2N} > \frac{\sigma(N)}{N}.$$

Bất đẳng thức $\dfrac{\sigma(2N)}{2N} > \dfrac{\sigma(N)}{N}$ mâu thuẫn với việc dãy $\{A_n\}$ bị chặn trên bởi $\dfrac{\sigma(N)}{N}$. Điều vô lý đó chứng tỏ giả thiết phản chứng là sai, suy ra tồn tại vô hạn các số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$ sao cho bất đẳng thức $\dfrac{\sigma(n)}{n} > \dfrac{\sigma(k)}{k}$ đúng với mọi $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Bài toán 2.11. Kí hiệu $d(n)$ là trung bình cộng của tất cả các ước số của n (kể cả 1 và n). Chứng minh rằng với mọi n, Ta có

$$\sqrt{n} \leq d(n) \leq \frac{n+1}{2}.$$

Lời giải. Giả sử $1 = d_1 < d_2 < d_3 < \ldots < d_k = n$ là các ước tự nhiên của số n. Như vậy, $1 \leq d_i \leq n, \forall i = \overline{1,k}$.

Theo định nghĩa, ta có

$$d(n) = \frac{d_1 + d_2 + \ldots + d_k}{k}.$$

Chú ý rằng $\dfrac{n}{d_1} > \dfrac{n}{d_2} > \ldots > \dfrac{n}{d_{k-1}} > \dfrac{n}{d_k}$, và $\dfrac{n}{d_i}, i = \overline{1,k}$ cũng là tất cả các ước của n. Như vậy ta có $d_1 = \dfrac{n}{d_k}; d_2 = \dfrac{n}{d_{k-1}}; \ldots; d_{k-1} = \dfrac{n}{d_2}$; và $d_k = \dfrac{n}{d_1}$. Vì lẽ ấy ta có

$$d_1 d_k = d_2 d_{k-1} = \ldots = d_i d_{k-i+1} = n, \forall i = \overline{1,k}. \tag{2.7}$$

Bây giờ ta chứng minh vế trái của bất đẳng thức. Ta có

$$\begin{aligned} d(n) = \frac{d_1 + d_2 + \ldots + d_k}{k} &= \frac{2(d_1 + d_2 + \ldots + d_k)}{2k} \\ &= \frac{\dfrac{d_1 + d_k}{2} + \dfrac{d_2 + d_{k-1}}{2} + \ldots + \dfrac{d_{k-1} + d_2}{2} + \dfrac{d_k + d_1}{2}}{k}. \end{aligned}$$

Từ đó theo bất đẳng thức Cauchy, suy ra

$$d(n) \geq \frac{\sqrt{d_1 d_k} + \sqrt{d_2 d_{k-1}} + \ldots + \sqrt{d_{k-1} d_2} + \sqrt{d_k d_1}}{k}. \tag{2.8}$$

Từ (2.7) và (2.8), suy ra

$$d(n) \geq \frac{k\sqrt{n}}{n} = \sqrt{n}.$$

Vậy $d(n) \geq \sqrt{n}$. Vế trái của bất đẳng thức được chứng minh. Bây giờ ta xét vế phải của nó. Do $d_i \geq 1, \forall i = \overline{1,k}$, nên ta có

$$0 \leq (d_i - 1)(d_{k-i+1} - 1) = d_i d_{k-i+1} + 1 - d_i - d_{k-i+1}. \tag{2.9}$$

Từ (2.7) và (2.9) suy ra với mọi $i = 1, 2, \ldots, k$ ta có $n + 1 - (d_i + d_{k-i+1}) \geq 0$ hay

$$d_i + d_{k-i+1} \leq n + 1, \forall i = 1, 2, \ldots, k. \tag{2.10}$$

Cộng từng vế k bất đẳng thức dạng (2.10), ta được:

$$2\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(n+1) \Leftrightarrow \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{2} d_i \leq \frac{n+1}{2}.$$

Theo định nghĩa của $d(n)$ điều ấy có nghĩa là $d(n) \leq \dfrac{n+1}{2}$.

Tóm lại, ta có $\sqrt{n} \leq d(n) \leq \dfrac{n+1}{2}$.

Bài toán 2.12. Cho n số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 1. Kí hiệu $\sigma_2(n) = d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_m^2$, với $d_1, d_2, \ldots, d_m$ là tất cả các ước của n. Chứng minh rằng:

$$\sigma_2(n) < n^2\sqrt{n}.$$

Lời giải. Giả sử $d_1 < d_2 < \ldots < d_m$ là tất cả các ước của n thì $\dfrac{n}{d_1} > \dfrac{n}{d_2} > \ldots > \dfrac{n}{d_m}$ cũng là tất cả các ước của n. Vì thế

$$d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_m^2 = n^2\left(\frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} + \ldots + \frac{1}{d_m^2}\right). \tag{2.11}$$

Mặt khác, ta có

$$n^2\left(\frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} + \ldots + \frac{1}{d_m^2}\right) \leq n^2\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{m^2}\right) \leq n^2\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right). \tag{2.12}$$

Tóm lại, do $n > 2$ nên

$$\begin{aligned}\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} &< 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n.(n-1)} = \\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}. \tag{2.13}$$

Vì $n > 2$ và n là số nguyên nên $n \geq 3$ suy ra $2 - \dfrac{1}{n} < \sqrt{n}$. Vì thế từ (2.13) suy ra

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < \sqrt{n}. \tag{2.14}$$

Vậy từ (2.11),(2.12) và (2.14) ta có

$$d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_m^2 < n^2\sqrt{n}.$$

Bài toán 2.13. Giả sử $\sigma(n)$ là số tất cả các ước số tự nhiên của n. Chứng minh rằng $\sigma^2(n) < 4n$, với mọi $n = 1, 2, \ldots$

Lời giải. Giả sử a là ước số của n, thì số $b = \dfrac{n}{a}$ cũng là ước số của n. Do đó tất cả các ước số của n được chia thành từng cặp, khi đặt tương ứng với mỗi ước $a < \sqrt{n}$, với $b = \dfrac{n}{a}$. Ngoài ra có thể thêm $\sqrt{n}$ nếu $\sqrt{n}$ là số nguyên (tức là khi n là số chính phương). Số nhỏ trong hai số của cặp gọi là số thứ nhất còn số lớn gọi là số thứ hai.

Xét hai khả năng sau:

i) Nếu n không phải là số chính phương. Khi đó tất cả các số thứ nhất sẽ nhỏ hơn $\sqrt{n}$. Vì vậy nếu gọi d^* là số lớn nhất trong các số thứ nhất thì $d^* < \sqrt{n} \Rightarrow d^* < [\sqrt{n}]$ ($[\alpha]$ để chỉ phần nguyên của số α).

Vì mọi số thứ nhất thuộc tập $\{1, 2, \ldots, [\sqrt{n}]\}$, từ đó suy ra số các số thứ nhất $\leq [\sqrt{n}] < \sqrt{n}$ (do n không là số chính phương).

Vì n không phải là số chính phương nên $\sigma(n)$ bằng hai lần số các số thứ nhất. Do vậy ta có bất đẳng thức

$$\sigma(n) < 2\sqrt{n} \Rightarrow \sigma^2(n) < 4n.$$

ii) Nếu n là số chính phương. Khi đó $\sqrt{n}$ là ước của số n và tất cả các ước thứ nhất $\leq \sqrt{n} - 1$. Kí hiệu d^* như trong phần i) ta có

$$d^* \leq \sqrt{n} - 1 \Rightarrow d^* \leq \left[\sqrt{n} - 1\right].$$

Lập luận như trên ta có số các số thứ nhất $\leq [\sqrt{n} - 1] \leq \sqrt{n} - 1$.

Khi n là số chính phương, thì $\sigma(n)$ bằng hai lần số các số thứ nhất cộng thêm 1. Vì thế suy ra

$$\sigma(n) < 2(\sqrt{n} - 1) + 1 \Rightarrow \sigma(n) < 2\sqrt{n} - 1 < 2\sqrt{n} \Rightarrow \sigma^2(n) < 4n.$$

Tóm lại ta luôn chứng minh được rằng với $i = 1, 2, \ldots$ thì $\sigma^2(n) < 4n$.

Bài toán 2.14. Cho $n > 2$. Chứng minh rằng $\sigma(n) < n\sqrt{n}$.

Lời giải. Kí hiệu $\sigma(n)$ là tổng tất cả các ước số tự nhiên của n (kể cả 1 và n). Xét hai trường hợp sau:

i) Nếu $n = 2^\alpha$. Do $n > 2$ nên α là số nguyên ≥ 2. Rõ ràng lúc này

$$\sigma(n) = \sigma(2^\alpha) = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^\alpha = \frac{2^{\alpha+1} - 1}{2 - 1} = 2^{\alpha+1} - 1.$$

Vì $\alpha \leq 2$ nên ta có

$$\sigma(n) = 2^{\alpha+1} - 1 < 2^{\alpha+1} \leq 2^{\alpha + \frac{\alpha}{2}} = 2^\alpha . 2^{\frac{\alpha}{2}} = n\sqrt{n}.$$

Vậy bất đẳng thức đã cho khi $n > 2$ và n có dạng $n = 2^\alpha$ là đúng.

ii) Nếu n không có dạng 2^α (tức là n không phải lũy thừa của 2). Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp trường hợp này.

Do $n > 2$ nên số nhỏ nhất không có dạng 2^α là số 3. Lúc này

$$\sigma(3) = 1 + 3 = 4 < 3\sqrt{3}.$$

Vậy bất đẳng thức đúng khi $n = 3$.

Giả thiết $\sigma(k) < k\sqrt{k}$ đúng với mọi $k, 3 \leq k < n$ và k không có dạng 2^α. Ta sẽ chứng minh

$$\sigma(n) < n\sqrt{n}. \tag{2.15}$$

Vì n không chia hết cho 2 nên n có dạng $n = mp$, trong đó m là nguyên dương, còn p là số nguyên tố lẻ. Dễ thấy

$$1 + p < p\sqrt{p}. \tag{2.16}$$

Thật vậy, khi $p = 3$, thì $1 + 3 < 3\sqrt{3}$, còn khi $p \geq 5$ thì ta có

$$\frac{1+p}{p} = 1 + \frac{1}{p} \leq 1 + \frac{1}{5} < 2.$$

Mặt khác $\sqrt{p} \geq \sqrt{5} > 2 \Rightarrow \dfrac{1+p}{p} < \sqrt{p}$ hay $1 + p < p\sqrt{p}$.

Vậy (2.16) đúng.

Chỉ có các khả năng sau xảy ra:

i) Nếu $m = 1$ suy ra $n = p$, mà p là số nguyên tố nên $\sigma(n) = \sigma(p) = 1 + p$. Từ (2.15) suy ra trong trường hợp này ta có $\sigma(n) = 1 + p < p\sqrt{p} = n\sqrt{n}$.

Vậy (2.15) đúng trong trường hợp này.

ii) Nếu $m = 2$ suy ra $n = 2p$. Do p là số nguyên tố nên

$$\sigma(n) = \sigma(2p) = 1 + 2 + p + 2p = 3(1 + p).$$

Vì p là số nguyên tố lẻ nên $p \geq 3$. Ta có

$$3 + \frac{3}{p} \leq 3 + \frac{3}{3} \Rightarrow 3 + \frac{3}{p} \leq 4.$$

Lại có $2\sqrt{2}.\sqrt{p} \geq 2\sqrt{6} > 4$. Vì thế

$$3 + \frac{3}{p} < 2\sqrt{2}\sqrt{p} \Rightarrow 3(1+p) < 2\sqrt{2}.p\sqrt{p} = 2p\sqrt{2p} = n\sqrt{n} \Rightarrow \sigma(n) < n\sqrt{n}.$$

Vậy (2.15) đúng trong trường hợp này.

iii) Nếu $m \geq 3$. Do m không có dạng 2^α nên $m \geq 3$ vì $m < n$. Theo giả thiết quy nạp ta có

$$\sigma(m) < m\sqrt{(m)}.$$

Ta thấy rằng các ước số của $n = mp$ chỉ có dạng d hoặc pd với d là ước số của m. Vì thế

$$\sigma(n) = \sigma(m) + p\sigma(m) = (p+1)\sigma(m) \Rightarrow \sigma(n) < (p+1)m\sqrt{m}.$$

Lại áp dụng (2.16) ta có

$$\sigma(n) < p\sqrt{(p)}.m\sqrt{(m)} = mp\sqrt{mp} = n\sqrt{n}.$$

Vậy (2.15) cũng đúng trong trường hợp này.

Tóm lại, khi n không có dạng 2^α ta cũng luôn có $\sigma(n) < n\sqrt{(n)}$. Vì thế bất đẳng thức $\sigma(n) < n\sqrt{(n)}$ được chứng minh hoàn toàn.

Bài toán 2.15. Cho A là số tự nhiên. Kí hiệu $S(A)$ là tổng các chữ số của A khi A viết dưới dạng thập phân.

a) Giả sử $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là các số tự nhiên. Chứng minh rằng

$$S(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) \leq S(A_1) + S(A_2) + \ldots + S(A_n).$$

b) Giả sử A, B là các cặp số tự nhiên. Chứng minh $S(AB) \leq S(A).S(B)$.

c) Cho N là số tự nhiên bất kì. Chứng minh rằng $\dfrac{S(8N)}{S(N)} \geq \dfrac{1}{8}$.

Lời giải.

a) Ta chứng minh bất đẳng thức đã cho bằng quy nạp.

Với $n = 2$, ta phải chứng minh $S(A_1 + A_2) \leq S(A_1) + S(A_2)$.

Giả sử $A_1 = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_2 a_1}, A_2 = \overline{b_k b_{k-1} \ldots b_2 b_1}$. Chú ý rằng:

$$a_1 + b_1 = \begin{cases} a_1 + b_1 \text{ nếu } a_1 + b_1 \leq 9 \\ \overline{1\alpha} \text{ nếu } a_1 + b_1 > 10. \end{cases}$$

ở đây $\alpha = a_1 + b_1 - 10$, do vậy: $a_1 + b_1 \geq S(a_1 + b_1)$.

Lập luận liên tiếp như vậy sẽ dẫn đến $S(A_1 + A_2) \leq S(A_1) + S(A_2)$.

Giả sử bất đẳng thức đã cho đúng đến $n = k$, tức là

$$S(A_1 + A_2 + \ldots + A_{k-1}) \leq S(A_1) + S(A_2) + \ldots + S(A_{k-1}). \tag{2.17}$$

Xét bất đẳng thức với $n = k$, ta có

$$S(A_1 + A_2 + \ldots + A_k) = S\left[(A_1 + A_{k-1}) + A_k\right] \leq S(A_1 + A_{k-1}) + S(A_k).$$

Theo giả thiết quy nạp, suy ra

$$S(A_1 + A_2 + \ldots + A_k) \leq S(A_1) + S(A_2) + \ldots + S(A_{k-1}) + S(A_k).$$

Vậy bất đẳng thức cũng đúng đến $n = k$.

Theo nguyên lí quy nạp bất đẳng thức đã cho đúng với mọi n. Dấu " = " xảy ra khi phép cộng $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ là phép cộng không nhớ.

Chú ý rằng nói riêng lấy $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, ta có với mọi A và n là số tự nhiên, và ta có bất đẳng thức sau: $S(nA) \leq nS(A)$.

b) Giả sử $B = \overline{b_1 b_2 \ldots b_k} \Rightarrow B = b_k + 10b_{k-1} + 10^2 b_{k-2} + \ldots + 10^{k-1} b_1$.

Trước hết ta có nhận xét sau: Nếu N là số tự nhiên sao cho $N = \overline{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_q}$, thì

$$10^p N = \alpha_1 + \alpha_2 \ldots \alpha_p \underbrace{0 \ldots 0}_{p \text{ số } 0}, \forall p \text{ là số tự nhiên}.$$

Suy ra $S(N) = S(10^p N)$ (vì cùng bằng $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_q$).

Ta có $AB = Ab_k + 10Ab_{k-1} + 10^2 Ab_{k-2} + \ldots + 10^{k-1} Ab_1$.

Theo câu a)

$$S(AB) = S(Ab_k + 10Ab_{k-1} + \ldots + 10^{k-1} Ab_1) \leq S(Ab_k) + S(10Ab_{k-1}) + \ldots + S(10^{k-1} Ab_1). \tag{2.18}$$

Áp dụng hệ quả của câu a), thì từ (2.18) ta có

$$S(AB) \leq b_k S(A) + b_{k-1} S(10A) + \ldots + b_1 S(10^{k-1}A). \tag{2.19}$$

Từ (2.19), ta có

$$S(AB) \leq b_k S(A) + b_{k-1} S(A) + \ldots + b_1 S(A) = S(A)(b_1 + b_2 + \ldots + b_k).$$

Vậy nên $S(AB) \leq S(A).S(B)$.

c) Theo nhận xét trên, ta có

$$S(N) = S(1000N) = S(125.8N).$$

Theo câu b) suy ra

$$S(N) \leq S(125).S(8N).$$

Do $S(125) = 8 \Rightarrow S(N) \leq 8S(8N)$ hay $\dfrac{S(8N)}{S(N)} \geq \dfrac{1}{8}$.

Bài toán 2.16. Cho số tự nhiên $n > 1$. Kí hiệu $\nu(n)$ là các ước số nguyên tố của n.

a) Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số n có dạng $n = 2^k$ sao cho ta có bất đẳng thức $\nu(n) < \nu(n+1)$.

b) Chứng minh rằng tồn tại vô hạn sô tự nhiên n sao cho ta có $\nu(n) < \nu(n+1) < \nu(n+2)$.

Lời giải. Giả sử có một số $n_0 = 2^{k_0}$ sao cho ta có bất đẳng thức ngược lại

$$\nu(n_0) \geq \nu(n_0 + 1). \tag{2.20}$$

Rõ ràng $\nu(n_0) = \nu(2^{k_0}) = 1$ (vì 2^{k_0} chỉ có ước nguyên tố duy nhất là 2). Còn $\nu(n_0 + 1) = \nu(2^{k_0} + 1) \geq 1$ (vì $2^{k_0} + 1$ bao giờ cũng có ít nhất một ước nguyên tố).

Từ (2.20) suy ra

$$1 = \nu(n_0) \geq \nu(n_0 + 1) \geq 1 \Rightarrow \nu(2^{k_0} + 1) = 1. \tag{2.21}$$

Như vậy từ (2.21) suy ra

$$2^{k_0} + 1 = p^m, \text{ với } m \in \mathbb{N} \text{ và } p \text{ là số nguyên tố}. \tag{2.22}$$

Có hai khả năng xảy ra:

i) Nếu $m = 2l$ (m là số chẵn), thì từ (2.22) ta có

$$2^{k_0} = p^{2l} - 1 = (p^l - 1)(p^l + 1),$$

suy ra $p^l - 1$ và $p^l + 1$ đều là lũy thừa của 2. Điều này chỉ có thể xảy ra khi

$$\begin{cases} p^l + 1 = 4 \\ p^l - 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 3 \\ l = 1 \end{cases}$$

do đó $k_0 = 3$.

ii) Nếu $m = 2l + 1$ (m là số lẻ) $\Rightarrow m = 1$. Thật vậy, nếu $m > 1$ thì từ (2.22) ta có

$$2^{k_0} = p^m - 1 = (p-1)(\underbrace{p^{m-1} + p^{m-2} + \ldots + p + 1}_{m \text{ số}})$$

suy ra $p^{m-1} + p^{m-2} + \ldots + p + 1$ là lũy thừa của 2.

Do p là số nguyên tố nên nếu p lẻ thì $p^{m-1} + p^{m-2} + \ldots + p$ là tổng của $m - 1$ số lẻ; do m lẻ nên $p^{m-1} + p^{m-2} + \ldots + p$ chẵn, suy ra $p^{m-1} + p^{m-2} + \ldots + p + 1$ lẻ, suy ra vô lí.

Nếu $p = 2$ thì $p^{m-1} + p^{m-2} + \ldots + p + 1$ lẻ, vậy cũng suy ra vô lí. Do đó không thể có $m > 1$, suy ra $m = 1$. Vậy từ (2.22) Ta có

$$2^{k_0} + 1 = p. \tag{2.23}$$

Từ (2.23) suy ra $k_0 = 2^{q_0}$ với q_0 nguyên dương. Thật vậy, nếu trái lại thì $k_0 = 2^{q_0 r}$ với $r > 1$ là số lẻ nên là số nguyên tố.

$$p = 2^{k_0} + 1 = 2^{2^{q_0 r}} + 1 = 0(\pmod{2^{2^{q_0}}} + 1) \Rightarrow p \vdots 2^{2^{k_0}} + 1 < p.$$

Điều này trái với giả thiết p là số nguyên tố.

Như vậy nếu $\nu(n_0) = \nu(n_0 + 1)$ với $n_0 = 2^{k_0}$ thì k_0 hoặc bằng 3 hoặc $k_0 = 2^{q_0}$ với q_0 nguyên dương. Điều đó có nghĩa là $\forall k \neq 3$, $k \neq$ lũy thừa của 2 (và những số k như vậy là vô hạn) ta luôn có bất đẳng thức

$$\nu(n) < \nu(n + 1).$$

b) Giả thiết phản chứng số các số tự nhiên n thỏa mãn bất đẳng thức kép $\nu(n) < \nu(n + 1) < \nu(n + 2)$ chỉ là hữu hạn.

Xét hai tập hợp:

$$K_1 = \{k \in \mathbb{N} : \nu(2^k) < \nu(2^k + 1)\};$$
$$K_2 = \{k \in \mathbb{N} : \nu(2^k + 1) < \nu(2^k + 2)\}.$$

Ta có tập $K_1 \cap K_2$ chỉ có hữu hạn phần tử. Do đó tồn tại số q_0 đủ lớn sao cho ứng với số $k_0 = 2^{q_0}$ (dĩ nhiên > 5) thì nếu xét các số $k = k_0 + 1, k_0 + 2, \ldots 2k_0 - 1 = 2^{q_0+1} - 1 < 2^{q_0+1}$ (các số này đều không phải là lũy thừa của 2 và $\neq 3$, nên chúng đều thuộc K_1). Chú ý đến các q_0 chọn đủ lớn nên các số này thuộc K_2 (vì $K_1 \cap K_2$ có hữu hạn phần tử), tức là ta có

$$\nu(2^k + 1) \geq \nu(2^k + 2) \forall k = k_0 + 1, k_0 + 2, \ldots, 2k_0 - 1.$$

Chú ý là

$$\nu(2^k + 2) = \nu\left[2\left(2^{k-1} + 1\right)\right] = 1 + \nu(2^{k-1} + 1)$$

nên

$$\nu(2^k + 1) \geq 1 + \nu(2^{k-1} + 1) \forall k = k_0 + 1, k_0 + 2, \ldots, 2k_0 - 1.$$

Suy ra

$$\nu(2^{2k_0-1} + 1) \geq 1 + \nu(2^{2k_0-2} + 1) \geq \ldots \geq (k_0 - 1) + \nu(2_0^k + 1) \geq k_0$$

(do $\nu(2_0^k + 1) \geq 1$).

Kí hiệu $p_1 < p_2 < p_3 \ldots$ là dãy tất cả các số nguyên tố. Bất đẳng thức $\nu(2^{2k_0-1} + 1) \geq k_0$ có nghĩa là số các ước nguyên tố của $2^{2k_0-1} + 1$ không ít hơn k_0. Vì thế theo nguyên tắc biểu diễn một số ra thừa số nguyên tố Ta có

$$2^{2k_0-1} + 1 \geq p_1 p_2 \ldots p_{k_0} = (2.3.4.7.11)(p_6 \ldots p_{k_0}) > 4^5.4^{k_0-5}.$$

Suy ra

$$2^{2k_0-1} + 1 > 2^{2k_0} > 2^{2k_0-1} + 1.$$

Nhưng $2^{2k_0-1} + 1 > 2^{2k_0-1} + 1$ là vô lý. Suy ra giả thiết phản chứng sai. Vậy số các số tự nhiên n thỏa mãn bất đẳng thức kép $\nu(n) < \nu(n+1) < \nu(n+2)$ là vô hạn.

Bài toán 2.17. Cho số tự nhiên $k \geq 1$. Kí hiệu $g(k)$ là ước số lẻ lớn nhất của k. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$, ta có

$$0 < \sum_{k=1}^{n} \frac{g(k)}{k} - \frac{2n}{3} < \frac{2}{3}.$$

Lời giải. Theo định nghĩa $g(k)$ ta có

$$k = 2^{m(k)}.g(k) \Rightarrow \frac{g(k)}{k} = \frac{1}{2^{m(k)}}.$$

Vậy

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{g(k)}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{m(k)}}. \tag{2.24}$$

Chú ý rằng với mọi số tự nhiên n, thì giữa $1, 2, \ldots, n$ có đúng $\frac{n}{2}$ số chẵn. $\frac{n}{2^2}$ số là bội của 4, $\frac{n}{2^3}$ số là bội của 8,... và tổng quát có $\frac{n}{2^m}$ là số bội của 2^m.

Rõ ràng với mọi n thì luôn tồn tại số tự nhiên M sao cho

$$\left[\frac{n}{2^M}\right] = \left[\frac{n}{2^{M+1}} = \ldots = 0.\right] \tag{2.25}$$

Từ các lập luận trên suy ra số $k(1, 2, \ldots, n)$ để $m(k)$ nhận giá trị m bằng

$$\left[\frac{n}{2^m}\right] - \left[\frac{n}{2^{m+1}}.\right] \tag{2.26}$$

Từ (2.24),(2.25) và (2.26) ta có

$$S = \sum_{m=0}^{M} \frac{1}{2^m}\left(\left[\frac{n}{2^m}\right] - \left[\frac{n}{2^{m+1}}\right]\right) = \sum_{m=0}^{M} \frac{1}{2^m}\left[\frac{n}{2^m}\right] - \sum_{m=0}^{M} \frac{1}{2^{m+1}}\left[\frac{n}{2^m}\right] (\text{ do } \left[\frac{n}{2^{M+1}}\right] = 0)$$

Suy ra

$$S = \left[\frac{n}{2^0}\right] + \sum_{m=1}^{M}\left(\frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^{m-1}}\right)\left[\frac{n}{2^m}\right] = n - \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{2^m}\left[\frac{n}{2^m}\right]. \tag{2.27}$$

Rõ ràng với mọi α ta luôn có $[\alpha] \leq \alpha$, vậy từ (2.27) suy ra

$$S \geq n - \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{2^m}\frac{n}{2^m} = n - n.\sum_{m=1}^{M} \frac{1}{4^m}.$$

Chú ý rằng:

$$\sum_{m=1}^{M} \frac{1}{4^m} = \frac{1 - \frac{1}{4^M}}{3} \Rightarrow S \geq n - \frac{n}{3}\left(1 - \frac{1}{4^M}\right) = \frac{2}{3}n + \frac{n}{3.4^M} > \frac{2}{3}n$$

$$\Rightarrow S - \frac{2}{3}n > 0$$
$$\Rightarrow 0 < \sum_{k=1}^{n} \frac{g(k)}{k} - \frac{2n}{3}.$$

tức là phần bên trái của bất đẳng thức kép đã được chứng minh.

Bây giờ ta chứng minh phần bên phải của bất đẳng thức kép đã cho. Trước hết ta có nhận xét sau đây: $\forall p, q \in \mathbb{N}$, thì

$$\left[\frac{p}{q}\right] = \frac{p+1}{q} - 1. \tag{2.28}$$

Thật vậy, đặt $\left[\frac{p}{q}\right] = r$, nhưng do $p, q \in \mathbb{N}$ nên $p = rq + s$ với $s = 0, 1, \ldots, q-1$. Suy ra

$$\left[\frac{p}{q}\right] = r = \frac{p-s}{q} \geq \frac{p-(q-1)}{q} = \frac{p+1}{q} - 1.$$

Vậy (2.28) đúng.

Áp dụng (2.28) suy ra

$$S = n - \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{2^m}\left[\frac{n}{2^m}\right] n - \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{2^m}\left(\frac{n+1}{2^m} - 1\right). \tag{2.29}$$

Ta có

$$\begin{aligned} n - \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{2^m}\left(\frac{n+1}{2^m} - 1\right) &= n - (n+1)\sum_{m=1}^{M} \frac{1}{4^m} + \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{2^m} \\ &= n - \frac{n+1}{3}\left(1 - \frac{2}{4^M}\right) + \left(1 + \frac{1}{2^M}\right) \\ &= \frac{2}{3^n} + \frac{2}{3} + \frac{n+1}{3.4^M} - \frac{1}{2^M}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Thay (2.30) vào (2.29) ta được

$$S \leq \frac{2}{3^n} + \frac{2}{3} + \frac{n+1}{3.4^M} - \frac{1}{2^M}. \tag{2.31}$$

Theo cách xác định số M, ta có $2^M > n$. Rõ ràng $n > \frac{n+1}{3}$ (do $n \in \mathbb{N}$) suy ra $\frac{n+1}{3.4^M} < \frac{1}{2^M}$. Vậy từ (2.31) ta có $S < \frac{2}{3^n} + \frac{2}{3}$.

Bài toán 2.18. Nếu n và k là các số nguyên dương thì đặt $T_n(k) = k^{k^{k^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{k}}}}}}$ (lũy thừa n tầng của k). Biết rằng $T_n(3) > T_{1997}(2)$. Chứng minh rằng $n \geq 1996$.

Lời giải. Trước hết ta chứng minh bổ đề sau đây.

Bổ đề: Ta có

$$T_{n+1}(3) > T_{n+2}(2) > 4T_n(3) \tag{2.32}$$

Chứng minh bổ đề: Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp

- Với $n = 1$, thì

$$\begin{aligned} T_{n+1}(3) > T_{n+2}(2) > 4T_n(3) &\Leftrightarrow T_2(3) > T_3(2) > 4T_1(3) \\ &\Leftrightarrow 3^3 > 2^{2^2} > 4.3 \\ &\Leftrightarrow 27 > 16 > 12. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Vì (2.33) đúng, vậy (*) đúng khi $n = 1$.

- Giả sử bất đẳng thức (*) đúng đến $n = k$, tức là có

$$T_{k+1}(3) > T_{k+2}(2) > 4T_k(3) \tag{2.34}$$

-Xét khi $n = k + 1$. Ta có

$$T_{(k+1)+1} = T_{k+2}(3) = 3^{T_{k+1}(3)}. \tag{2.35}$$

Theo (2.34) suy ra

$$T_{k+2}(3) > 3^{T_{k+2}(2)} > 2^{T_{k+2}(2)} = T_{k+3}(2).$$

Lại có $T_{k+3}(2) = 2^{T_{k+2}(2)}$ và theo giả thiết quy nạp (2.34) suy ra

$$T_{k+3}(2) > 2^{4T_k(3)} = 2^{2T_k(3)}.4^{T_k(3)}.$$

Rõ ràng $T_k(3) \geq 3, \forall k$, còn $4^{T_k(3)} = T_{k+1}(3)$, vậy từ trên suy ra

$$T_{k+3}(2) > 2^6 T_{k+1}(3) > 4T_{k+1}(3). \tag{2.36}$$

Từ (2.35), (2.36) suy ra

$$T_{k+2}(3) > T_{k+3}(2) > 4T_{k+1}(3).$$

Vậy (*) cũng đúng khi $n = k + 1$.

Theo nguyên lý quy nạp suy ra (*) đúng $\forall n$.

Từ bổ đề nói riêng suy ra

$$T_{n+1}(3) > T_{n+2}(2) > T_n(3). \tag{2.37}$$

Áp dụng (2.37) với $n \leq 1995$, ta có

$$T_{1997}(2) > T_{1995}(3) > T_{1994}(3) > \ldots > T_1(3).$$

Dãy bất đẳng thức trên chứng tỏ rằng từ $T_n(3) > T_{1997}(2)$ thì suy ra $n \leq 1996$.

Chú ý: Dĩ nhiên lại dựa vào (2.37) ta có

$$T_{1997}(2) < T_{1996}(3) < T_{1997}(3) < T_{1997}(3) < \ldots$$

Vì thế ta có thể khẳng định rằng

$$T_n(3) > T_{1997}(2) \Leftrightarrow n \leq 1996$$

.

Bài toán 2.19. Hàm số $f(x, y)$ xác định với mọi cặp số nguyên không âm (x, y) và thỏa mãn với mọi cặp số nguyên không âm (x, y):

a) $f(0, y) = y + 1$;

b) $f(x + 1, 0) = f(x, 1)$;

c) $f(x + 1, y + 1) = f(x, f(x + 1, y))$.

Cho k là số nguyên không âm sao cho

$$[f(4, 2000) - f(3, 2000)] \vdots 2^k.$$

Chứng minh rằng $k \leq 2003$.

Lời giải. Từ a), b), c) trực tiếp suy ra ngay

$$f(1, 0) = 2; f(2, 0) = 3; f(3, 0) = 5; f(4, 0) = 13. \tag{2.38}$$

Ta chứng minh rằng với mọi $n = 1, 2, \ldots$ thì

$$f(1, n) = n + 2; \tag{2.39}$$

$$f(2,n) = 2n + 3; \tag{2.40}$$

$$f(3,n) = 2n^{n+3} - 3. \tag{2.41}$$

Thật vậy, (2.39),(2.40),(2.41) đã đúng khi $n = 0$ (theo (*)).

Giả sử (2.39),(2.40),(2.41) đã đúng khi $n = k$ tức là

$$f(1,k) = k + 2; f(2,k) = 2k + 3; f(3,k) = 2k^{k+3} - 3. \tag{2.42}$$

Xét khi $n = k + 1$. Theo các tính chất a), c) và giả thiết quy nạp (2.42) Ta có

$$f(1,k+1) = f(0,f(1,k)) = f(1,k) + 1 = (k+2) + 1 = k + 3 = (k+1) + 2.$$

Vậy (2.39) đúng khi $n = k + 1$, do đó theo nguyên lý quy nạp thì (2.39) đúng $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ta có $f(2,k+1) = f(1,f(2,k))$. Vì (2.39) đã đúng $\forall n \in \mathbb{N}$, nên có

$$f(2,k+1) = f(2,k) + 2.$$

Theo giả thiết quy nạp có

$$f(2,k+1) = 2k + 3 + 2 = 2(k+1) + 3.$$

Vậy (2.40) đúng khi $n = k + 1$. Theo nguyên lí quy nạp thì (2.40) đúng $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ta lại có $f(3,k+1) = f(2,f(3,k))$. Vì (2.40) đã đúng $\forall n \in \mathbb{N}$ nên ta có

$$f(3,k+1) = 2f(3,k) + 3.$$

Theo gải thiết quy nạp thì

$$f(3,k+1) = 2(2^{k+3} - 3) + 3 = 2^{k+4} - 3.$$

Vậy (2.41) đúng khi $n = k + 1$. Theo nguyên lí quy nạp thì (2.41) đúng.

Do đó (2.39),(2.40),(2.41) đã được chứng minh.

Cũng bằng quy nạp tương tự, ta chứng minh được với mọi y nguyên không âm thì

$$f(4,y+1) > f(4,y). \tag{2.43}$$

Theo tính chất c) thì
$$f(4,2000) = f(3, f(4,1999)).$$
Theo (2.41) thì
$$f(3, f(4,1999)) = 2^{f(4,1999)+3} - 3.$$
Ta lại có
$$f(4,2000) = 2^{f(4,1999)+3} - 3. \quad (2.44)$$
Áp dụng liên tiếp (2.43) ta có
$$f(4,1999) > f(4,1998) > f(4,1997) > \ldots > f(4,0) = 13. \quad (2.45)$$
Vì $f(4,j)$ là các số nguyên dương ($j = \overline{0,1999}$), nên từ (2.45) suy ra
$$f(4,1999) > 2000. \quad (2.46)$$
Theo (2.44), (2.41) ta được
$$\begin{aligned} f(4,2000) - f(3,2000) &= (2^{f(4,1999)+3} - 3) - (2^{2003} - 3) \quad (2.47) \\ &= -2^{2003} + 2^{f(4,1999)+3} \\ &= 2^{2003}\left[2^{f(4,1999)-2000} - 1\right]. \end{aligned}$$
Từ (2.46) suy ra $2^{f(4,1999)-2000} - 1$ là số nguyên dương lẻ.Vì thế $f(4,2000) - f(3,2000)$ chia hết cho 2^{2003} nhưng không chia hết cho 2^l với $l > 2003$. Do vậy từ $f(4,2000) - f(3,2000)$ chia hết cho 2^k suy ra $k \leq 2003$.

Bài toán 2.20. Với mọi số nguyên dương n, kí hiệu $\sigma(n)$ là tổng tất cả các ước tự nhiên của n (kể cả 1 và n). Với mọi số thực dương$x$, kí hiệu
$$N_x = \{n : n \text{ nguyên dương }, n \leq x, \sigma(n) \geq 2n\}.$$
Đặt $T_x = |N_x|$, ở đây qua $|A|$ kí hiệu số phần tử của tập hợp A. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương, ta có bất đẳng thức sau:
$$T(x) < \frac{6x}{7}.$$

Lời giải.

-Nếu $[x] \leq 1$, ở đây $[x]$ chỉ phần nguyên của số x. Với mỗi $n \in N_x$ (tức là n nguyên dương, $n \geq x, \sigma(n) \leq 2n$), từ $\sigma(n) \leq 2n$, ta có

$$1 \leq \frac{\sigma(n)}{2n} = \frac{1}{2n} \sum_{d|n} d = \frac{1}{2} \sum_{d|n} \frac{d}{n}, \tag{2.48}$$

ở đây $\sum\limits_{d|n} d$ để chỉ tổng tất cả các ước tự nhiên d của n.

Chú ý rằng nếu d là ước của n, thì $\dfrac{n}{d}$ cũng là ước của n, vì thế

$$\sum_{d|n} \frac{d}{n} = \sum_{d|n} \frac{1}{n}.\frac{n}{d} = \sum_{d|n} \frac{1}{d}. \tag{2.49}$$

Từ (2.48) và (2.49), suy ra

$$1 \leq \frac{\sigma(n)}{2n} = \frac{1}{2n} \sum_{d|n} d = \frac{1}{2} \sum_{d|n} \frac{1}{d}. \tag{2.50}$$

Ta có

$$\begin{aligned} T(x) = \sum_{n\in N_x} 1 \leq \sum_{n\in N_x} \frac{1}{2} \sum_{d|n} \frac{1}{d} \leq \sum_{n=1}^{[x]} \frac{1}{2} \sum_{d|n} \frac{1}{d} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{[x]} \sum_{d|n} \frac{1}{d} \\ = \frac{1}{2} \sum_{d=1}^{[x]} \sum_{\substack{n\leq x \\ n \vdots d}} \frac{1}{d} = \frac{1}{2} \sum_{d=1}^{[x]} \frac{1}{d} \sum_{\substack{n\leq x \\ n \vdots d}} 1. \end{aligned}$$

(Ở đây ta dùng kí hiệu $\sum_{\substack{n\leq x \\ n \vdots d}} a$ để chỉ tổng cho mỗi số hạng đều bằng a và số hạn bằng số nguyên dương n thỏa mãn $n \leq x, n \vdots d$).

Hiển nhiên ta có $\sum\limits_{\substack{n\leq x \\ n \vdots d}} 1 = \left[\dfrac{x}{d}\right]$, và do đó

$$T(x) \leq \frac{1}{2} \sum_{d=1}^{[x]} \frac{1}{d} \left[\frac{x}{d}\right] \leq \frac{1}{2} \sum_{d=1}^{[x]} \frac{1}{d}.\frac{x}{d} = \frac{x}{2} \sum_{d=1}^{[x]} \frac{1}{d^2}.$$

Với $[x] \geq 4$, tTa có

$$\sum_{d=1}^{[x]} \frac{1}{d^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \sum_{d=4}^{[x]} \frac{1}{d^2} < \frac{49}{36} + \sum_{d=4}^{[x]} \frac{1}{[d(d-1)]} = \frac{49}{36} < \frac{49}{36} + \frac{1}{3} = \frac{61}{36}.$$

Suy ra với $[x] \geq 4$ ta được:

$$T(x) < \frac{x}{2}.\frac{61}{36} = \frac{61x}{72} < \frac{6x}{7}.$$

Với $[x] = 0, [x] = 1, [x] = 2, [x] = 3$, ta đều có $N_x = \emptyset$ (vì $\sigma(1) = 1 < 2.1, \sigma(2) = 1 + 2 < 2.2, \sigma(3) = 1 + 3 < 2.3)$ và do đó

$$T_x = 0 < \frac{6}{7}x.$$

Vì $\forall x \in \mathbb{R}^+$ ta luôn có $T_x < \dfrac{6x}{7}$.

Bài toán 2.21. Với số tự nhiên $k > 1$ cho trước, kí hiệu $Q(n)$ là BCNN của các số $n, n+1, \ldots, n+k$. Chứng minh rằng với mọi số n có dạng $n = r.k! - 1$, với $r \in \mathbb{N}, n \leq 3$ thì ta luôn có bất đẳng thức

$$Q(n) > Q(n+1).$$

Lời giải. Kí hiệu $m = [n+1, n+2, \ldots, n+k]$, (ở đây $[\alpha, \beta, \ldots, \gamma]$ để chỉ BCNN của các số $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$). Với $j = 1, 2, \ldots, k$ hiển nhiên, ta có $n \equiv -1(\pmod j))$ (do $n = r.k! - 1$, mà $r.k! \vdots j, \forall j = 1, 2, \ldots, k$) suy ra $(n, j) = 1$ và $(n, n+j) = 1$.

Vì $(n, n+j) = 1, \forall j = 1, 2, \ldots, k$ và $m = [n+1, n+2, \ldots, n+k]$ nên ta có $(m, n) = 1$ suy ra

$$Q(n) = [n, n+1, n+2, \ldots, n+k] = [n, m] = nm.$$

Ta lại có $n+k+1 = r.k! + k \vdots k$. Do $m \vdots (n+1) \Rightarrow m \vdots (r.k!) \Rightarrow m \vdots k$ nên số $\dfrac{m(n+k+1)}{k}$ vừa chia hết cho k, vừa chia hết cho $n+k+1$.

Ta có $Q(n+1) = [n+1, n+2, \ldots, n+k, n+k+1] = [m, n+k+1]$ (vì m là BCNN của $n+1, n+2, \ldots, +k$).

Do nhận xét trên suy ra $[m, n+k+1] \leq \dfrac{m(n+k+1)}{k}$, như thế ta đi đến bất đẳng thức

$$Q(n+1) \leq \frac{m(n+k+1)}{k} \tag{2.51}$$

Do $k \geq 2, r \geq 3$, nên từ (2.51) ta có

$$Q(n+1) \leq \frac{m(n+k+1)}{2} = \frac{mn}{2}\left(1 + \frac{k+1}{n}\right) \leq \frac{mn}{2}\left(1 + \frac{k+1}{3(k-1)}\right)$$

Suy ra

$$Q(n+1) \leq \frac{mn}{2}.2 = mn = Q(n) \Rightarrow Q(n+1) < Q(n).$$

Bài toán 2.22. Với mọi số nguyên $k \geq 1$, gọi $h(k) \geq 1$ là số nguyên nhỏ nhất sao cho với mọi các chia tập hợp $\{1, 2, \dots, h(k)\}$ thành k tập hợp con, đều tồn tại các số nguyên $a \geq 0, y \geq x \geq 1$ sao cho $a + x, a + y, a + x + y$ đều thuộc cùng một tập hợp con. Chứng minh rằng $h(k) = 2k$.

Lời giải. Xét hai trường hợp:

a) Giả sử tồn tại các số nguyên $a \geq 0, y \geq x \geq 1$ sao cho $a + x, a + y, a + x + y$ đều thuộc cùng một tập hợp con N_i nào đó, ở đây $1 \leq i \leq k - 1$.

Do $N_i = \{i, i + k\}$ nên Ta có

$$\begin{cases} a + x = a + y = i \\ a + x + y = i + k. \end{cases}$$

Từ đó suy ra $x = y = k \Rightarrow a = i - k \Rightarrow a \leq (k - 1) - k \Rightarrow a < 0$. Điều đó vô lí, vậy không thể xảy ra trường hợp a).

b) Giả sử tồn tại các số nguyên $a \geq 0, y \geq x \geq 1$ sao cho $a + x, a + y, a + x + y$ đều thuộc cùng một tập hợp con N_k. Do $N_k = \{k\}$ nên ta có

$$a + x = a + y = a + x + y. \tag{2.52}$$

Do $a \geq 0, y \geq x \geq 1$ nên (*) không thể có. Vậy trường hợp b) cũng không thể xảy ra.

Như vậy với tập hợp $N = \{1, 2, 3, \dots, 2k-1\}$ thì tồn tại một cách chia N thành k tập hợp con mà không thỏa mãn tính chất đã nêu trong đầu bài.Dĩ nhiên nếu $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, j\}, \forall j \leq 2k - 1$ thì tình hình cũng tương tự như đối với tập hợp N. Theo định nghĩa số $h(k)$ thì

$$h(k) > 2k - 1. \tag{2.53}$$

Vì $h(k)$ là số nguyên nhỏ nhất thỏa mãn (2.53) nên ta có

$$h(k) = 2k.$$

Bài toán 2.23. Cho n là số tự nhiên ≥ 1. Gọi $f(n)$ là số tất cả các cách biểu diễn n thành tổng những lũy thừa của 2 với số mũ nguyên không âm. Hai cách biểu diễn chỉ khác nhau bởi thứ tự các số hạng được xem là như nhau (và chỉ tính là một trong $f(n)$). Chứng minh

a) $f(n) \leq f(n+1)$;

b) $f(2n) \leq nf(n)$;

c) $f(4n) \geq 2nf(n)$;

d) $2^{\frac{n^2}{4}} < f(2^n) < 2^{\frac{n^2}{2}}\ \forall n \geq 3$.

Lời giải. a) Chú ý rằng $1 = 2^0$, vì vậy nếu cộng 1 vào mỗi cách biểu diễn của n. ta được một cách biểu diễn của $n+1$, do đó $f(n) \leq f(n+1)$, suy ra điều phải chứng minh.

b) Theo câu a) suy ra

$$f(2n+1) \geq f(2n). \tag{2.54}$$

Xét một cách biểu diễn bất kì của số $2n+1$. Vì $2n+1$ lẻ nên trong cách biểu diễn này số hạng 1 phải xuất hiện một số lẻ lần (chú ý 2^k với $k \geq 1$ là một số chẵn). Nếu bỏ số hạng 1, ta có cách biểu diễn của số $2n$. Như vậy ứng với mỗi cách biểu diễn bất kì của số $2n+1$, thì có 1 cách biểu diễn của số $2n$. Nói cách khác $f(2n+1) \leq f(2n)$. Kết hợp với (2.54) ta có

$$f(2n+1) = f(2n).$$

Từ đó bằng cách lập luận tương tự có thể suy ra ngay các lập luận sau:

i) $f(2n+1) = f(2n) = f(2n-1) + f(n) = f(2n-2) + f(n), \forall n \geq 2$.

ii) $f(2n) = 2 + f(2) + f(3) + f(4) + \ldots + f(n), \forall n \geq 2$.

Bây giờ ta chứng minh bất đẳng thức ở câu b) này.

Theo ii) ta có

$$f(2n) = 2 + f(2) + f(3) + f(4) + \ldots + f(n). \tag{2.55}$$

Theo kết quả của câu a) thì

$$2 = f(2) \leq f(n);$$

$$f(3) \leq f(n);$$

$$\dots$$

$$f(n-1) \leq f(n).$$

Kết hợp với (2.55) suy ra với mọi $n \geq 2$, thì $f(2n) \leq nf(n)$. Đó là đpcm. Dễ thấy dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $n = 2$ hoặc $n = 3$.

c) Xét bất đẳng thức $f(4n) \geq 2nf(n) \forall n \geq 2$. Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức này như sau

Khi $n = 2$, ta có $f(4n) = f(8)$. Dựa vào i) ta có

$$\begin{aligned}
&f(1) = 1;\\
&f(3) = f(2) = 2;\\
&f(5) = f(4) = 2 + f(2) = 4;\\
&f(7) = f(6) = f(4) + f(3) = 6;\\
&f(9) = f(8) = f(6) + f(4) = 10.
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra khi $n = 2$ thì $f(4n) = 10$. Lại có $2nf(n) = 4f(2) = 8$. Vì $10 > 8$ nên bất đẳng thức cần chứng minh đúng với $n = 2$.

Bây giờ xét khi $n \geq 3$ ta có nhận xét sau đây

Với mọi $0 \leq k \leq n - 2$, thì

$$f(n-k) + f(n+k+1) \leq f(n-k-1) + f(n+k+2). \tag{2.56}$$

Chứng minh (2.56) như sau: Xét hai trường hợp sau đây.

i) Nếu $n - k = 2a + 1$ với $a \geq 1$. Khi đó từ i) ta có

$$f(n-k) = f(2a+1) = f(2a) = f(n-k-1), \tag{2.57}$$

$$f(n+k+1) = f(2n+2k+2) = f(2a+2k+3) = f(n+k+2) \tag{2.58}$$

Từ (2.57) và (2.58) suy ra (2.56) đúng và có dấu bằng xảy ra.

ii) Nếu $n - k = 2a$ với $a \geq 1$. Lại theo câu b) ta có

$$\begin{aligned}
f(n+k+2) - f(n+k+1) &= f(2a+2k+2) - f(2a+2k+1) \qquad (2.59)\\
&= f(2a+2k+2) - f(2a+2k)\\
&= f(2a) - f(2a-1);
\end{aligned}$$

$$f(n-k) - f(n-k-1) = f(2a) - f(2a-1). \tag{2.60}$$

Lại thấy

$$f(2a) - f(2a-1) = \begin{cases} f(a) \text{ với } a \geq 2 \\ f(2) - f(1) \text{ với } a = 1. \end{cases}$$

Để ý rằng $f(2) - f(1) = 2 - 1 = 1 = f(1) = f(a)$ (khi $a = 1$). Như thế với mọi $a \geq 1$ thì $f(2a) - f(2a-1) = f(a)$. Do đó từ (refeq18.9) suy ra

$$f(n-k) - f(n-k-1) = f(a) \forall a \geq 1. \tag{2.61}$$

Áp dụng câu a) ta có

$$f(a+k+1) \geq f(a).$$

Vì thế từ (2.59) và (2.61) ta có

$$f(n+k+2) - f(n+k+1) \geq f(n-k) - f(n-k-1),$$

suy ra

$$f(n+k+2) + f(n-k-1) \geq f(n-k) + f(n+k+1).$$

Vậy (2.56). Nhận xét được chứng minh.

Trong (2.56) lần lượt thay k từ 0 đến $n-2$ ta có

$$2f(n) \leq f(n) + f(n+1) \leq f(n-1) + f(n+2) \leq f(n-2) + f(n+3) \leq \ldots \tag{2.62}$$
$$\ldots \leq f(1) + f(2n).$$

Mặt khác theo (2.55) ta có

$$\begin{aligned} f(4n) &= 2 + f(2) + f(3) + \ldots + f(2n-1) + f(2n) \\ &= 2 + f(2n) + \sum_{k=0}^{n-2} \left[f(n-k) + f(n+k+1) \right]. \end{aligned}$$

Để ý rằng

$$\sum_{k=0}^{n-2} \left[f(n-k) + f(n+k+1) \right] \geq 2(n-1)f(n).$$

Từ đó suy ra

$$f(4n) \geq 2 + f(2n) + 2nf(n) - 2f(n). \tag{2.63}$$

Theo phần a) ta có

$$f(2n) \geq f(2n-1) \Rightarrow 2 + f(2n) \geq f(2) + f(2n-1)(\text{ do } 2 = f(2)) \tag{2.64}$$

Lại có

$$f(2) + f(2n-1) \geq 2f(n)(\text{ theo } (2.64)).$$

Vì vậy từ (2.63) và (2.64) đã đi đến bất đẳng thức

$$f(4n) \geq 2nf(n).$$

d) Xét bất đẳng thức

$$f(2^n) < 2^{\frac{n^2}{2}} \text{ với } n \geq 3. \tag{2.65}$$

Khi $n = 3$, ta có $f(2^3) = f(8) = 10$. Mặt khác, ta có

$$2^{\frac{9}{2}} > 10 \Rightarrow f(2^3) < 2^{\frac{3^2}{2}}.$$

Vậy bất đẳng thức (2.65) đã đúng khi $n = 3$.

Giả sử (2.65) đã đúng khi $n = k (k \geq 3)$, tức là ta có

$$f(2^k) < 2^{\frac{k^2}{2}}. \tag{2.66}$$

Xét khi $n = k + 1$. Áp dụng câu b) ta có

$$f(2^{k+1}) = f(2.2^k) \leq 2^k f(2^k). \tag{2.67}$$

Từ (2.66) và (2.67) suy ra

$$f(2^{k+1}) \leq 2^k . 2^{\frac{k^2}{2}} = 2 < 2.$$

Vậy (2.65) cũng đúng khi $n = k + 1$.

Theo nguyên lí quy nạp, suy ra (2.65) đúng với mọi $n \geq 3$.

Bây giờ xét bất đẳng thức

$$f(2^n) > 2^{\frac{n^2}{4}} \text{ với } n \geq 3. \tag{2.68}$$

Khi $n = 3$, ta có $f(2^3) = f(8) = 10$, còn $2^{\frac{9}{4}} = 4.2^{\frac{1}{4}} < 4\sqrt{2} < 10$. Vậy (2.68) đúng khi $n = 3$. Giả sử (2.68) đã đúng đến $n = k(k \geq 3)$, tức là

$$f(2^k) > 2^{\frac{k^2}{4}}. \tag{2.69}$$

Xét khi $n = k + 1$, ta có

$$f(2^{k+1}) = f(4.2^{k-1}).$$

Theo câu c) suy ra

$$f(4.2^{k-1}) \geq 2.2^{k-1} f(2^{k-1}) = 2^k f(2^{k-1}).$$

Từ đó theo giả thiết quy nạp (2.69) suy ra

$$f(4.2^{k-1}) > 2^k 2^{\frac{(k-1)^2}{4}} = 2^{\frac{4k+(k-1)^2}{4}} = 2^{\frac{(k+1)^2}{4}}.$$

Do vậy $f(2^{k+1}) > 2^{\frac{(k+1)^2}{4}}$. Vậy (2.68) cũng đúng khi $n = k + 1$.

Theo nguyên lý quy nạp suy ra $\forall n \geq 3$ có $f(2^n) > 2^{\frac{n^2}{4}}$. Bài toán được giải hoàn toàn.

Bài toán 2.24. Cho $k_1, k_2, \ldots, k_n$ là các số nguyên dương. Đặt

$$k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n.$$

Chứng minh bất đẳng thức sau

$$k_1!k_2!\ldots k_n! \geq \left(\left[\frac{k}{n}\right]!\right)^n,$$

ở dây $[\alpha]$ dùng để chỉ phần nguyên của số α.

Lời giải. Không giảm tổng quát, ta có thể giả sử $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_n$. Gọi p là số nguyên sao cho $k_p \geq \left[\frac{k}{n}\right]$, $k_{p+1} < \left[\frac{k}{n}\right]$. Chỉ có 3 khả năng xảy ra

i) Nếu $p = n$ thì

$$k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_n \geq \left[\frac{k}{n}\right] \Rightarrow k_1!k_2!\ldots k_n! \geq \left(\left[\frac{k}{n}\right]!\right)^n.$$

Vậy bất đẳng thức đã đúng trong trường hợp này.

ii) Nếu $p = 0$ thì

$$\left[\frac{k}{n}\right] > k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_n \Rightarrow k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n < n\left[\frac{k}{n}\right] \leq n.\frac{k}{n} = k \Rightarrow k < k.$$

Điều này vô lý này, chứng tỏ rằng $p > 0$.

iii) Nếu $0 < p < n$. Từ $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_p \geq \left[\frac{k}{n}\right]$, nên tồn tại các số nguyên $l_i \geq 0$, $\forall i = \overline{1,p}$, sao cho

$$k_i = \left[\frac{k}{n}\right] + l_i, \forall i = \overline{1,p}. \tag{2.70}$$

Tương tự cho $\left[\frac{k}{n}\right] > k_{p+1} \geq k_{p+2} \geq \ldots \geq k_n$, nên tồn tại các số nguyên $m_j > 0(m_j > 0, j = \overline{p+1,n})$ sao cho

$$k_j = \left[\frac{k}{n}\right] - m_j, j = \overline{p+1,n}. \tag{2.71}$$

Mặt khác, do $n\left[\frac{k}{n}\right] \leq n,\frac{k}{n} = k$, nên từ (2.70) và (2.71) ta có

$$n\left[\frac{k}{n}\right] = \sum_{i=1}^{p}(k_i - l_i) + \sum_{j=p+1}^{n}(k_j + m_j) \leq k \Rightarrow k = \sum_{i=1}^{p}k_i + \sum_{j=p+1}^{n}k_j - \sum_{i=1}^{p}l_i - \sum_{j=p+1}^{n}m_j \tag{2.72}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{p}l_i = \sum_{j=p+1}^{n}m_j.$$

Với mọi $i = \overline{1,p}$, theo (2.70) ta có

$$(k_i)! = \left(\left[\frac{k}{n}\right] + l_i\right)! = \left[\frac{k}{n}\right]!\left(\left[\frac{k}{n}\right] + 1\right)\left(\left[\frac{k}{n}\right] + 2\right)\ldots\left(\left[\frac{k}{n}\right] + l_i\right)$$

$$= \frac{\left[\frac{k}{n}\right]!}{\left(\left[\frac{k}{n}\right] - m_j + 1\right)\left(\left[\frac{k}{n}\right] - m_j + 2\right)\ldots\left(\left[\frac{k}{n}\right] - 1\right)\left[\frac{k}{n}\right]}.$$

Vậy $k_1!k_2!\ldots k_n! = \left(\left[\frac{k}{n}\right]!\right)^n.\frac{A}{B}$; trong đó A là tích gồm có $\sum_{i=1}^{p}l_i$ thừa số, mà mỗi thừa số đều $\leq \left[\frac{k}{n}\right]!$; còn B là tích gồm $\sum_{j=m+1}^{n}m_j$ thừa số, mà mỗi thừa số đều $\leq \left[\dfrac{k}{n}\right]$. Mà theo (2.72) suy ra $\dfrac{A}{B} \geq 1$. Do đó

$$k_1!k_2!\ldots k_n! \geq \left(\left[\frac{k}{n}\right]!\right)^n.$$

Chương 3.
Một số dạng toán liên quan

Chương này trình bày một số bài toán về cực trị và các đề thi học sinh giỏi quốc gia, Olympic khu vực và quốc tế liên quan đến bất đẳng thức số học.

3.1 Các dạng toán về bất đẳng thức số học qua các kỳ Olympic

Bài toán 3.1 (Cộng hòa Dân chủ Đức 1974).

a) Chứng minh rằng không tồn tại đa thức $P(x)$ để với mọi $x \in \mathbb{R}$ có các bất đẳng thức $(3.1) : P'(x) > P''(x)$ và $(3.2) : P(x) > P''(x)$.

b) Khẳng định trên còn đúng không nếu thay đổi bất đẳng thức (3.1) bằng bất đẳng thức $(3.3) : P(x) > P'(x)$?

Lời giải.

a) Nếu P(x) là hằng số thì $P'(x) = P''(x) = 0$, khi đó bất đẳng thức (3.1) không thỏa mãn. Giả sử bậc của P(x) bằng n với $n \geq 1$, khi đó

Nếu n lẻ thì $\deg(P(x) - P''(x)) = n$ là số lẻ, từ đó $P(x) - P''(x) \leq 0$ với ít nhất một điểm $x \in \mathbb{R}$.

Nếu n chẵn thì $\deg(P'(x) - P''(x)) = n - 1$ là số lẻ, từ đó $P'(x) - P''(x) \leq 0$ với ít nhất một điểm $x \in \mathbb{R}$.

Như vậy đối với đa thức P(x) không thỏa mãn hoặc bất đẳng thức (3.1) hoặc bất đẳng thức (3.2). Suy ra điều phải chứng minh.

b) Chọn đa thức $P(x) = x^2 + 3$ khi đó với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có

$P(x) - P'(x) \equiv x^2 - 2x + 3 > 0$ và $P(x) - P''(x) \equiv x^2 + 1 > 0$,

nghĩa là khẳng định trên không còn đúng nữa.

Bài toán 3.2 (VMO - 95)**.** Hãy xác định tất cả các đa thức P(x) thỏa mãn điều kiện sau:

Với mỗi số $a > 1995$ thì số nghiệm thực của phương trình $P(x) = a$ (mỗi nghiệm được tính với số bội của nó) bằng bậc của đa thức P(x), và mỗi nghiệm thực của phương trình trên đều lớn hơn 1995.

Lời giải. Do yêu cầu mỗi nghiệm thực của P(x) = a đều lớn hơn 1995 nên chỉ xét các đa thức P(x) có bậc $n \geq 1$.

- Xét đa thức P(x) bậc n là hàm đơn điệu trên $(-\infty; +\infty)$ thỏa mãn đề bài.

Vì đồ thị hàm P(x) chỉ có hữu hạn điểm uốn nên với a đủ lớn và $a > 1995$ thì $P(x) = a$ chỉ có tối đa một nghiệm (mỗi nghiệm được tính với số bội của nó), suy ra n = 1 và P(x) có dạng $bx + c$ với b > 0; nghiệm của P(x) là $x = \dfrac{a-c}{b}$. Ta có $x > 1995$ với mọi a > 1995 khi và chỉ khi $b > 0$ và $c \leq 1995(1-b)$.

- Xét đa thức P(x) có hàm số cực trị trên $(-\infty; +\infty)$ thỏa mãn đề bài thì $n \geq 2$. Giả sử P(x) đạt cực đại tại m điểm $u_1; u_2; \ldots; u_m (m \geq 1)$ và đạt cực tiểu tại k điểm $v_1; v_2; \ldots; v_k\,(k \geq 1)$.

Đặt $d = ma\mathbf{x}\,\{P(u_1); P(u_2); \ldots; P(u_m); P(v_1); P(v_2); \ldots\ldots; P(v_k)\}$.

Do đồ thị hàm P(x) chỉ có hữu hạn điểm uốn nên với a đủ lớn và $a > max\,\{d, 1995\}$, thì

P(x) = a chỉ có tối đa hai nghiệm (mỗi nghiệm được tính với số bội của nó), suy ra n = 2.

Nhưng nếu P(x) là tam thức bậc hai với a đủ lớn và a > 1995 thì P(x) = a chỉ có tối đa một nghiệm lớn hơn 1995, đa thức đó lại không thỏa mãn đề bài.

Vậy mọi đa thức P(x) thỏa mãn đề bài có dạng P(x) = bx + c với $b > 0$ và $c \leq 1995(1-b)$.

Bài toán 3.3 (TST 1994)**.** Cho $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ và $\deg p(x) = 4$. Giả sử $p(x) = 0$ có 4 nghiệm dương phân biệt. Chứng minh rằng $\dfrac{1-4x}{x^2}p(x) + \left(1 - \dfrac{1-4x}{x^2}\right)p'(x) -$

$p''(x) = 0$ có 4 nghiệm dương phân biệt.

Lời giải. Ta chứng minh bổ đề sau nếu $p(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt

$0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ thì phương trình $p(x) - p'(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt y_1, y_2, y_3, y_4 thỏa mãn $0 < x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < x_3 < y_3 < x_4 < y_4$.

Xét $f(x) = e^{-x}.p(x)$ thì $f(x) = 0 \Leftrightarrow p(x) = 0$.

Vậy $f(x) = 0$ có 4 nghiệm $0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4$.

Áp dụng định lý Lagrange ta có $f'(x) = -e^{-x}.p(x) + p'(x)e^{-x}$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow p(x) - p'(x) = 0$.

Do phương trình $p(x) - p'(x) = 0$ có 3 nghiệm $y_1 < y_2 < y_3$ và $\deg(p - p') = 4$ nên phương trình $p(x) - p'(x) = 0$ có nghiệm thứ 4 là y_4. Không giảm tổng quát ta giả sử hệ số x^4 trong $p(x)$ là dương.

Suy ra $\lim\limits_{x\to\infty} (p(x) - p'(x)) = +\infty$ nên $\exists \alpha > x^4$ sao cho $p(\alpha) - p'(\alpha) > 0$.

Do $p(y_3) - p'(y_3) = p(y_2) - p'(y_2) = 0$ nên $y_4 \in (\beta, \alpha)$.

Vậy $0 < x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < x_3 < y_3 < x_4 < y_4$.

Suy ra $Q(x) := p(x) - p'(x) = 0$ có 4 nghiệm dương phân biệt y_1, y_2, y_3, y_4.

Giả sử $Q(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ $(a, e \neq 0)$.

Khi đó $R(x) := x^4 Q\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ có 4 nghiệm dương phân biệt $\dfrac{1}{y_1}, \dfrac{1}{y_2}, \dfrac{1}{y_3}, \dfrac{1}{y_4}$,

Vậy nên $R(x) - R'(x) = 0$ cũng có 4 nghiệm dương phân biệt.

Ta có $R(x) - R'(x) = 0$

$$\Leftrightarrow x^4 Q\left(\frac{1}{x}\right) - 4x^3 Q\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 Q'\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4\left[p\left(\frac{1}{x}\right) - p'\left(\frac{1}{x}\right)\right] - 4x^3\left[p\left(\frac{1}{x}\right) - p'\left(\frac{1}{x}\right)\right] + x^2\left[p'\left(\frac{1}{x}\right) - p''\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^4 - 4x^3)p\left(\frac{1}{x}\right) + (-x^4 + 4x^3 + x^2)p'\left(\frac{1}{x}\right) - x^2 p''\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4x)p\left(\frac{1}{x}\right) + (-x^2 + 4x + 1)p'\left(\frac{1}{x}\right) - p''\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Đặt $t = \dfrac{1}{x}$, phương trình có dạng $\dfrac{1-4t}{t}p(t) + \left(1 - \dfrac{1-4t}{t^2}\right)p'(t) - p''(t) = 0$, bài toán được chứng minh.

Bài toán 3.4 (VMO - 2012)**.** Cho hai cấp số cộng (a_n), (b_n) với m là số nguyên dương, $m > 2$. Xét m tam thức bậc hai $p_k(x) = x^2 + a_k x + b_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$. Chứng minh rằng nếu $p_1(x)$ và $p_m(x)$ không có nghiệm thực thì các tam thức còn lại cũng không có nghiệm thực.

Lời giải. Ta có tam thức bậc hai$p_1(x)$ và $p_m(x)$ không có nghiệm thực suy ra $p_1(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ và $p_m(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Giả sử tồn tại $p_k(x) = x^2 + a_k x + b_k\ \ (k = 2, \ldots, m-1)$ có nghiệm thực $x = c$.

Khi đó $p_m(x) - p_k(x) = (m-k)(ax+b)$.

$p_k(x) - p_1(x) = (k-1)(ax+b)$

(ở đây a, b lần lượt là công sai của hai cấp số cộng(a_n), (b_n)).

Do đó $p_m(c) = (m-k)(ac+b)$ $p_1(c) = -(k-1)(ac+b)$

nên $p_m(c)\,p_1(c) < 0$, vô lý.

Vậy các tam thức bậc hai còn lại cũng không có nghiệm thực.

Bài toán 3.5 (IMO Shortlist 2006)**.** Cho $P(x)$ là đa thức với hệ số nguyên có bậc $n > 1$ và k là số nguyên dương bất kỳ.

Xét đa thức $Q(x) = P^k(x)$, với $P(x)$ được tác động k lần. Chứng minh rằng có nhiều nhất n số nguyên t sao cho $Q(t) = t$.

Lời giải. Trước hết ta chứng minh bổ đề: Nếu t là số nguyên thỏa mãn $Q(t) = t$ thì $P^2(t) = t$.

Thật vậy ta có

$$(P(t)-t)|(P^2(t)-P(t))|\ldots|(P^k(t)-P^{k-1}(t))|(P^{k+1}(t)-P^k(t)).$$

Mặt khác,

$$P^{k+1}(t) - P^k(t) = P(t) - t$$

nên

$$|P(t)-t| = \left|P^2(t) - P(t)\right| = \cdots = \left|P^k(t) - P^{k-1}(t)\right|,$$

Đặt $d = P(t) - t$. Nếu $d = 0$ thì $P(t) = t$, suy ra $P^2(t) = P(t) = t$.

Nếu $d \neq 0$, giả sử i là chỉ số nhỏ nhất mà $d = -\left[P^i(t) - P^{i-1}(t)\right], 2 \leq i \leq k$. Khi đó

$$P^{i-1}(t) - P^{i-2}(t) = P^{i-1}(t) - P^i(t).$$

Suy ra $P^i(t) = P^{i-2}(t)$ nên $P^2(t) = t$.

Ngược lại nếu

$$d = P(t) - t = P^2(t) - P(t) = \cdots = P^k(t) - P^{k-1}(t)$$

thì $P^k(t) = t + kd \neq t$, mâu thuẫn.

Trở lại bài toán, giả sử rằng có $(n+1)$ số nguyên $t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1}$ thỏa mãn $Q(t_i) = t_i, 1 \leq i \leq n+1$. Khi đó theo bổ đề nêu trên, ta có $P^2(t_i) = t_i, 1 \leq i \leq n+1$.

Với mọi $1 \leq i < j \leq n+1$, ta có

$$t_i - t_j \,|P(t_i) - P(t_j)\,\big|P^2(t_i) - P^2(t_j)$$

nên $|P(t_i) - P(t_j)| = t_j - t_i$.

Theo bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối, ta có

$$t_{n+1} - t_1 = |P(t_{n+1}) - P(t_1)|$$

$$\leq |P(t_{n+1}) - P(t_n)| + |P(t_n) - P(t_{n-1})| + \cdots + |P(t_2) - P(t_1)| = t_{n+1} - t_1.$$

Do đó, tất cả các hiệu $P(t_{i+1}) - P(t_i)$ đều cùng dấu.

Giả sử tất cả các hiệu $P(t_i) - P(t_j)$ đều cùng dấu dương, khi đó

$$P(t_{i+1}) - P(t_i) = t_{i+1} - t_i, \forall 1 \leq i \leq n,$$

suy ra $P(t_{i+1}) - t_{i+1} = P(t_i) - t_i, \forall 1 \leq i \leq n$.

Do đó đa thức $P(x) - x - (P(t_i) - t_i)$, có $n+1$ nghiệm phân biệt $t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1}$, điều này vô lý vì đa thức $P(x) - x - (P(t_i) - t_i)$, là một đa thức bậc n

Tương tự cho trường hợp tất cả các hiệu $P(t_{i+1}) - P(t_i)$ đề cùng dấu âm. Vậy ta có (đpcm)

3.2 Các đề toán về toán rời rạc liên quan

3.2.1 Một số bài toán cực trị trên tập số nguyên

Bài toán 3.6. Cho x, y, z là các số nguyên dương và thỏa mãn điều kiện

$$z(z - x - y) = x + y + 1.$$

Tìm giá trị lớn nhất của $M = \dfrac{x^4y^4}{(x+yz)(y+zx)(z+xy)^3}$.

Lời giải. Ta chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{x^4y^4}{(x+yz)(y+zx)(z+xy)^3} \le \frac{3^6}{4^9}.$$

Vì $z(z-x-y) = x+y+1 \to (z+1)(x+y) = z^2-1$ và do $z > 0$ nên $x+y+1 = z$. Khi đó

$$P = \frac{x^4y^4}{(x+y)(1+y)(x+y)(1+x)[(x+1)(y+1)]^3} = \frac{x^4y^4}{(x+y)^2[(x+1)(y+1)]^4}.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho các số dương x, y, ta có

$$(x+1)^4 = \left(\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+1\right)^4 \ge \left(4\sqrt[4]{\frac{x^3}{27}}\right)^4 = 4^4\frac{x^3}{27}.$$
$$(y+1)^4 = \left(\frac{y}{3}+\frac{y}{3}+\frac{y}{3}+1\right)^4 \ge \left(4\sqrt[4]{\frac{y^3}{27}}\right)^4 = 4^4\frac{y^3}{27}.$$
$$(x+y)^2 \ge 4xy.$$

Do đó $(x+y)^2.[(x+1)(y+1)]^4 \ge 4xy.4^8\dfrac{x^3y^3}{3^6} = \dfrac{4^9}{3^6}.x^4y^4$ suy ra $P \le \dfrac{3^6}{4^9}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{3} = 1 \\ z = x+y+1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3, y = 3, z = 7.$$

Vậy $\max M = \dfrac{3^6}{4^9}$.

Bài toán 3.7. Cho a, b, c nguyên dương và $a+b+c = 3n+1$ (n nguyên dương cho trước). Tìm giá trị lớn nhất của $T = abc$.

Lời giải. Ta chứng minh bất đẳng thức $abc \le (n)^2.(n+1)$. Ta có thể coi $a \ge b \ge c$. Khi đó $a \ge (n+1)$.

Ta có

$$\sqrt[3]{(na)(n+1)b(n+1)c} \le \frac{na+(n+1)b+(n+1)c}{3} \text{ (Theo AM-GM)}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(na)(n+1)b(n+1)c} \le \frac{(n+1)(a+b+c)-a}{3}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(na)(n+1)b(n+1)c} \le \frac{(n+1)(3n+1)-(n+1)}{3}$$
$$\Leftrightarrow abc \le \frac{(n(n+1))^3}{n(n+1)^2}$$
$$\Leftrightarrow abc \le n^2.(n+1)$$

Vậy $abc \le n^2.(n+1) \Leftrightarrow a = n+1, b = n, c = n$. Suy ra $\max T = n^2.(n+1)$.

Bài toán 3.8. Cho a, b, c nguyên dương và $a+b+c=100$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $T=abc$.

Lời giải. Ta chứng minh bất đẳng thức $T=abc \geq 98$.

Ta coi $a \geq b \geq c$ khi đó $a \geq 34$.

Nếu $c>1$ thì $c \geq 2$ và $b \geq 2$ khi đó $abc \geq 34.2.2>98$.

Nếu $c=1$ thì $a+b=99$ và $T=ab$ do $a \geq b$ nên $a \geq 50$.

Nếu $b>1$ thì $b \geq 2$ nên $ab \geq 50.2>98$.

Xét $b=1$ thì $a=98$ nên $(a, b, c)=(98,1,1)$ do đó $abc=98$.

Vậy $\min T=98$.

Bài toán 3.9. Cho các số nguyên dương $a \geq b \geq c$ và có $a+b+c=100$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của

$$M=a^2+b^2+c^2.$$

Lời giải. Ta chứng minh rằng $3334 \leq M \leq 9606$.

Do $a \geq b \geq c$ mà $a+b+c=100$ nên $a \geq \dfrac{100}{3}$ vậy nên $a \geq 34$.

Mặt khác $100 \geq 3c$ nên $c \leq \dfrac{100}{3}$ vậy $c \leq 33$ suy ra $a+b=100-c \geq 67$. Khi đó bài toán trở thành:

Cho a, b, c là các số nguyên thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} a \geq 34 \\ a+b \geq 67 \\ a+b+c=100 \end{cases}$$

Ta đi chứng minh $3334 \leq a^2+b^2+c^2 \leq 9606$. Ta có

$$a^2=(b+(a-b))^2=b^2+2b(a-b)+(a-b)^2$$

nên

$$a^2 \geq b^2+2b(a-b), \quad \forall a, b \in \mathbb{N}^*.$$

Áp dụng bất đẳng thức trên ta thu được

$$a^2 \geq 34^2+68(a-34), \quad \forall a \in \mathbb{N}^*,$$

$$b^2 \geq 33^2 + 66(b-33), \quad \forall b \in \mathbb{N}^*,$$

$$c^2 \geq 33^2 + 66(c-33), \quad \forall c \in \mathbb{N}^*.$$

Khi đó

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3334 + 66(a+b+c) + 2a - 2312 - 2178 - 2178$$

$$\geq 3334 + 66.100 + 68 - 2312 - 2178 - 2178 = 3334.$$

Vậy $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3334$ tức là $3334 \leq a^2 + b^2 + c^2$. Dấu $'' ='' $ xảy ra khi $a = 34, b = 33, c = 33$.

Ta lại có $a + b + c = 100$ mà $b \geq c \geq 1$ nên $a \leq 98$ và $a + b \leq 99$.

Vậy ta có

$$\begin{cases} a \leq 98 \\ a + b \leq 99 \\ a + b + c = 100 \end{cases}$$

Ta có

$$a^2 = (b + (a-b))^2 = b^2 + 2b(a-b) + (a-b)^2$$

nên $b^2 \leq a^2 - 2b(a-b) \forall a, b \in \mathbb{N}^*$.

Áp dụng bất đẳng thức trên ta thu được

$$a^2 \leq 98^2 - 2.98(98-a), \forall a \in \mathbb{N}^*,$$

$$b^2 \leq 1^2 - 2.1(1-b) \forall b \in \mathbb{N}^*,$$

$$c^2 \leq 1^2 - 2.1(1-c) \forall c \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 9606 + 2(a+b+c) + 194a - 19208 - 2 - 2 \leq 9606.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = 98, b = 1, c = 1$.

Kết luận: $\min M = 3334$, $\max M = 9606$.

Bài toán 3.10. Cho các số nguyên dương $a \geq b \geq c$ và có $a + b + c = 100$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $T = ab + bc + ca$.

Lời giải. Nếu a, b, c là số thực dương thì khi áp dụng cách chứng minh

$$T \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} \Leftrightarrow T \leq \frac{10000}{3}$$

thì không phù hợp do dấu đẳng thức xảy ra khi a, b, c không nguyên dương.
Khi đó ta có lời giải như sau:
Đặt $S = a^2 + b^2 + c^2$.

Vì $S + 2T = 100^2$ nên

$$T = \frac{10000 - S}{2}.$$

Vậy nên

$$\begin{aligned}
&3334 \leq S \leq 9606\\
&\Leftrightarrow \frac{10000-9606}{2} \leq T \leq \frac{10000-3334}{2}\\
&\Leftrightarrow 197 \leq T \leq 3333\\
&\max T = 3333 \Leftrightarrow a = 34, b = 33, c = 33,\\
&\min T = 197 \Leftrightarrow a = 98, b = 1, c = 1.
\end{aligned}$$

3.2.2 Một số bài toán sử dụng phương pháp suy luận

Bài toán 3.11. Một hội nghị toán học sử dụng bốn ngôn ngữ chính. Biết rằng hai đại biểu bất kì luôn có một ngôn ngữ mà họ đều biết. Chứng minh rằng có một ngôn ngữ được biết đến bởi nhiều hơn 60% đại biểu.

Lời giải. Giả sử có n đại biểu và 4 ngôn ngữ I, II, III, IV. Gọi A, B, C, D là tập các đại biểu biết ngôn ngữ I, II, III, IV.

- Nếu tồn tại một người chỉ biết duy nhất một ngôn ngữ thì $n-1$ người còn lại cũng phải biết ngôn ngữ đó. Do đó ngôn ngữ đó được biết đến bởi 100% đại biểu.

- Nếu tất cả các đại biểu đều biết được ít nhất hai thứ tiếng thì

$$C^2_{|A|} + C^2_{|B|} + C^2_{|C|} + C^2_{|D|} \geq C^2_n.$$

Giả sử A là tập thỏa mãn $|A| = \max\{|A|, |B|, |C|, |D|\}$. Suy ra $\frac{C_n^2}{2} \leq C^2_{|A|}$ hay tương đương với $2|A|(|A|-1) \geq n(n-1)$. Giả sử $|A| < \dfrac{3n}{5}$ thì

$$2|A|(|A|-1) < \frac{6n}{5}\left(\frac{3n}{5}-1\right) = \frac{18n^2}{25} - \frac{6n}{5} < n^2 - n,$$

mâu thuẫn.

Do đó $|A| \geq \dfrac{3n}{5}$.

Bài toán 3.12. Cho n, k là các số nguyên dương, $n \geq k$ và S là tập hợp n điểm trong mặt phẳng thỏa mãn điều kiện

i) Không có ba điểm nào thẳng hàng.

ii) Với mỗi điểm P của hệ đều không có ít hơn k điểm của hệ cách đều P.

Chứng minh rằng $k \leq \dfrac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

Lời giải. Giả sử $k > \dfrac{1}{2} + \sqrt{2n}$. Lấy điểm P thuộc S thì tồn tại ít nhất k điểm trong S cách đều P. Suy ra tồn tại ít nhất C_k^2 cặp điểm (A, B) mà $PA = PB$. Có ít nhất nC_k^2 cặp điểm mà trên đường trung trực của đoạn thẳng mà hai đầu mút là hai điểm đó có ít nhất một điểm thuộc S.

Ta có

$$\begin{aligned} nC_k^2 &= n\frac{k(k-1)}{2} > \frac{1}{2}n\left(\frac{1}{2}+\sqrt{2n}\right)\left(\sqrt{2n}-\frac{1}{2}\right) \\ &= n\left(n-\frac{1}{8}\right) > n(n-1) = 2C_n^2. \end{aligned}$$

Lại có C_n^2 là số cặp điểm không thứ tự của $S, 2C_n^2$ là số cặp điểm có thứ tự của S. Theo nguyên lí Dirichlet tồn tại một cặp điểm $(A; B)$ và ba điểm P_1, P_2, P_3 thỏa mãn $AP_i = BP_i (i = \overline{1,3})$. Suy ra P_1, P_2, P_3 thẳng hàng (vô lí). Vậy ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét 3.2. Có thể mở rộng bài toán trên trong không gian như sau:

Cho n, k là các số nguyên dương, $n \geq k$ và S là tập hợp n điểm trong không gian thoả mãn điều kiện:

i) Không có 65 điểm nào thẳng hàng.

ii) Với mỗi điểm P của hệ đều không có ít hơn k điểm của hệ cách đều P.

Chứng minh rằng $k \leq 1 + 4\sqrt[3]{(n-1)(n-2)}$.

Có thể tổng quát giả thiết (i) thành không có quá m điểm nào thẳng hàng. Khi đó $k \leq 1 + \sqrt[3]{m(n-1)(n-2)}$

Trước hết ta có bổ đề sau

Bài toán 3.13. Gọi P là tập hợp các số có tận cùng là 1 hoặc 9. Gọi Q là tập hợp các số có tận cùng là 3 hoặc 7. Chứng minh rằng tích của hai số cùng thuộc P hoặc cùng thuộc Q là một số thuộc P.

Lời giải. Giả sử $p_1 \in P, p_2 \in P$, khi đó có 3 trường hợp như sau:

- $p_1p_2 = (10k_1+1)(10k_2+1) \Rightarrow p_1p_2 \in P$ (do p_1p_2 có tận cùng là 1).
- $p_1p_2 = (10k_1+9)(10k_2+9) \Rightarrow p_1p_2 \in P$ (do p_1p_2 có tận cùng là 1).
- $p_1p_2 = (10k_1+1)(10k_2+9) \Rightarrow p_1p_2 \in P$ (do p_1p_2 có tận cùng là 9).

Giả sử $q_1 \in Q, q_2 \in Q$, khi đó có 3 trường hợp như sau:

- $q_1q_2 = (10k_1+3)(10k_2+3) \Rightarrow q_1q_2 \in P$ (do p_1p_2 có tận cùng là 9).
- $q_1q_2 = (10k_1+7)(10k_2+7) \Rightarrow q_1q_2 \in P$ (do p_1p_2 có tận cùng là 9).
- $q_1q_2 = (10k_1+3)(10k_2+7) \Rightarrow q_1q_2 \in P$ (do p_1p_2 có tận cùng là 1).

Ta thu được điều phải chứng minh.

Bài toán 3.14. Cho số tự nhiên $a \geq 1$. Gọi $f(a)$ là số các ước số có tận cùng là 1 hoặc 9 của a. Gọi $g(a)$ là số các ước số có tận cùng là 3 hoặc 7 của a. Chứng minh rằng $f(a) \geq g(a)$.
Lời giải. Sử dụng kết quả bài toán 3.13, ta có

a) Nếu $p \in P \Rightarrow p^n \in P, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$;

b) Nếu $q \in P \Rightarrow q^{2n} \in P, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$;

c) Nếu $q \in P \Rightarrow q^{2n+1} \in Q$.

((c) suy ra từ nhận xét nếu $p \in P, q \in Q$ thì $pq \in Q$: chứng minh tương tự như chứng minh bài toán 3.13).

Xét a là số tự nhiên ≥ 1. Ta biểu diễn a dưới dạng $a = 2^m 5^n.b$ trong đó b là số lẻ không chia hết cho 5.

Dễ dàng thấy rằng $f(a) = f(b)$. Thật vậy, do mọi ước của b đều là ước của a nên $f(b) \leq f(a)$. Giả sử lấy một ước tùy ý có tận cùng bằng 9 (tương tự có tận cùng bằng 1) của a. Ước này chẳng hạn có dạng $10k+9$. Như vậy $a \vdots (10k+9)$. Rõ ràng $2^m 5^n$ và $10k+9$ nguyên tố cùng nhau nên từ $(2^m 5^n) \vdots (10k+9)$ suy ra $b \vdots (10k+9)$ suy ra $10k+9$ cũng là một ước tận cùng bằng 9 của b. Do vậy $f(a) \leq f(b)$.

Vậy $f(a) = f(b)$.

Lập luận tương tự có $g(a) = g(b)$.

Vì thế

$$f(a) \geq g(a) \Leftrightarrow f(b) \geq g(b). \tag{3.4}$$

Ta sẽ chứng minh (3.4) bằng quy nạp.

Với $b = 1$ thì (3.4) hiển nhiên.

Với $b > 1$ ta chứng minh (3.4) bằng quy nạp theo số s các ước số nguyên tố của b. Với $s = 1$, b sẽ có phân tích chuẩn $b = p^\alpha (p \notin \{2;5\}, \alpha \in \mathbb{N}^*)$. Theo nhận xét trên ta có

- Nếu $p \in P$ thì $f(b) = \alpha + 1$ và $g(b) = 0$;
- Nếu $p \in Q$ thì $f(b) = \left[\dfrac{\alpha}{2}\right] + 1$ và $g(b) = \begin{cases} \left[\dfrac{\alpha}{2}\right] & \text{nếu } \alpha \text{ chẵn} \\ \left[\dfrac{\alpha}{2}\right] + 1 & \text{nếu } \alpha \text{ lẻ.} \end{cases}$

Từ đó suy ra $f(b) \leq g(b)$.

Giả sử (3.4) đúng với $s = k (k \in \mathbb{N}^*)$. Xét $s = k+1$, khi đó b có phân tích chuẩn

$$b = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}.p_{k+1}^{\alpha_{k+1}} (p_i \notin \{2;5\}, \alpha_i \notin \mathbb{N}, \forall i = \overline{1, k+1}).$$

Đặt $b' = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ ta có b' là số lẻ không chia hết cho 5 và $b = b'.p_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$. Với lưu ý rằng d là ước của b khi và chỉ khi $d = d'.p_{k+1}^{\alpha}$, với d' là ước của b' và $0 < \alpha \geq \alpha_{k+1}$, theo bổ đề Ta có

$$f(b) = f(b')f(p_{k+1}^{\alpha_{k+1}}) + f(b')g(p_{k+1}^{\alpha_{k+1}});$$

$$g(b) = f(b')g(p_{k+1}^{\alpha_{k+1}}) + g(b')f(p_{k+1}^{\alpha_{k+1}}).$$

Suy ra

$$f(b) - g(b) = \left[f(b') - g(b')\right] \left[f(p_{k+1}^{\alpha_{k+1}}) - g(p_{k+1}^{\alpha_{k+1}})\right] \geq 0 \Rightarrow f(b) \geq g(b).$$

Theo nguyên lý quy nạp, (3.4) được chứng minh.

Bài toán 3.15 (xem [1],[3])**.** Cho n là số nguyên dương. Gọi $t(n)$ là số các ước nguyên dương của n^2. Tìm n sao cho bất đẳng thức $n < t(n)$ được thỏa mãn.

Lời giải. Giả sử n có phân tích ra thừa số nguyên tố như sau:

$$n = 2^\alpha 3^\beta p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k},$$

ở đây $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ và $p_t \geq 5$. Khi đó

$$n^2 = 2^{2\alpha} 3^{2\beta} p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \ldots p_k^{2\alpha_k},$$

và theo định nghĩa ta có

$$t(n) = (2\alpha + 1)(2\beta + 1)(2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1) \ldots (2\alpha_k + 1).$$

Bài toán trở thành tìm n nguyên dương sao cho

$$(2\alpha + 1)(2\beta + 1)(2\alpha_1 + 1) \ldots (2\alpha_k + 1) > 2^\alpha 3^\beta p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}.$$

Bằng quy nạp dễ dàng ta chứng minh được:

a) $2^n \geq \dfrac{2}{3}(2n + 1), \forall n \in \mathbb{N}.$

b) $2^n > 2n + 1, \forall n \geq 3.$

c) $3^n \geq 2n + 1, \forall n \geq 1.$

d) $3^n > \dfrac{3}{2}(2n + 1), \forall n \geq 2.$

e) $5^n > \dfrac{3}{2}(2n + 1), \forall n \geq 1.$

Ta thấy n không thể có ước nguyên tố lớn hơn 3. Thật vậy, nếu trái lại ta có

$$n \geq 2^\alpha 3^\beta 5^{\alpha_1} \ldots 5^{\alpha_k} > \frac{2}{3}(2\alpha + 1)(2\beta + 1)\frac{3}{2}(2\alpha_1 + 1) \ldots (2\alpha_k + 1)$$
$$\Rightarrow n > t(n).$$

Vì thế $n = 2^\alpha 3^\beta$.

Nếu $\beta \geq 2$, thì $n > \dfrac{2}{3}(2\alpha+1)\dfrac{3}{2}(2\beta+1) = t(n)$. Do vậy $\beta = 0$ hoặc $\beta = 1$.

Nếu $\beta = 0$ thì $n = 2^\alpha$ suy ra $n^2 = 2^{2\alpha}$, nên $t(n) = 2\alpha + 1$. Khi đó $2^\alpha < 2\alpha + 1$ suy ra $\alpha = 1$ hoặc $\alpha = 2$. Nên $n = 2$ hoặc $n = 4$.

Nếu $\beta = 1$ thì $n = 2^\alpha.3$ suy ra $n^2 = 2^{2\alpha}.3^2$, nên $t(n) = 3(2\alpha+1)$. Khi đó $n < t(n) \Leftrightarrow 3.2^\alpha < 6\alpha + 3$. Suy ra $\alpha = 1$ hoặc $\alpha = 2$. Nên $n = 6$ hoặc $n = 12$.

Thử lại thấy $n = 2; 4; 6; 12$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Vậy để có $n < t(n)$ thì $n = 2; 4; 6; 12$.

Kết luận

Luận văn "Bất đẳng thức trong số học và một số dạng toán liên quan" đã trình bày được những vấn đề sau:

1. Luận văn trình bày chi tiết các tính chất của hàm số học.

2. Tiếp theo, trình bày một số dạng toán về bất đẳng thức và cực trị liên quan trong số học.

3. Xét các bài toán cực trị, khảo sát phương trình, bất phương trình đa thức cùng một số dạng liên quan.

Tài liệu tham khảo

[A] **Tiếng Việt**

[1] Phan Huy Khải (2005), *Bất đẳng thức số học*, NXBGD.

[2] Hà Huy Khoái (2004), *Số học*, NXBGD.

[3] Nguyễn Văn Mậu (Chủ biên) (2004), *Chuyên đề số học chọn lọc*, NXBGD.

[4] Nguyễn Tiến Tài, Nguyễn Hữu Hoan (2001), *Số học*, NXBGD.

[5] G.H. Hardy, E.M.Wright (1938), *An Introduction to the theory of numbers*, Oxford at the clarendonpress.

[6] Nivelle Robbin (2001), *Beginning Number theory* , Win.C.Brown Puplish-errs, Dubuque, Lowa-Melbourne, Australia-Oxford, England.

[7] Titu Andreescu, Juming Feng (2000), *Mathematical Olympiads 1999-2000: Olympiads Problems from Around the World*, MMA.