Một số bất đẳng thức trong các đề thi học sinh giỏi và tuyển sinh ĐH – THPT quốc gia và lớp 10 chuyên toán

Tạp chí và tư liệu toán học sưu tầm và chỉnh sửa

Trong các kì thi học sinh giỏi môn Toán THCS, THPT và các kì thi tuyển sinh lớp 10 chuyên, nội dung về bất đẳng thức và giá trị lớn nhất, nhỏ nhất xuất hiện một cách đều đặn trong các đề thì với các bài toán ngày càng khó hơn. Trong chủ đề này, Chứng tôi đã tuyển chọn và giới thiệu một số bài toán về bất đẳng thức và giá trị lớn nhất, nhỏ nhất được trích trong các đề thi học sinh giỏi môn toán cấp tỉnh và các đề thi chuyên toán các năm gần đây.

Bài 1.

a) Cho các số dương a, b, c tùy ý. Chứng minh rằng $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9$

b) Cho các số dương a, b, c thoả mãn $a+b+c\le 3$. Chứng ming rằng

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2009}{ab+bc+ca}\ge 670$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Hải Phòng năm 2009 - 2010

Lời giải

a)Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho 3 số dương $a+b+c\ge \sqrt[3]{abc}$; $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}$

Suy ra $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

b) Ta có $ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2 \Rightarrow ab+bc+ca\le \frac{(a+b+c)^2}{3}\le 3$, Suy ra $\frac{2007}{ab+bc+ca}\ge 669$.

Áp dụng bất đẳng thức trong câu a, ta có

$$\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}\right)\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\right)\ge 9$$

Suy ra $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}\ge \frac{9}{(a+b+c)^2}\ge 1$.

Do đó ta được $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2009}{ab+bc+ca}\ge 670$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 2. Với số tự nhiên $n\ge 3$. Chứng minh rằng $S_n<\frac{1}{2}$. Với

$$S_n=\frac{1}{3\left(1+\sqrt{2}\right)}+\frac{1}{5\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}+...+\frac{1}{(2n+1)\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Bình Định năm 2009-2010

Lời giải

Với $n\ge 3$, ta có

$$\frac{1}{(2n+1)\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2n+1}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{4n^2+4n+1}}$$

$$<\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{4n^2+4n}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2\sqrt{n+1}.\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

Do đó ta được

$$S_n<\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)<\frac{1}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 3. Chứng minh rằng $\left|\frac{m}{n}-\sqrt{2}\right|\ge\frac{1}{n^2\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}$, với mọi số nguyên m, n.

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Bình năm 2009-2010

Lời giải

Vì m, n là các số nguyên nên $\frac{m}{n}$ là số hữu tỉ và $\sqrt{2}$ là số vô tỉ nên $\frac{m}{n}-\sqrt{2}\ne 0$.

Ta xét hai trường hợp sau.

Trường hợp 1. Với $\frac{m}{n}>\sqrt{2}$, khi đó ta được $m^2>2n^2\Rightarrow m^2\ge 2n^2+1$ hay $m\ge\sqrt{2n^2-1}$.

Từ đó suy ra

$$\left|\frac{m}{n}-\sqrt{2}\right|\ge\frac{\sqrt{2n^2+1}}{n}-\sqrt{2}=\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{2}$$

$$=\frac{2+\frac{1}{n^2}-2}{\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{2}}=\frac{1}{n^2\left(\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{2}\right)}\ge\frac{1}{n^2\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}$$

Trường hợp 2. Với $\frac{m}{n}<\sqrt{2}$, khi đó ta được $m^2<2n^2\Rightarrow m^2\le 2n^2-1$ hay $m\le\sqrt{2n^2-1}$

Từ đó suy ra

$$\left|\frac{m}{n}-\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}-\frac{m}{n}\ge\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2n^2-1}}{n}=\sqrt{2}-\sqrt{2-\frac{1}{n^2}}=\frac{2-2+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{2}+\sqrt{2-\frac{1}{n^2}}}$$

$$=\frac{1}{n^2\left(\sqrt{2}+\sqrt{2-\frac{1}{n^2}}\right)}\ge\frac{1}{n^2\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 4. Cho ba số thực a, b, c đôi một phân biệt. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{(b-c)^2}+\frac{b^2}{(c-a)^2}+\frac{c^2}{(a-b)^2}\ge 2$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Vĩnh Phúcnăm 2009-2010

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)^2 \ge 2+2\left(\frac{ab}{(b-c)(c-a)}+\frac{bc}{(c-a)(a-b)}+\frac{ca}{(a-b)(b-c)}\right)$$

Mà ta lại có

$$\begin{aligned}&\frac{ab}{(b-c)(c-a)}+\frac{bc}{(c-a)(a-b)}+\frac{ca}{(a-b)(b-c)}\\&=\frac{ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=-1\end{aligned}$$

Do đó bất đẳng thức trên trở thành $\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)^2 \ge 0$.

Bất đẳng thức cuối cùng là một bất đẳng thức đúng. Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 5. Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $a+b+c=3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2+b^2+c^2+\frac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a}$.

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Nghệ An năm 2009-2010

Lời giải

Dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a=b=c=1$ và giá trị nhỏ nhất của P là 4.

Ta quy bài toán về chứng minh bất đẳng thức

$$a^2+b^2+c^2+\frac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a}\ge 4$$

Thật vậy, kết hợp với giả thiết ta có

$$\begin{aligned}3\left(a^2+b^2+c^2\right)&=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)\\&=a^3+b^3+c^3+a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2\end{aligned}$$

Áp dụng bất đăngr thức AM - GM ta có

$$a^3+ab^2\ge 2a^2b; b^3+bc^2\ge 2b^2c;\ c^3+ca^2\ge 2c^2a$$

Suy ra $3\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 3\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)>0$

Do đó ta được $a^2+b^2+c^2+\frac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a}\ge a^2+b^2+c^2+\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$.

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$a^2+b^2+c^2+\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\ge 4$$

Hay $a^2+b^2+c^2+\frac{9-\left(a^2+b^2+c^2\right)}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}\ge 4$. Đặt $t=a^2+b^2+c^2$.

Từ giả thiết $a+b+c=3\Rightarrow a^2+b^2+c^2\ge 3$, do đó ta được $t\ge 3$

Bất đẳng thức trên trở thành

$$t+\frac{9-t}{2t}\ge 4\Leftrightarrow 2t^2+9-t\ge 8t\Leftrightarrow (t-3)(2t-3)\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng do $t\ge 3$. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 6. Cho biểu thức $P=a^2+b^2+c^2+d^2+ac+bd$, trong đó $ad-bc=1$.

Chứng minh rằng $P\ge\sqrt{3}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Thanh Hóa năm 2009-2010

Lời giải

Cách 1. Ta có

$$\left(ac+bd\right)^2+\left(ad-bc\right)^2=a^2c^2+2abcd+b^2d^2+a^2d^2-2abcd+b^2c^2$$
$$=a^2\left(c^2+d^2\right)+b^2\left(d^2+c^2\right)=\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)$$

Vì $ad-bc=1$ nên $1+\left(ac+bd\right)^2=\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được

$$P=a^2+b^2+c^2+d^2+ac+bd\ge 2\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)}+ac+bd$$

Suy ta $P\ge 2\sqrt{1+\left(ac+bd\right)^2}+ac+bd$. Rõ ràng $P>0$ vì $2\sqrt{1+\left(ac+bd\right)^2}>\left|ac+bd\right|^2$

Đặt $x=ac+bd$, khi đó ta được

$$P\ge 2\sqrt{1+x^2}+x\Leftrightarrow P^2\ge 4\left(1+x^2\right)+4x\sqrt{1+x^2}+x^2=\left(1+x^2\right)+4x\sqrt{1+x^2}+4x^2+3$$

Hay $P^2\ge\left(\sqrt{1+x^2}+2x\right)^2+3\ge 3$. Do đó ta được $P\ge\sqrt{3}$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} ad-bc=1\\ 2a=\sqrt{3}d-c\\ 2b=-\sqrt{3}c-d\end{cases}$

Cách 2. Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$a^2+b^2+c^2+d^2+ac+bd\ge\sqrt{3}\left(ad-bc\right)$$

Hay $a^2+b^2+c^2+d^2+ac+bd\ge a\left(\sqrt{3}d-c\right)+b\left(-\sqrt{3}c-d\right)$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$a\left(\sqrt{3}d-c\right)\le a^2+\frac{\left(\sqrt{3}d-c\right)^2}{4}=a^2+\frac{3d^2-2\sqrt{3}cd+c^2}{4}$$
$$b\left(-\sqrt{3}c-d\right)\le b^2+\frac{\left(-\sqrt{3}c-d\right)^2}{4}=b^2+\frac{3d^2+2\sqrt{3}cd+c^2}{4}$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được

$$a^2+b^2+c^2+d^2+ac+bd\ge a\left(\sqrt{3}d-c\right)+b\left(-\sqrt{3}c-d\right)$$

Bài toán được chứng minh xong.

Bài 7. Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có ba góc nhọn.

Chứng minh rằng với mọi số thực x, y, zta luôn có $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}>\frac{2x^2+2y^2+2z^2}{a^2+b^2+c^2}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Thanh Hóa năm 2009-2010

Lời giải

Cách 1. Vì $a^2+b^2+c^2>0$ nên ta có

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)$$
$$=x^2\left(2+\frac{b^2+c^2-a^2}{a^2}\right)+y^2\left(2+\frac{a^2+c^2-b^2}{b^2}\right)+z^2\left(2+\frac{a^2+b^2-c^2}{c^2}\right)$$
$$=2x^2+2y^2+2z^2+x^2\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{a^2}\right)+y^2\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{b^2}\right)+z^2\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{c^2}\right)$$

Giả sử $a \le b \le c$, khi đó $c^2 - a^2 \ge 0; c^2 - b^2 \ge 0$.

Với c là cạnh lớn nhất và các góc đều nhọn nên $c^2 < a^2 + b^2$. Do đó ta có

$$b^2 + c^2 - a^2 > 0; a^2 + c^2 - b^2 > 0; a^2 + b^2 - c^2 > 0$$

Suy ra

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + x^2\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{a^2}\right) + y^2\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{b^2}\right) + z^2\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{c^2}\right) > 2x^2 + 2y^2 + 2z^2$$

Hay $\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) > 2x^2 + 2y^2 + 2z^2$

Hay $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} > \frac{2x^2 + 2y^2 + 2z^2}{a^2 + b^2 + c^2}$. Bài toán được chứng minh xong

Cách 2. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2x^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2y^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{2z^2}{a^2 + b^2 + c^2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2\left(b^2 + c^2 - a^2\right)}{a^2\left(a^2 + b^2 + c^2\right)} + \frac{y^2\left(a^2 + c^2 - b^2\right)}{b^2\left(a^2 + b^2 + c^2\right)} + \frac{z^2\left(a^2 + b^2 - c^2\right)}{c^2\left(a^2 + b^2 + c^2\right)} > 0$$

Do a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác nhọn nên

$$a^2 + b^2 > c^2; b^2 + c^2 > a^2; c^2 + a^2 > b^2$$

Nên ta được $b^2 + c^2 - a^2 > 0; a^2 + c^2 - b^2 > 0; a^2 + b^2 - c^2 > 0$

Do vậy bất đẳng thức trên luôn đúng. Bài toán được chứng minh xong.

Bài 8.

a) Cho k là số nguyên dương bất kì. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} < 2\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$

b) Chứng minh rằng $\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{2010\sqrt{2009}} < \frac{88}{45}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Thái Bình năm 2009-2010

Lời giải

a)Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} < \frac{2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k}}{\sqrt{k}.\sqrt{k+1}} \Leftrightarrow 2k + 1 - 2\sqrt{k(k+1)} > 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)^2 > 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng với mọi k nguyên dương.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

b) Áp dụng kết quả câu a ta có

$$\begin{aligned} VT &= \frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{2010\sqrt{2009}} \\ &< 2\left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \cdots + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2009}} - \frac{1}{\sqrt{2010}}\right) \\ &= 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2010}}\right) < 2\left(1 - \frac{1}{45}\right) = \frac{88}{45} = VP \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Bài 9. Với a, b, c là những số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}+\frac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}}+\frac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}}\ge\frac{a+b+c}{5}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐHKHTN Hà Nội năm 2009-2010

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được

$$3a^2+8b^2+14ab=3a^2+8b^2+12ab+2ab\le4a^2+9b^2+12ab=(2a+3b)^2$$

Suy ra $\dfrac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}\ge\dfrac{a^2}{\sqrt{(2a+3b)^2}}=\dfrac{a^2}{2a+3b}$

Áp dụng tương tự ta thu được

$$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}+\frac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}}+\frac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}}$$
$$\ge\frac{a^2}{2a+3b}+\frac{b^2}{2b+3c}+\frac{c^2}{2c+3a}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng phân thức ta được

$$\frac{a^2}{2a+3b}+\frac{b^2}{2b+3c}+\frac{c^2}{2c+3a}\ge\frac{(a+b+c)^2}{5(a+b+c)}=\frac{a+b+c}{5}$$

Do đó ta được

$$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}+\frac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}}+\frac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}}\ge\frac{a+b+c}{5}$$

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Bài 10. Giả sử x, y, z là những số thực thoả mãn điều kiện $0\le x,\ y,\ z\le2$ và $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức

$$M=x^4+y^4+z^4+12(1-x)(1-y)(1-z)$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐHKHTN Hà Nội năm 2009-2010

Lời giải

Đặt $a=x-1;\ b=y-1;\ c=z-1$, ta được $-1\le a;\ b;\ c\le1$ và $a+b+c=0$.

Biểu thức M được viết lại thành

$$M=a^4+b^4+c^4+4\left(a^3+b^3+c^3\right)+6\left(a^2+b^2+c^2\right)+4(a+b+c)+3-12abc$$

Để ý là khi $a+b+c=0$ thì $a^3+b^3+c^3-3abc=0$ nên biểu thức trên thử thành

$$M=a^4+b^4+c^4+6\left(a^2+b^2+c^2\right)+3$$

Theo một đánh giá quen thuộc thì

$$a^4+b^4+c^4\ge abc(a+b+c)=0$$
$$a^2+b^2+c^2\ge\frac{1}{3}(a+b+c)^2=0$$

Do đó suy ra $M\ge3$ hay giá trị nhỏ nhất của M là 3.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=0$ hay $x=y=z=1$.

Mặt khác do $-1\le a;\ b;\ c\le1$ nên ta có $|a|;|b|;|c|\le1$. Từ đó ta có

$$a^4\le a^2\le|a|;\ b^4\le b^2\le|b|;\ c^4\le c^2\le|c|$$

Suy ra $M=a^4+b^4+c^4+6\left(a^2+b^2+c^2\right)+3\le 7\left(|a|+|b|+|c|\right)+3$. Mà ta lại có $a+b+c=0$ nên trong ba số a, b, c có một hoặc hai số âm, tức là luôn tồn tại hai số cùng dấu. Không mất tính tổng quát ta giả sử hai số đó là b và c. Khi đó ta được $|b|+|c|=|b+c|=|a|$. Đến đây ta có $M\le 14|a|+3\le 17$ hay giá trị lớn nhất của M là 17. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=1;\ b=-1; c=0$ và các hoán vị hay $x=2;\ y=0;\ z=1$ và các hoán vị.

Bài 11.

a) Cho 3 số thực a, b, c bất kì. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca+\frac{\left(a-b\right)^2}{26}+\frac{\left(b-c\right)^2}{6}+\frac{\left(c-a\right)^2}{2009}$$

b) Cho $a>0;\ b<0$. Chứng minh rằng $\frac{1}{a}\ge\frac{2}{b}+\frac{8}{2a-b}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán TP Hồ Chí Minh năm 2009-2010

Lời giải

a) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{\left(a-b\right)^2}{2}+\frac{\left(b-c\right)^2}{2}+\frac{\left(c-a\right)^2}{2}\ge\frac{\left(a-b\right)^2}{26}+\frac{\left(b-c\right)^2}{6}+\frac{\left(c-a\right)^2}{2009}$$

Hay $\frac{12\left(a-b\right)^2}{13}+\frac{\left(b-c\right)^2}{3}+\frac{2007\left(c-a\right)^2}{2}\ge 0$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

b) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{-b}\ge\frac{8}{2a-b}$$

Đặt $c=-b$, do $b<0$ nên ta được $c>0$, khi đó bất đẳng thức trên được viết lại thành

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{c}\ge\frac{8}{2a+c}$$

Theo một đánh giá quen thuộc ta được

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{c}=\frac{2}{2a}+\frac{2}{c}\ge\frac{2.4}{2a+c}=\frac{8}{2a+c}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $2a=-b$.

Bài 12. Cho a, b là các số dương thỏa mãn $\frac{a}{1+a}+\frac{2b}{1+b}=1$. Chứng minh $ab^2\le\frac{1}{8}$.

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Quảng Bình năm 2015-2016

Lời giải

Từ giả thiết $\frac{a}{1+a}+\frac{2b}{1+b}=1$. Đặt $x=\frac{a}{1+a};\ y=\frac{b}{1+b}$ Suy ra $a=\frac{x}{1-x};\ b=\frac{y}{1-y}$.

Khi đó ta được $x+2y=1$ và bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{xy^2}{\left(1-x\right)\left(1-y\right)^2}\le\frac{1}{8}$$

Từ giả thiết ta suy ra $1-x=2y;\ 1-y=x+y$ nên lại viết bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$\frac{xy^2}{2y(x+y)^2} \le \frac{1}{8} \Leftrightarrow 4xy \le (x+y)^2$$

Đánh giá cuối cùng là một bất đẳng thức đúng. Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Bài 13. Cho x, y, z là các số thực dương sao cho $xyz = x+y+z+2$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}} \le \frac{3}{2}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Phú Thọ năm 2009-2010

Lời giải

Giả thiết của bài toán được viết lại thành $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = 1$.

Đặt $a = \frac{1}{x+1}; b = \frac{1}{y+1}; c = \frac{1}{z+1}$. Khi đó ta được $a+b+c=1$. Từ đó suy ra

$$x = \frac{1-a}{a} = \frac{b+c}{a}; y = \frac{1-b}{b} = \frac{c+a}{b}; z = \frac{1-c}{c} = \frac{a+b}{a}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\sqrt{\frac{ab}{(b+c)(c+a)}} + \sqrt{\frac{bc}{(c+a)(a+b)}} + \sqrt{\frac{ca}{(a+b)(b+c)}} \le \frac{3}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được

$$\sqrt{\frac{ab}{(b+c)(c+a)}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{b}{b+c} + \frac{a}{c+a}\right)$$

$$\sqrt{\frac{bc}{(c+a)(a+b)}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{c}{c+a} + \frac{b}{a+b}\right)$$

$$\sqrt{\frac{ca}{(a+b)(b+c)}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b} + \frac{c}{b+c}\right)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{\frac{ab}{(b+c)(c+a)}} + \sqrt{\frac{bc}{(c+a)(a+b)}} + \sqrt{\frac{ca}{(a+b)(b+c)}} \le \frac{3}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=2$

Bài 14. Cho các số thực không âm a, b, c sao cho $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+2} + \frac{1}{b^2+2} + \frac{1}{c^2+2} \le 1$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Phú Thọ năm 2009-2010

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a^2}{a^2+2} + \frac{b^2}{b^2+2} + \frac{c^2}{c^2+2} \ge 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng phân thức ta được

$$\frac{a^2}{a^2+2} + \frac{b^2}{b^2+2} + \frac{c^2}{c^2+2} \ge \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+6} = \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)} = 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 15. Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x+2y+3z=18$. Chứng minh rằng

$$\frac{2y+3z+5}{1+x}+\frac{3z+x+5}{1+2y}+\frac{x+2y+5}{1+3z}\ge\frac{51}{7}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên toán Đại học Vinh, 2009 – 2010

Lời giải

Đặt $a=x;\ b=2y;\ c=3x$, khi đó giả thiết trở thành $a+b+c=18$ và bất đẳng thức được viết lại thành

$$\frac{b+c+5}{1+a}+\frac{c+a+5}{1+b}+\frac{a+b+5}{1+c}\ge\frac{51}{7}$$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{b+c+5}{1+a}+1+\frac{c+a+5}{1+b}+1+\frac{a+b+5}{1+c}+1\ge\frac{51}{7}+3$$

Hay $(a+b+c+6)\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\right)\ge\frac{72}{7}$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\ge\frac{3}{7}$$

Thật vậy theo bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\ge\frac{9}{3+a+b+c}=\frac{9}{21}=\frac{3}{7}$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=6$ hay $x=6;\ y=3;\ z=2$.

Bài 16. Giả sử x, y, z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $x+y+z=1$.

Chứng minh rằng $\dfrac{\sqrt{xy+z}+\sqrt{2x^2+2y^2}}{1+\sqrt{xy}}\ge1$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐH KHTN Hà Nội năm 2010-2011

Lời giải

Ta sẽ quy bài toán về việc chứng minh bất đẳng thức cùng bậc là

$$\frac{\sqrt{xy+z(x+y+z)}+\sqrt{2x^2+2y^2}}{x+y+z+\sqrt{xy}}\ge1\Leftrightarrow\sqrt{(x+z)(y+z)}+\sqrt{2x^2+2y^2}\ge x+y+z+\sqrt{xy}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có $\sqrt{2x^2+2y^2}\ge x+y$.

Do đó ta chỉ cần chứng minh $\sqrt{(z+x)(z+y)}\ge z+\sqrt{xy}$.

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$z^2+xy+z(x+y)\ge z^2+xy+2z\sqrt{xy}\Leftrightarrow z\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\ge0$$

Bài toán được chứng minh hoàn toàn. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=\frac{1}{2};\ z=0$.

Bài 17. Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a+b+c+ab+bc+ca=6$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge a^2+b^2+c^2\ge3$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐHNN Hà Nội năm 2010-2011

Lời giải

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge a^2+b^2+c^2$

Thật vậy, theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng phân thức ta được

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{ab+bc+ac}$$

Theo một đánh giá quen thuộc ta có $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$

Do đó ta được $\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\ge\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(ab+bc+ca\right)$, nên ta có $\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{ab+bc+ac}\ge a^2+b^2+c^2$.

Do đó ta suy ra $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge a^2+b^2+c^2$

Chứng minh $a^2+b^2+c^2\ge 3$. Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$a^2+b^2\ge 2ab;\ b^2+c^2\ge 2bc;\ c^2+a^2\ge 2ca;\ a^2+1\ge 2a;b^2+1\ge 2b;c^2+1\ge 2c$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$3\left(a^2+b^2+c^2\right)+3\ge 2\left(ab+bc+ca+a+b+c\right)=12$$

Hay $a^2+b^2+c^2\ge 3$. Kết hợp hai kết quả trên ta được $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge a^2+b^2+c^2\ge 3$.

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 18. Cho các số dương a, b, c thoả mãn $a+b+c=abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$S=\frac{a}{\sqrt{bc\left(1+a^2\right)}}+\frac{b}{\sqrt{ca\left(1+b^2\right)}}+\frac{c}{\sqrt{ab\left(1+c^2\right)}}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Phú Thọ năm 2010-2011

Lời giải

Cách 1. Kết hợp với giả thiết ta có

$$\sqrt{bc\left(1+a^2\right)}=\sqrt{bc+a^2bc}=\sqrt{bc+a\left(a+b+c\right)}=\sqrt{\left(a+b\right)\left(a+c\right)}$$

Hoàn toàn tương tựta được

$$\sqrt{ca\left(1+b^2\right)}=\sqrt{\left(a+b\right)\left(b+c\right)};\ \sqrt{ba\left(1+c^2\right)}=\sqrt{\left(a+c\right)\left(b+c\right)};$$

Nên

$$S=\frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{b}{\sqrt{(a+b)(b+c)}}\frac{c}{\sqrt{(a+c)(b+c)}}$$
$$=\sqrt{\frac{a}{a+b}.\frac{a}{a+c}}+\sqrt{\frac{b}{b+c}.\frac{b}{b+c}}+\sqrt{\frac{c}{c+b}.\frac{c}{a+c}}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được

$$\sqrt{\frac{a}{a+b}.\frac{a}{a+c}}\le\frac{1}{2}\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$S\le\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+c}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{a+c}+\frac{c}{b+c}\right)=\frac{3}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của S là $\frac{3}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\sqrt{3}$.

Cách 2. Ta viết lại giả thiết thành $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=1$.

Đặt $x=\frac{1}{a}; y=\frac{1}{b}; z=\frac{1}{c}$,khi đó giả thiết trở thành $xy+yz+zx=1$. Ta viết lại biểu thức S thành

$$S=\sqrt{\frac{yz}{x^2+1}}+\sqrt{\frac{zx}{y^2+1}}+\sqrt{\frac{xy}{z^2+1}}$$

Để ý đến giả thiết $xy+yz+zx=1$ ta được

$$S=\sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}}+\sqrt{\frac{zx}{(y+z)(x+z)}}+\sqrt{\frac{xy}{(z+x)(y+z)}}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta chứng minh được

$$\sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}}+\sqrt{\frac{zx}{(y+z)(x+z)}}+\sqrt{\frac{xy}{(z+x)(y+z)}}\le\frac{3}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của S là $\frac{3}{2}$.

Bài 19. Cho các số dương a, b c .Tìm giá trịnhỏ nhất của biểu thức

$$S=\frac{c(ab+1)^2}{b^2(bc+1)}+\frac{a(bc+1)^2}{c^2(ca+1)}+\frac{b(ca+1)^2}{a^2(ab+1)}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Phú Thọ năm 2010-2011

Lời giải

Cách1 Áp dụng bất đẳng thức AM - GM dạng $x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}$ ta được

$$S\ge 3\sqrt[3]{\frac{c(ab+1)^2.a(bc+1)^2.b(ca+1)^2}{b^2(bc+1).c^2(ac+1).a^2(ab+1)}}=3\sqrt[3]{\frac{(ab+1)(bc+1)(ac+1)}{abc}}$$

$$\ge 3\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{ab}.2\sqrt{bc}.2\sqrt{ca}}{abc}}=6$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là 6, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Cách 2. Đặt $x=\frac{ab+1}{b}; y=\frac{bc+1}{c}; z=\frac{ca+1}{a}$

Khi đó biểu thức được viết lại thành $S=\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}$

Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạngphân thức ta có

$$S=\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\ge\frac{(x+y+z)^2}{x+y+z}=x+y+z$$

Do đó ta được $S\ge\frac{ab+1}{b}+\frac{bc+1}{c}+\frac{ca+1}{a}=\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)+\left(c+\frac{1}{c}\right)\ge 6$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là 6, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài 20. Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x+y+z=18\sqrt{2}$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{x(y+z)}}+\frac{1}{\sqrt{y(z+x)}}+\frac{1}{\sqrt{z(x+y)}}\ge\frac{1}{4}$$

Đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên toán Đại học Vinh, 2010 – 2011

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{\sqrt{2x(y+z)}}+\frac{1}{\sqrt{2y(z+x)}}+\frac{1}{\sqrt{2z(x+y)}}\ge\frac{1}{4\sqrt{2}}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có $2\sqrt{2x(y+z)}\le 2x+y+z$, do đó ta được

$$\frac{1}{\sqrt{2x(y+z)}}\ge\frac{2}{2x+y+z}$$

Hoàn toàn tương tự ta được bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sqrt{2x(y+z)}}+\frac{1}{\sqrt{2y(z+x)}}+\frac{1}{\sqrt{2z(x+y)}}\ge 2\left(\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\right)$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\ge\frac{1}{8\sqrt{2}}$$

Thật vậy theo bất đẳng thức AM - GM ta được

$$\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\ge\frac{9}{4(x+y+z)}=\frac{9}{4.18\sqrt{2}}=\frac{1}{8\sqrt{2}}$$

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=6\sqrt{2}$.

Bài 21 Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$1+\frac{3}{a+b+c}\ge\frac{6}{ab+bc+ca}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh vĩnh Phúc năm 2010-2011

Lời giải

Cách 1. Bất đẳng thức đã cho tương đương

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)+3(ab+bc+ca)\ge 6(a+b+c)$$

Để ý rằng $(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c)=3(a+b+c)$.

Nên bài toán quy về chứng minh $\sqrt{3(a+b+c)^3}+3\sqrt{3(a+b+c)}\ge 6(a+b+c)$.

Bất đẳng thức trên tương đương với $\sqrt{3(a+b+c)}\left(\sqrt{a+b+c}-\sqrt{3}\right)^2\ge 0$.

Bất đẳng thức cuối cùng là một bất đẳng thức đúng. Vậy bài toán được chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Cách 2. Đặt $a=\frac{1}{x};b=\frac{1}{y};c=\frac{1}{z}\Rightarrow xyz=1$.Khi đó ta có

$$1+\frac{3}{a+b+c}\ge\frac{6}{ab+bc+ca}\Leftrightarrow 1+\frac{3abc}{a+b+c}\ge\frac{6abc}{ab+bc+ca}$$
$$\Leftrightarrow 1+\frac{3}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}}\ge\frac{6}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\Leftrightarrow 1+\frac{3}{xy+yz+zx}\ge\frac{6}{x+y+z}$$

Theo bất đẳng thức AM - GM ta có $3(xy+yz+zx)\le(x+y+z)^2$

Suy ra $1+\frac{3}{xy+yz+zx}\ge 1+\frac{9}{(x+y+z)^2}$

Mặt khác $1+\frac{9}{(x+y+z)^2}-\frac{6}{x+y+z}=\left(1-\frac{3}{x+y+z}\right)^2\ge 0$ với $\forall x,y,z>0$.

Nên ta được $1+\frac{9}{(x+y+x)^2}\ge\frac{6}{x+y+z}$

Từ đó ta được bất đẳng thức $1+\frac{3}{xy+yz+zx}\ge\frac{6}{x+y+z}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 22. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c\le 2$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}\ge\frac{\sqrt{97}}{2}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán TP Hải Phòng năm 2010-2011

Lời giải

Cách 1. Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức sau

$$\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+y^2}\ge\sqrt{(a+b)^2+(x+y)^2}$$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2\ge(a+x)^2+(b+y)^2$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}\ge 2ax+2by\Leftrightarrow(a^2+b^2)(x^2+y^2)\ge(ax+by)^2$$

Bất đẳng thức cuối cùng là bất đẳng thức Cauchy - Schwarz

Áp dụng bất đẳng thức trên ta có

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}\ge\sqrt{(a+b)^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}$$

$$\ge\sqrt{(a+b+c)^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}$$

Ta cần chứng minh $(a+b+c)^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2\ge\frac{97}{4}$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức AM - GM và chú ý giả thiết $a+b+c\le 2$, ta được

$$(a+b+c)^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2\ge(a+b+c)^2+\frac{81}{(a+b+c)^2}$$

$$=\left[(a+b+c)^2+\frac{16}{(a+b+c)^2}\right]+\frac{65}{(a+b+c)^2}\ge\frac{97}{4}$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{2}{3}$

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta được

$$\sqrt{\left(a^2+\frac{1}{b^2}\right)\left(1+\frac{81}{16}\right)}\ge\sqrt{\left(a+\frac{9}{4b}\right)^2}=a+\frac{9}{4b}$$

Hay $\frac{\sqrt{97}}{4}\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}\ge a+\frac{9}{4b}$. Chứng minh tương tự ta được

$$\frac{\sqrt{97}}{4}\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}\ge b+\frac{9}{4c};\ \frac{\sqrt{97}}{4}\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}\ge c+\frac{9}{4a}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{\sqrt{97}}{4}\left(\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}\right)\ge a+b+c+\frac{9}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Mà ta lại có $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{a+b+c}$. Do đó ta được

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}\ge\frac{4}{\sqrt{97}}\left[a+b+c+\frac{81}{4(a+b+c)}\right]$$

Ta cần chứng minh $\frac{4}{\sqrt{97}}\left[a+b+c+\frac{81}{4(a+b+c)}\right]\ge\frac{\sqrt{97}}{2}$, hay $a+b+c+\frac{81}{4(a+b+c)}\ge\frac{97}{8}$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được

$$a+b+c+\frac{81}{4(a+b+c)}=a+b+c+\frac{4}{a+b+c}+\frac{65}{4(a+b+c)}$$
$$\ge 2\sqrt{(a+b+c)\frac{4}{a+b+c}}+\frac{65}{4.2}=4+\frac{65}{8}=\frac{97}{8}$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{2}{3}$

Bài 23 Cho các số a, b, $c\in[1;2]$. Chứng minh rằng $\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{b^2+c^2}{bc}+\frac{c^2+a^2}{ca}\le 7$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Hà Tĩnh năm 2010-2011

Lời giải

Cách 1. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2\le 7abc$$
$$\Leftrightarrow c\left(ab-ca-b^2+bc\right)+a\left(ab-ca-b^2+bc\right)+5abc-2bc^2-2a^2b\ge 0$$
$$\Leftrightarrow\left(ab-ca-b^2+bc\right)(c+a)+b\left(4ca-2c^2-2a^2+ca\right)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow(a-b)(b-c)(c+a)+b(2a-c)(2c-a)\ge 0$$

Vì vai trò của a, b, c như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử $2\ge a\ge b\ge c\ge 1$ khi đó ta được $2a\ge 2\ge c;\ 2c\ge 2\ge a$. Do đó ta được

$$(a-b)(b-c)(c+a)\ge 0;\ b(2a-c)(2c-a)\ge 0$$

Nên bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=2;\ c=1$ và các hoán vị.

Cách 2. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\le 7$$

Vì vai trò các biến như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử $2\ge a\ge b\ge c\ge 1$. Khi đó ta có

$$\frac{a}{c}+1-\frac{a}{b}-\frac{b}{c}=\left(\frac{a}{b}-1\right)\left(\frac{b}{c}-1\right)\ge 0$$
$$\frac{c}{a}+1-\frac{b}{a}-\frac{c}{b}=\left(\frac{b}{a}-1\right)\left(\frac{c}{b}-1\right)\ge 0$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+2-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)\ge 0\Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+2\ge\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$2\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)\le 5\Leftrightarrow (2a-c)(a-2c)\le 0$$

Từ $2\ge a\ge b\ge c\ge 1$ suy ra $2a\ge 2\ge c;\ 2c\ge 2\ge a$ nên bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 24. Cho a, b, c là các số thực dương không âm thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=a\sqrt{b}+b\sqrt{c}+c\sqrt{a}-\sqrt{abc}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Nghệ An năm 2010-2011

Lời giải

Đặt $x=\sqrt{a};\ y=\sqrt{b};\ z=\sqrt{c}$. Từ giả thiết ta được $x^2+y^2+z^2=3$, khi này biểu thức P trở thành

$$P=x^2y+y^2z+z^2x-xyz.$$

Dễ thấy $P\ge 0$ theo bất đẳng thức AM – GM.

Không mất tính tổng quát ta giả sử y là số nằm giữa x, z. Khi đó ta có

$$z(y-z)(y-x)\le 0\Leftrightarrow y^2z+z^2x-xyz\le z^2y$$

Do đó ta có $P=x^2y+y^2z+z^2x-xyz\le x^2y+z^2y=y\left(x^2+z^2\right)$

Mặt khác theo bất đẳng thức AM - GM ta có

$$2y^2\left(x^2+z^2\right)\left(x^2+z^2\right)\le\left(\frac{2x^2+2y^2+2z^2}{3}\right)^3=8$$

Suy ra $y\left(x^2+z^2\right)\le 2$ nên ta được $P\le 2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l} x=y=z \\ \begin{cases} z=0 \\ x^2=2y^2 \end{cases} \end{array}\right. \text{ và các hoán vị} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=c=1 \\ a=2;\ b=1;\ c=0 \end{array}\right. \text{ và các hoán vị}$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là 2.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$ hoặc $a=2;\ b=1;\ c=0$ và các hoán vị.

Bài 25. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{a^2+1}-a}{bc}+\frac{\sqrt{b^2+1}-b}{ac}+\frac{\sqrt{c^2+1}-c}{ab}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Hưng Yên năm 2010-2011

Lời giải

Để ý là $a^2+1=a^2+ab+bc+ca=(a+b)(c+a)$, do đó ta được

$$\sqrt{a^2+1}=\sqrt{(a+b)(c+a)}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được

$$\frac{\sqrt{a^2+1}-a}{bc}=\frac{\sqrt{(a+b)(c+a)}-a}{bc}\le\frac{\frac{2a+b+c}{2}-a}{bc}=\frac{b+c}{2bc}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Hoàn toàn tương tự ta được $\dfrac{\sqrt{b^2+1}-b}{ac}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}\right);\ \dfrac{\sqrt{c^2+1}-c}{ab}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{\sqrt{a^2+1}-a}{bc}+\frac{\sqrt{b^2+1}-b}{ac}+\frac{\sqrt{c^2+1}-c}{ab}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Bài 26.

a) Cho 2 số dương a và b. Chứng minh rằng $\frac{1}{a+b}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$.

b) Cho 3 số dương x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2010.$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Phú Yên năm 2010-2011

Lời giải

a) Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên như sau

$$\frac{1}{a+b}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\Leftrightarrow 4ab\le(a+b)^2\Leftrightarrow 0\le(a-b)^2$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$

b) Áp dụng bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{2x+y+z}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}\right)\le\frac{1}{16}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{1}{x+2y+z}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}\right);\ \frac{1}{x+y+2z}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}\right)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$P=\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{2010}{4}=\frac{1005}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{1005}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=670$

Bài 27. Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c\le 3.$ Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\ge\frac{3}{2}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Bình Phước năm 2011-2012

Lời giải

Cách 1. Theo bất đẳng thức AM - GM ta có

$$A=\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\ge\frac{9}{3+ab+bc+ca}$$

Mặt khác dễ thấy $ab+bc+ca\le\frac{(a+b+c)^2}{3}$

Mà $a+b+c\le 3$ nên $ab+bc+ca\le 3$.

Do đó ta được $A\ge\frac{9}{3+ab+bc+ca}\ge\frac{9}{3+3}=\frac{3}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} 1+ab=1+bc=1+ca \\ a=b=c \\ a+b+c=3 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=1$

Cách 2Áp dụng bấtđẳng thức AM - GM ta có

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1+ab}{4}\ge 2\sqrt{\frac{1}{1+ab}.\frac{1+ab}{4}}=1 \Rightarrow \frac{1}{1+ab}\ge 1-\frac{1+ab}{4}=\frac{3-ab}{4}$$

Hoàn toàn tương tự ta có $\frac{1}{1+ab}\ge\frac{3-ab}{4};\ \frac{1}{1+ca}\ge\frac{3-ca}{4}$

Do đó ta được $\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\ge\frac{9-(ab+bc+ca)}{4}$.

Mặt khác ta chứng minh được $ab+bc+ca\le 3$

Do đó ta suy ra $\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\ge\frac{9-(ab+bc+ca)}{4}\ge\frac{3}{2}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 3Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\frac{1}{1+ab}=1-\frac{ab}{1+ab}\ge 1-\frac{ab}{2\sqrt{ab}}=1-\frac{\sqrt{ab}}{2}$$

Tương tự ta có $\frac{1}{1+bc}\ge 1-\frac{\sqrt{bc}}{2};\ \frac{1}{1+ca}\ge 1-\frac{\sqrt{ca}}{2}$

Cộng theo vế theo vế các bất đẳng thức trên và áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\ge 3-\frac{1}{2}\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)$$
$$\ge 3-\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}\right)=3-\frac{a+b+c}{2}\ge 3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

Bài toán được chứng minh xong.

Bài 28. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+...+\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}>4$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐHSP Hà Nội năm 2011-2012

Lời giải

Dễ thấy $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}>\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}};...\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}>\frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$

Do đó ta được

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}>\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+...+\frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$$

Suy ra

$$2\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}\right)>\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$$

Hay $2\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}\right)>\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+...+\sqrt{81}-\sqrt{80}$

Nên ta được $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}>4$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 29. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)}\ge abc+\sqrt[3]{\left(a^3+abc\right)\left(b^3+abc\right)\left(c^3+abc\right)}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Nghệ An năm 2011-2012

Lời giải

Cách 1. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sqrt{\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\right)}\ge 1+\sqrt[3]{\left(\frac{a^2}{bc}+1\right)\left(\frac{b^2}{ca}+1\right)\left(\frac{c^2}{ab}+1\right)}$$

Đặt $x=\frac{a}{b};\ y=\frac{b}{c};\ z=\frac{c}{a}\Rightarrow x;\ y;\ z>0;\ xyz=1$

Khi đó bất đẳng thức trên trở thành

$$\sqrt{\left(xy+yz+zx\right)\left(x+y+z\right)}\ge 1+\sqrt[3]{\left(\frac{x}{z}+1\right)\left(\frac{y}{x}+1\right)\left(\frac{z}{y}+1\right)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)+xyz}\ge 1+\sqrt[3]{\frac{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)}{xyz}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)+1}\ge 1+\sqrt[3]{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)}$$

Đặt $t=\sqrt[3]{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)}$ suy ra $t\ge 2$. Khi đó ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$\sqrt{t^3+1}\ge 1+t\Leftrightarrow t^3+1\ge 1+2t+t^2\Leftrightarrow t\left(t-2\right)\left(t+1\right)\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng do $t\ge 2$.

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Cách 2. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sqrt{\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\right)}\ge 1+\sqrt[3]{\left(\frac{a^2}{bc}+1\right)\left(\frac{b^2}{ca}+1\right)\left(\frac{c^2}{ab}+1\right)}$$

Hay $\sqrt{3+\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}+\frac{ab}{c^2}+\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}}\ge 1+\sqrt[3]{\left(\frac{a^2}{bc}+1\right)\left(\frac{b^2}{ca}+1\right)\left(\frac{c^2}{ab}+1\right)}$

Đặt $x=\frac{a^2}{bc};\ y=\frac{b^2}{ca};\ z=\frac{c^2}{ab}$,khi đó ta có $xyz=1$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\sqrt{3+x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}\ge 1+\sqrt[3]{\left(1+x\right)\left(1+y\right)\left(1+z\right)}$$

Hay $\sqrt{3+x+y+z+xy+yz+zx}\ge 1+\sqrt[3]{2+x+y+z+xy+yz+zx}$.

Đặt $t=\sqrt[3]{2+x+y+z+xy+yz+zx}$. Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$x+y+z+xy+yz+zx\ge 6$$

Do đó ta có $t\ge \sqrt[3]{2+6}=2$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\sqrt{t^3+1}\ge 1+t\Leftrightarrow t^2+1\ge t^2+2t+1\Leftrightarrow t\left(t+1\right)\left(t-2\right)\ge 0$$

Đánh giá cuối cùng đúng với mọi $t\ge 2$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 30. Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $a+b+c=2$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{ab}{\sqrt{ab+2c}}+\frac{bc}{\sqrt{bc+2a}}+\frac{ca}{\sqrt{ca+2b}}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Thanh Hóa năm 2011-2012

Lời giải

Để ý đến giả thiết $a+b+c=2$ ta có $ab+2c=ab+c(a+b+c)=(b+c)(c+a)$

Do đó theo bất đẳng thức AM - GM ta được

$$\frac{ab}{\sqrt{ab+2c}}=\frac{ab}{\sqrt{(b+c)(c+a)}}\le\frac{2ab}{b+c}+\frac{2ab}{c+a}$$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{bc}{\sqrt{bc+2a}}\le\frac{2bc}{a+b}+\frac{2bc}{c+a};\ \frac{ca}{\sqrt{ca+2b}}\le\frac{2ca}{a+b}+\frac{2ca}{b+c}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{ab}{\sqrt{ab+2c}}+\frac{bc}{\sqrt{bc+2a}}+\frac{ca}{\sqrt{ca+2b}}\le\frac{2ab}{b+c}+\frac{2ab}{c+a}+\frac{2bc}{a+b}+\frac{2bc}{c+a}+\frac{2ca}{a+b}+\frac{2ca}{b+c}$$
$$=2(a+b+c)=4$$

Hay $P\le 4$. Vậy giá trị lớn nhất của P là 4.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{2}{3}$

Bài 31. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=\frac{9}{4}$. Chứng minh rằng

$$a^3+b^3+c^3>a\sqrt{b+c}+b\sqrt{a+c}+c\sqrt{a+b}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Vĩnh Phúc năm 2011-2012

Lời giải

Cách 1. Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\frac{a^3+b^3}{2}\ge\frac{ab(a+b)}{2}>\frac{ab(a+b)}{\frac{9}{4}}=\frac{ab(a+b)}{abc}=\frac{a+b}{c}$$

Từ đó ta có $c^3+\frac{a^3+b^3}{2}>c^3+\frac{a+b}{c}\ge 2c\sqrt{a+b}$. Tương tự ta có

$$b^3+\frac{a^3+c^3}{2}>b^3+\frac{a+c}{b}\ge 2b\sqrt{a+c}$$
$$a^3+\frac{b^3+c^3}{2}>a^3+\frac{b+c}{a}\ge 2a\sqrt{b+c}$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$a^3+b^3+c^3>a\sqrt{b+c}+b\sqrt{a+c}+c\sqrt{a+b}$$

Bài toán được chứng minh xong.

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có

$$\left(a\sqrt{b+c}+b\sqrt{a+c}+c\sqrt{a+b}\right)^2\le 2(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)$$
$$<\frac{9}{4}2(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)=abc(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Theo một bất đẳng thức quen thuộc ta có $abc(a+b+c)\le\frac{1}{3}(ab+bc+ca)^2$. Từ đó ta được

$$abc(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \le (a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)^2$$
$$\le \frac{(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca+ab+bc+ca)^3}{3^4} = \frac{(a+b+c)^6}{3^4}$$

Do đó ta có $\left(a\sqrt{b+c}+b\sqrt{a+c}+c\sqrt{a+b}\right)^2 < \frac{(a+b+c)^6}{3^4}$.

Hay $a\sqrt{b+c}+b\sqrt{a+c}+c\sqrt{a+b} < \frac{(a+b+c)^3}{3^2}$.

Dễ dàng chứng minh được $(a^3+b^3+c^3) \ge \frac{(a+b+c)^3}{9}$.

Từ đó ta được bất đẳng thức sau

$$a^3+b^3+c^3 > a\sqrt{b+c}+b\sqrt{a+c}+c\sqrt{a+b}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 32. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\sqrt{c^2(a^2+b^2)^2+a^2(b^2+c^2)^2+b^2(c^2+a^2)^2} \ge \frac{54(abc)^3}{(a+b+c)^2\sqrt{(ab)^4+(bc)^4+(ca)^4}}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Vĩnh Phúc năm 2011-2012

Lời giải

Theo bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\sqrt{c^2(a^2+b^2)^2+a^2(b^2+c^2)^2+b^2(c^2+a^2)^2} \ge \sqrt{c^2(2ab)^2+a^2(2bc)^2+b^2(2ca)^2} = \sqrt{12a^2b^2c^2} = 2\sqrt{3}abc$$

$$(a+b+c)^2\sqrt{(ab)^4+(bc)^4+(ca)^4} \ge \left(3\sqrt[3]{abc}\right)^2\sqrt{3\sqrt[3]{a^8b^8c^8}} = 9\sqrt{3.\sqrt[3]{a^4b^4c^3}.\sqrt[3]{a^8b^8c^8}} = 9\sqrt{3}a^2b^2c^2$$

Nhân theo vế hai bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{c^2(a^2+b^2)^2+a^2(b^2+c^2)^2+b^2(c^2+a^2)^2}\,(a+b+c)^2\sqrt{(ab)^4+(bc)^4+(ca)^4}$$
$$= 2\sqrt{3}abc.9\sqrt{3}a^2b^2c^2 = 54(abc)^3$$

Hay $\sqrt{c^2(a^2+b^2)^2+a^2(b^2+c^2)^2+b^2(c^2+a^2)^2} \ge \frac{54(abc)^3}{(a+b+c)^2\sqrt{(ab)^4+(bc)^4+(ca)^4}}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 33. Cho các số dương a,b,c thay đổi và thoã mãn $3a+4b+5c=12$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = \frac{ab}{ab+a+b} + \frac{2ac}{ac+a+c} + \frac{3bc}{bc+b+c}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Bà Rịa – Vũng Tàu năm 2011-2012

Lời giải

Ta viết lại biểu thức S thành $S = \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+1} + \frac{2}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+1} + \frac{3}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+1}$.

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x+y+z} \le \frac{1}{9}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ ta có

$$S=\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+1}+\frac{2}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+1}+\frac{3}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+1}\le\frac{a+b+1}{9}+\frac{2(c+a+1)}{9}+\frac{3(b+c+1)}{9}$$

$$=\frac{6+3a+4b+5c}{9}=\frac{18}{9}=2$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức S là 2. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 34. Cho a, b là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{\frac{a^3}{a^3+8b^3}}+\sqrt{\frac{4b^3}{b^3+(a+b)^3}}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐH KHTN Hà Nội năm 2011-2012

Lời giải

Biểu thức P được viết lại là $P=\sqrt{\frac{1}{1+\frac{8b^3}{a^3}}}+\sqrt{\frac{\frac{4b^3}{a^3}}{\frac{b^3}{a^3}+\left(1+\frac{b}{a}\right)^3}}$

Đặt $t=\frac{b}{a}>0$. Khi đó bất đẳng thức được viết lại là $P=\sqrt{\frac{1}{1+8t^3}}+\sqrt{\frac{4t^3}{t^3+(1+t)^3}}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$1+8t^3=(1+2t)(1-2t+4t^2)\le\frac{(2+4t^2)^2}{2}=(1+2t^2)^2$$

Suy ra $\sqrt{\frac{1}{1+8t^3}}\ge\sqrt{\frac{1}{(1+2t^2)^2}}=\frac{1}{1+2t^2}$. Ta sẽ chứng minh $\sqrt{\frac{4t^3}{t^3+(1+t)^3}}\ge\frac{2t^2}{1+2t^2}$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{4t^3}{t^3+(1+t)^3}\ge\left(\frac{2t^2}{1+2t^2}\right)^2\Leftrightarrow(1+2t^2)^2\ge t^4+t(1+t)^3\Leftrightarrow(t-1)^2(2t^2+t+1)\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng với mọi t. Do đó ta được

$$P=\sqrt{\frac{1}{1+8t^3}}+\sqrt{\frac{4t^3}{t^3+(1+t)^3}}\ge\frac{1}{1+2t^2}+\frac{2t^2}{1+2t^2}=1$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 1. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$

Bài 35. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{3a+3b+2c}{\sqrt{6(a^2+5)}+\sqrt{6(b^2+5)}+\sqrt{c^2+5}}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐH KHTN Hà Nội năm 2011-2012

Lời giải

Từ giả thiết $ab+bc+ca=5$ ta có

$$a^2+5=a^2+ab+bc+ca=(a+b)(c+a)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\sqrt{6(a^2+5)}=\sqrt{6(a+b)(c+a)}\le\frac{3(a+b)+2(c+a)}{2}=\frac{5a+3b+2c}{4}$$

Chứng minh tương tự ta được

$$\sqrt{6\left(b^2+5\right)} \le \frac{3a+5b+2c}{2};\ \sqrt{c^2+5} \le \frac{a+b+2c}{2}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{6\left(a^2+5\right)}+\sqrt{6\left(b^2+5\right)}+\sqrt{c^2+5} \le \frac{9a+9b+6c}{2}$$

Suy ra $P=\dfrac{3a+3b+2c}{\sqrt{6\left(a^2+5\right)}+\sqrt{6\left(b^2+5\right)}+\sqrt{c^2+5}} \ge \dfrac{2\left(3a+3b+2c\right)}{9a+9b+6c}=\dfrac{2}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\dfrac{2}{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1;\ c=2$.

Bài 36. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{a^2+abc}+\sqrt{b^2+abc}+\sqrt{c^2+abc}+9\sqrt{abc}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Bắc Ninh năm 2011-2012

Lời giải

Ta có $a^2+abc=a^2\left(a+b+c\right)+abc=a\left(a+b\right)\left(a+c\right)$

Do đó ta được $\sqrt{a^2+abc}=\sqrt{a\left(a+b\right)\left(a+c\right)} \le \dfrac{\sqrt{a}\left(a+b+a+c\right)}{2}=\dfrac{\sqrt{a}\left(a+1\right)}{2}$

Chứng minh tương tự ta được

$$\sqrt{b^2+abc} \le \frac{\sqrt{b}\left(b+1\right)}{2};\ \sqrt{c^2+abc} \le \frac{\sqrt{c}\left(c+1\right)}{2}$$

Do đó ta được

$$\sqrt{a^2+abc}+\sqrt{b^2+abc}+\sqrt{c^2+abc} \le \frac{\sqrt{a}\left(a+1\right)}{2}+\frac{\sqrt{b}\left(b+1\right)}{2}+\frac{\sqrt{c}\left(c+1\right)}{2}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức AM - GM ta lại có

$$\frac{\sqrt{a}\left(a+1\right)}{2}+\sqrt{abc} \le \sqrt{a}\left(\frac{a+1}{2}+\frac{b+c}{2}\right)=\sqrt{a}\left(\frac{a+b+c+1}{2}\right)=\sqrt{a}$$

Chứng minh tương tự ta được

$$\frac{\sqrt{b}\left(b+1\right)}{2}+\sqrt{abc} \le \sqrt{b};\ \frac{\sqrt{c}\left(c+1\right)}{2}+\sqrt{abc} \le \sqrt{c}$$

Như vậy ta có

$$P=\sqrt{a^2+abc}+\sqrt{b^2+abc}+\sqrt{c^2+abc}+9\sqrt{abc} \le \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+6\sqrt{abc}$$

Mà ta có

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \le \sqrt{3\left(a+b+c\right)}=\sqrt{3};\ 6\sqrt{abc} \le 6\sqrt{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Nên ta suy ra $P \le \sqrt{3}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{5}{\sqrt{3}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Bài 37. Cho a, b, c là số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{2ab}{3a+8b+6c}+\frac{3bc}{3b+6c+a}+\frac{3ca}{9c+4a+4b} \le \frac{a+2b+3c}{9}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Phú Thọ năm 2011-2012

Lời giải

Cách 1. Đặt $x = a; y = 2b; z = 3c$, khi đó bất đẳng thức trên được viết lại thành

$$\frac{xy}{3x+4y+2z}+\frac{yz}{3y+4z+2x}+\frac{zx}{3z+4x+2y}\le\frac{x+y+z}{9}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được

$$\frac{xy}{3x+4y+2z}=\frac{xy}{x+2y+x+y+z+x+y+z}\le\frac{xy}{9}\left(\frac{1}{x+2y}+\frac{2}{x+y+z}\right)$$

$$\le\frac{xy}{9}\left(\frac{1}{9x}+\frac{2}{9y}+\frac{2}{x+y+z}\right)=\frac{2x+y}{81}+\frac{2xy}{9(x+y+z)}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{yz}{3y+4z+2x}\le\frac{2y+z}{81}+\frac{2yz}{9(x+y+z)};\frac{zx}{3z+4x+2y}\le\frac{2z+x}{81}+\frac{2zx}{9(x+y+z)}$$

Cộng theo các vế cảu ba bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{xy}{3x+4y+2z}+\frac{yz}{3y+4z+2x}+\frac{zx}{3z+4x+2y}\le\frac{x+y+z}{27}+\frac{2(xy+yz+zx)}{9(x+y+z)}$$

Mà theo một đánh giá quen thuộc ta lại có $xy+yz+zx\le\frac{(x+y+z)^2}{3}$

Do đó ta có $\frac{x+y+z}{27}+\frac{2(xy+yz+zx)}{9(x+y+z)}\le\frac{x+y+z}{27}+\frac{2(x+y+z)}{27}=\frac{x+y+z}{9}$

Suy ra $\frac{xy}{3x+4y+2z}+\frac{yz}{3y+4z+2x}+\frac{zx}{3z+4x+2y}\le\frac{x+y+z}{9}$

Hay bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 2b = 3c$.

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng phân thức ta có

$$\frac{xy}{3x+4y+2z}=\frac{xy}{81}.\frac{(6+2+1)^2}{2(x+y+z)+2y+x}\le\frac{xy}{81}\left(\frac{18}{x+y+z}+\frac{2}{y}+\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{2xy}{9(x+y+z)}+\frac{2x+y}{81}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{yz}{3y+4z+2x}\le\frac{2y+z}{81}+\frac{2yz}{9(x+y+z)};\frac{zx}{3z+4x+2y}\le\frac{2z+x}{81}+\frac{2zx}{9(x+y+z)}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{xy}{3x+4y+2z}+\frac{yz}{3y+4z+2x}+\frac{zx}{3z+4x+2y}\le\frac{x+y+z}{27}+\frac{2(xy+yz+zx)}{9(x+y+z)}$$

Đến đây chứng minh hoàn toàn tương tự như trên.

Bài 38. Giả sử a, b, c là các số dương thoả mãn $abc = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M=\frac{a}{b^2+c^2+a}+\frac{b}{c^2+a^2+b}+\frac{c}{a^2+b^2+c}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Hải Dương năm 2011-2012

Lời giải

Ta chứng minh $M\le 1$.

Đặt $\sqrt[3]{a}=x;\ \sqrt[3]{b}=y;\ \sqrt[3]{c}=z$,khi đó $x;\ y;\ z>0$ và $xyz=1$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{x^3}{y^6+z^6+x^3}+\frac{y^3}{z^6+x^6+y^3}+\frac{z^3}{x^6+y^6+z^3}\le 1$$

Dễ thấy $(y-z)\left(y^5-z^5\right)\ge 0\Rightarrow y^6+z^6\ge y^5z+yz^5$, suy ra $y^6+z^6+x^4yz\ge yz\left(x^4+y^4+z^4\right)$.

Từ đó ta được $\dfrac{1}{y^6+z^6+x^3}\le\dfrac{1}{yz\left(x^4+y^4+z^4\right)}$, hay $\dfrac{x^4yz}{y^6+z^6+x^3}\le\dfrac{x^4}{x^4+y^4+z^4}$.

Do đó ta được $\dfrac{x^3}{y^6+z^6+x^3}\le\dfrac{x^4}{x^4+y^4+z^4}$. Tương tự ta có

$$\frac{y^3}{z^6+x^6+y^3}\le\frac{y^4}{x^4+y^4+z^4};\ \frac{z^3}{x^6+y^6+z^3}\le\frac{z^4}{x^4+y^4+z^4}$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{x^3}{y^6+z^6+x^3}+\frac{y^3}{z^6+x^6+y^3}+\frac{z^3}{x^6+y^6+z^3}\le 1$$

Vậy giá trị lớn nhất của M là 1. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 39. Cho a, b, c là các số dương thoả mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b(c+a)}+\frac{b^3}{c(a+b)}+\frac{c^3}{a(b+c)}\ge\frac{3}{2}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Thái Bình năm 2011-2012

Lời giải

Cách 1. Áp dụng bất đẳng thức AM - GM cho các số dương ta được

$$\frac{a^3}{b(c+a)}+\frac{b}{2}+\frac{c+a}{4}\ge\frac{3}{2}a;\ \frac{b^3}{c(a+b)}+\frac{c}{2}+\frac{a+b}{4}\ge\frac{3}{2}b;\ \frac{c^3}{a(b+c)}+\frac{a}{2}+\frac{b+c}{4}\ge\frac{3}{2}c$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^3}{b(c+a)}+\frac{b^3}{c(a+b)}+\frac{c^3}{a(b+c)}+a+b+c\ge\frac{3(a+b+c)}{2}$$

Hay $\dfrac{a^3}{b(c+a)}+\dfrac{b^3}{c(a+b)}+\dfrac{c^3}{a(b+c)}\ge\dfrac{a+b+c}{2}$

Mặt khác theo bất đẳng thức AM - GM ta lại có $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}=3$

Nên ta được $\dfrac{a^3}{b(c+a)}+\dfrac{b^3}{c(a+b)}+\dfrac{c^3}{a(b+c)}\ge\dfrac{3}{2}$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức bunhiacioxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^3}{b(c+a)}+\frac{b^3}{c(a+b)}+\frac{c^3}{a(b+c)}\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^2b+b^2c+c^2a+3abc}$$

Ta cần chứng minh được $2\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\ge 3\left(a^2b+b^2c+c^2a+3abc\right)$

Vì $abc=1$ nên ta được $a+b+c\ge 3$.

Dễ thấy $\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\ge\dfrac{(a+b+c)^2\left(a^2+b^2+c^2\right)}{3}\ge(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$2\left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 3\left(a^2b+b^2c+c^2a+3abc\right)$$

Hay

$$2\left(a^3+b^3+c^2+a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2\right)\ge 3\left(a^2b+b^2c+c^2a+3abc\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(a^3+b^3+c^2\right)+2\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)\ge a^2b+b^2c+c^2a+9$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$a^3+ab^2\ge 2a^2b;\ b^3+bc^2\ge 2b^2c;\ c^3+ca^2\ge 2c^2a$$

$$3\left(a^3+b^3+c^3\right)\ge 9abc=9;\ 3\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)\ge 9abc=9$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên và thu gọn ta được

$$2\left(a^3+b^3+c^2\right)+2\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)\ge a^2b+b^2c+c^2a+9$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 40. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$ .Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$A=14\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐHQG TP Hồ Chí Minh năm 2012-2013

Lời giải

Dễ dàng tính được $ab+bc+ca=\frac{1-\left(a^2+b^2+c^2\right)}{2}$. Lại có

$$a^2+b^2+c^2=\left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)=a^3+b^2a+b^3+bc^2+c^3+ca^2+a^2b+b^2c+c^2a$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$a^3+b^2a\ge 2a^2b;\ b^3+bc^2\ge 2b^2c;\ c^3+ca^2\ge 2c^2a$$

Do đó suy ra

$$a^2+b^2+c^2=a^3+b^2a+b^3+bc^2+c^3+ca^2+a^2b+b^2c+c^2a\ge 3\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)$$

Từ đó ta được $\frac{1}{a^2b+b^2c+c^2a}\ge\frac{3}{a^2+b^2+c^2}$, hay $\frac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a}\ge\frac{3\left(ab+bc+ca\right)}{a^2+b^2+c^2}=\frac{3-3\left(a^2+b^2+c^2\right)}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}$

Đặt $t=a^2+b^2+c^2\Rightarrow t\ge\frac{1}{3}$. Khi này biểu thức được viết lại thành

$$A=14t+\frac{3-3t}{2t}=\frac{28t}{2}+\frac{3}{2t}-\frac{3t}{2t}=\frac{27t}{2}+\frac{3}{2t}+\frac{t}{2}-\frac{3}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có $\frac{27t}{2}+\frac{3}{2t}\ge 2\sqrt{\frac{27t}{2}.\frac{3}{2t}}=9$

Mặt khác $\frac{t}{2}-\frac{3}{2}\ge\frac{1}{6}-\frac{3}{2}=-\frac{4}{3}$. Suy ra $A\ge 9-\frac{4}{3}=\frac{23}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{23}{3}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Bài 41. Cho a, b, clàcác số thực dương thỏa mãn $a\le b\le 3\le c;\ c\ge b+1;\ a+b\ge c$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=\frac{2ab+a+b+c\left(ab-1\right)}{\left(a+1\right)\left(b+1\right)\left(c+1\right)}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐH KHTN Hà Nội năm 2012-2013

Lời giải

Cách 1. Ta có

$$\begin{aligned}Q&=\frac{2ab+a+b+c(ab-1)}{(a+1)(b+1)(c+1)}=\frac{(a+1)(b+1)+(ab-1)(c+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)}\\&=\frac{1}{c+1}+\frac{ab-1}{(a+1)(b+1)}=\frac{1}{a+b+1}+\frac{ab-1}{ab+a+b+1}\end{aligned}$$

Từ giả thiết $a+b\ge c\ge b+1\Rightarrow b\ge a\ge 1\Rightarrow (a-1)(b-1)\ge 0\Rightarrow ab\ge a+b-1\ge c-1\ge 2$.

Suy ra $Q\ge \frac{1}{ab+2}+\frac{ab-1}{2(ab+1)}$. Đặt $x=ab\Rightarrow x\ge 2$, khi đó ta được $Q\ge \frac{1}{x+2}+\frac{x-1}{2(x+1)}$

Suy ra $Q-\frac{5}{12}\ge \frac{1}{x+2}+\frac{x-1}{2(x+1)}-\frac{5}{12}=\frac{(x-2)(x+5)}{12(x+1)(x+2)}\ge 0$

Do đó ta có $Q\ge \frac{5}{12}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là $\frac{5}{12}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=1;b=2;c=3$

Cách 2. Nhận thấy $a+b\ge c\ge b+1\Rightarrow a\ge 1$ do đó ta được $c\ge 3\ge b\ge a\ge 1$

Khi đó $(a-1)(b-1)\ge 0\Leftrightarrow ab\ge a+b-1\ge c-1$

Ta sẽ chứng minh $Q\ge \frac{5}{12}$. Thật vậy $Q=\frac{2ab+a+b+c(ab-1)}{(a+1)(b+1)(c+1)}\ge \frac{5}{12}$

Tương đương với $7abc+7(a+b)+19ab-5c(a+b)-17c-5\ge 0$

Đặt $A=7abc+7(a+b)+19ab-5c(a+b)-17c-5$ khi đó ta có

$$\begin{aligned}A&=7abc+7(a+b)+19ab-5c(a+b)-17c-5\\&=5abc+2abc+7(a+b)+19ab-5c(a+b)-17c-5\\&\ge 5c(a+b-1)+6(c-1)+7c+19(c-1)-5c(a+b)-17c-5\\&=10c-30\ge 0\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là $\frac{5}{12}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=1;b=2;c=3$

Cách 3 Ta có $a+b\ge c\Rightarrow a+b-c\ge 0$

Từ $a+b\ge c\ge b+1\Rightarrow a\ge 1$ mà $b\ge a$. Do đó ta được

$$(a-1)(b-1)\ge 0\Rightarrow \begin{cases}ab\ge a+b-1\\a+b\le ab+1\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}ab\ge c-1\\a+b\le ab+1\end{cases}$$

Khi đó ta được

$$\begin{aligned}Q&=\frac{2ab+a+b+c(ab-1)}{(a+1)(b+1)(c+1)}=\frac{2ab+a+b-c+abc}{(a+1)(b+1)(c+1)}\ge \frac{2ab+abc}{(a+1)(b+1)(c+1)}\\&=\frac{ab(2+c)}{(ab+a+b+1)(c+1)}\ge \frac{ab(2+c)}{(ab+ab+1+1)(c+1)}=\frac{ab(2+c)}{2(ab+1)(c+1)}\\&=\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{ab}\right)}.\frac{c+2}{c+1}\ge \frac{1}{2\left(1+\frac{1}{c-1}\right)}.\frac{c+2}{c+1}=\frac{(c-1)(c+2)}{2c(c+1)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{c^2+c}\ge \frac{5}{12}\end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là $\frac{5}{12}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=1;b=2;c=3$

Bài 42. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=3abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Bình Phước năm 2012-2013

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được

$$P=\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\le\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2a}=\frac{ab+bc+ca}{2abc}=\frac{3}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{3}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài 43. Cho n số thực $x_1, x_2, ..., x_n$ với $n\ge 3$. Kí hiệu $\max\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ là số lớn nhất trong các số $x_1, x_2, ..., x_n$. Chứng minh rằng

$$\max\{x_1, x_2, ..., x_n\}\ge\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}+\frac{|x_1-x_2|+|x_2-x_3|+...+|x_n-x_1|}{2n}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐHSP Hà Nội năm 2012-2013

Lời giải

Để ý là trong hai số thực x, y bất kì ta luôn có

$$\min\{x,y\}\le x,y\le\max\{x,y\} \text{ và } \max\{x,y\}=\frac{x+y+|x-y|}{2}$$

Sử dụng đẳng thức $\max\{x,y\}=\frac{x+y+|x-y|}{2}$,ta có

$$\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}+\frac{|x_1-x_2|+|x_2-x_3|+...+|x_n-x_1|}{2n}$$
$$=\frac{x_1+x_2+|x_1-x_2|}{2n}+\frac{x_2+x_2+|x_2-x_3|}{2n}+...+\frac{x_n+x_1+|x_n-x_1|}{2n}$$
$$\le\frac{\max\{x_1, x_2\}+\max\{x_2, x\}+\max\{x_n, x_1\}}{n}\le\max\{x_1; x_2;...; x_n\}$$

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1=x_2=...=x_n$

Bài 44. Cho x, y, z là các số không âm thỏa mãn $x+y+z=\frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất

$$S=x^3+y^3+z^3+x^2y^2z^2$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Phú Thọ năm 2012-2013

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có

$$\left(\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}+\sqrt{z^2}\right)\left(\left(x\sqrt{x}\right)^2+\left(y\sqrt{y}\right)^2+\left(z\sqrt{z}\right)^2\right)\ge\left(x^2+y^2+z^2\right)^2$$

Hay $\frac{3}{2}\left(x^3+y^3+z^3\right)\ge\left(x^2+y^2+z^2\right)^2\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3\ge\frac{2}{3}\left(x^2+y^2+z^2\right)^2$ (*)

Mặt khác, dễ dàng chứng minh được

$$xyz \ge (x+y-z)(x+z-y)(y+z-x) = \left(\frac{3}{2}-2z\right)\left(\frac{3}{2}-2x\right)\left(\frac{3}{2}-2y\right)$$
$$= \frac{27}{8} - \frac{9}{2}(x+y+z) + 6(xy+yz+xz) - 8xyz$$
$$\Leftrightarrow 9xyz \ge \frac{27}{8} - 3\left(x^2+y^2+z^2\right) \Leftrightarrow x^2y^2z^2 \ge \left(\frac{3}{8} - \frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^2$$

Đặt $t = x^2+y^2+z^2 \ge \frac{(x+y+z)^2}{3} = \frac{3}{4}$. Khi đó ta được

$$S \ge \frac{2}{3}t^2 + \left(\frac{3}{8} - \frac{t}{3}\right)^2 = \frac{2t^2}{3} + \frac{t^2}{9} - \frac{t}{4} + \frac{9}{64} = \frac{7t^2}{9} - \frac{t}{4} + \frac{9}{64} = \frac{1}{6}\left(t - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{11}{8}t^2 + \frac{3}{64} \ge \frac{25}{64}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là $\frac{25}{64}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{2}$

Bài 45. Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1+3a}{1+b^2} + \frac{1+3b}{1+c^2} + \frac{1+3c}{1+a^2} \ge 6$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Phú Thọ năm 2012-2013

Lời giải

Cách 1. Ta viết lại vế trái thành

$$\frac{1+3a}{1+b^2} + \frac{1+3b}{1+c^2} + \frac{1+3c}{1+a^2} = \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} + \frac{1}{1+a^2} + \frac{3a}{1+b^2} + \frac{3b}{1+c^2} + \frac{3c}{1+a^2}$$

Ta đi chứng minh

$$\frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} + \frac{1}{1+a^2} \ge \frac{3}{2};\ \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \ge \frac{3}{2}$$

Trước hết ta chứng minh $\frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} + \frac{1}{1+a^2} \ge \frac{3}{2}$. Ta có các hướng sau

Hướng 1. Không mất tính tổng quát, giải sử $a \ge b \ge c$. Do $ab+bc+ca=3 \Rightarrow bc \ge 1$

Ta chứng minh bất đẳng thức sau Với $x, y > 0; xy \ge 1$ ta có

$$\frac{1}{y^2+1} + \frac{1}{z^2+1} \ge \frac{2}{yz+1}$$

Thật vậy, ta có $\left(y^2+z^2+2\right)(yz+1) \ge \left(y^2+1\right)\left(z^2+1\right) \Leftrightarrow (y-z)^2(yz-1) \ge 0$

Do vai trò của các biến như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử $a \le b \le c$.

Khi đó ta được $3bc \ge ab+bc+ca \Rightarrow bc \ge 1$.

Không mất tính tổng quát, giải sử $a \ge b \ge c$. Do $ab+bc+ca=3 \Rightarrow bc \ge 1$

Áp dụng bất đẳng thức trên ta được

$$P = \frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} \ge \frac{1}{a^2+1} + \frac{2}{bc+1}$$

Do đó ta sẽ chứng minh

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{2}{bc+1} \ge \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2a^2+bc+3}{a^2bc+a^2+bc+1} \ge \frac{3}{2} \Leftrightarrow a(a+b+c-3abc) \ge 0$$

Từ giả thiết suy ra $a+b+c \ge 3$ và $abc \le 1$. Do đó $a+b+c-3abc \ge 0$

Do đó ta được $\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} \ge \frac{1}{a^2+1} + \frac{2}{bc+1} \ge \frac{3}{2}$

Hướng 2. Biến đổi biểu thức vế trái như sau

$$P=\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}=3-\left(\frac{a^2}{a^2+1}+\frac{b^2}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng phân thức ta được

$$\frac{4a^2}{3a^2+3}=\frac{4a^2}{3a^2+ab+bc+ca}\le\frac{a^2}{a^2+ab+ac}+\frac{a^2}{2a^2+bc}=\frac{a}{a+b+c}+\frac{a^2}{2a^2+bc}$$

Áp dụng tương tự với hai biểu thức còn lại ta được

$$\frac{4a^2}{3a^2+3}+\frac{4b^2}{3b^2+3}+\frac{4c^2}{3c^2+3}\le 1+\frac{a^2}{2a^2+bc}+\frac{b^2}{2b^2+ca}+\frac{c^2}{2c^2+ab}$$

Ta sẽ chứng minh $\frac{a^2}{2a^2+bc}+\frac{b^2}{2b^2+ca}+\frac{c^2}{2c^2+ab}\le 1$

Thật vậy, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{3}{2}-\left(\frac{a^2}{2a^2+bc}+\frac{b^2}{2b^2+ca}+\frac{c^2}{2c^2+ab}\right)\ge\frac{1}{2}$$

Hay $\frac{bc}{2a^2+bc}+\frac{ca}{2b^2+ca}+\frac{ab}{2c^2+ab}\ge\frac{1}{2}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng phân thức ta được

$$\frac{bc}{2a^2+bc}+\frac{ca}{2b^2+ca}+\frac{ab}{2c^2+ab}=\frac{(bc)^2}{2a^2bc+b^2c^2}+\frac{(ca)^2}{2ab^2c+c^2a^2}+\frac{(ab)^2}{2abc^2+a^2b^2}$$
$$\ge\frac{(ab+bc+ca)^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)}=1$$

Như vậy bất đẳng thức trên được chứng minh.

Chứng minh $\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\ge\frac{3}{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được

$$\frac{a}{b^2+1}=a-\frac{ab^2}{b^2+1}\ge a-\frac{ab^2}{2b}=a-\frac{ab}{2}$$

Tương tự ta có $\frac{b}{c^2+1}\ge b-\frac{bc}{2};\frac{c}{a^2+1}\ge c-\frac{ca}{2}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\ge a+b+c-\frac{ab+bc+ca}{2}=a+b+c-\frac{3}{2}$$

Mặt khác ta có $(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)\Rightarrow a+b+c\ge 3$

Suy ra $\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\ge\frac{3}{2}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Cách 2. Ta viết lại vế trái thành

$$\frac{1+3a}{1+b^2}+\frac{1+3b}{1+c^2}+\frac{1+3c}{1+a^2}=\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}+\frac{1}{1+a^2}+\frac{3a}{1+b^2}+\frac{3b}{1+c^2}+\frac{3c}{1+a^2}$$

Khi đó áp dụng ta đẳng thức AM - GM ta được

$$\frac{1}{b^2+1}=1-\frac{b^2}{b^2+1}\ge 1-\frac{b^2}{2b}=1-\frac{b}{2}$$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{1}{c^2+1}\ge 1-\frac{c}{2};\frac{1}{a^2+1}\ge 1-\frac{a}{2}$

Khi đó ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}+\frac{1}{a^2+1}\ge 3-\frac{a+b+c}{2}$$

Mặt khác ta lại có $\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\ge a+b+c-\frac{ab+bc+ca}{2}=a+b+c-\frac{3}{2}$

Do đó ta được

$$\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}+\frac{1}{1+a^2}+\frac{3a}{1+b^2}+\frac{3b}{1+c^2}+\frac{3c}{1+a^2}\ge 3+\frac{5(a+b+c)}{2}-\frac{9}{2}\ge 6$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 46. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{abc}+\frac{1}{1-2(ab+bc+ca)}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Vĩnh Phúc năm 2012-2013

Lời giải

Do $a+b+c=1\Rightarrow 1-2(ab+bc+ca)=a^2+b^2+c^2$

Suy ra $P=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{a+b+c}{abc}=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$

Đến đây ta chứng minh $P\ge 30$ bằng các cách sau

Cách 1. Theo bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}\ge\frac{9}{(a+b+c)^2}=9.$$

Bất đẳng thức sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được $\frac{7}{ab+bc+ca}\ge 21$

Tuy nhiên, dễ thấy $\frac{(a++b+c)^2}{3}\ge ab+bc+ca\Leftrightarrow ab+bc+ca\le\frac{1}{3}$. Do đó ta được $\frac{7}{ab+bc+ca}\ge 21$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 2. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng phân thức ta có

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{3ab}+\frac{1}{3bc}+\frac{1}{3ca}\ge\frac{16}{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)}$$
$$\ge\frac{16}{(a+b+c)^2+\frac{1}{3}(a+b+c)^2}=12$$

Bất đẳng thức sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)\ge 18$$

Để ý tiếp bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta được

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)\ge\frac{6}{ab+bc+ca}\ge\frac{6}{\frac{1}{3}(a+b+c)^2}=18$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 3. Theo một đánh giá quen thuộc ta có $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge\frac{9}{ab+bc+ca}$

Do đó ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{9}{ab+bc+ca}$$

Áp dụng tiếp đánh giá trên ta được

$$\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}\right)\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\right)\ge 9$$

Hay $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2}{ab+bc+ca}\ge 9$, mặt khác ta lại có $\frac{7}{ab+bc+ca}\ge 21$.

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge 30$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 30. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài 47. Cho các số thực dương a, b, cthỏa mãn $abc\le 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{a^3}\ge a+b+c$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Vĩnh Phúc năm 2012-2013

Lời giải

Đặt $x=\frac{1}{a}; y=\frac{1}{b}; z=\frac{1}{c}\Rightarrow xyz\ge 1$. Khi đó bất đẳng thức được viết lại thành

$$\frac{x^3}{z}+\frac{y^3}{x}+\frac{z^3}{y}\ge\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$

Áp dụng bất đẳng thức Binhiacopcxki ta được

$$\frac{x^3}{z}+\frac{y^3}{x}+\frac{z^3}{y}\ge\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{xx+yz+zx}\ge x^2+y^2+z^2$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $x^2+y^2+z^2\ge\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$

Thật vậy theo một đánh giá quen thuộc và giả thiết $xyz\ge 1$ ta có

$$x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx\ge\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài 48. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\left(1+a\right)\left(1+b\right)\left(1+c\right)\ge 8\left(1-a\right)\left(1-b\right)\left(1-c\right)$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Bắc Ninh năm 2012-2013

Lời giải

Vì a, b, c là các số dương và $a+b+c=1$ nên ta có $a,b,c<1$.

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được

$$1+a=1-b+1-c\ge 2\sqrt{\left(1-b\right)\left(1-c\right)}$$

Tương tự ta có $1+b\ge 2\sqrt{\left(1-c\right)\left(1-a\right)}$; $1+c\ge 2\sqrt{\left(1-a\right)\left(1-b\right)}$

Nhân theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$\left(1+a\right)\left(1+b\right)\left(1+c\right)\ge 8\left(1-a\right)\left(1-b\right)\left(1-c\right)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Bài 49. Cho 3 số a, b, c thỏa mãn $0\le a\le b\le c\le 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A=\left(a+b+c+1\right)\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Hải Dương năm 2012-2013

Lời giải

Đặt $x=1+c, y=1+b, z=1+a$. Từ $0\le a\le b\le c\le 1$ ta được $1\le x\le y\le z\le 2$

Ta viết lại biểu thức A là $A=\left(x+y+z\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}$

$$\left(1-\frac{x}{y}\right)\left(1-\frac{y}{z}\right)\ge 0\Leftrightarrow 1-\frac{x}{y}-\frac{y}{z}+\frac{x.y}{y.z}\ge 0\Leftrightarrow \frac{x}{y}+\frac{y}{z}\le \frac{x}{z}+1$$

$$\left(1-\frac{z}{y}\right)\left(1-\frac{y}{x}\right)\ge 0\Leftrightarrow 1-\frac{z}{y}-\frac{y}{x}+\frac{z.y}{y.x}\ge 0\Leftrightarrow \frac{z}{y}+\frac{y}{x}\le \frac{z}{x}+1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}\le \frac{x}{z}+\frac{z}{x}+2\Rightarrow \frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}\le 2\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+2$$

Đặt $t=\frac{x}{z}\Rightarrow \frac{1}{2}\le t\le 1$. Do đó ta được

$$\frac{x}{z}+\frac{z}{x}=t+\frac{1}{t}=\frac{t^2+1}{t}=\frac{2t^2-5t+2}{2t}+\frac{5}{2}=\frac{\left(2t-1\right)\left(t-2\right)}{2t}+\frac{5}{2}$$

Do $\frac{1}{2}\le t\le 1$ nên ta có $\frac{(2t-1)(t-2)}{2t}$ suy ra $\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\le \frac{5}{2}$.

Từ đó ta được $A\le 3+2.\frac{5}{2}+2=10$.

Vậy giá trị lớn nhất của A là 10. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi.

Bài 50. Cho a, b, c ,d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+d=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{a^4+b^4+c^4+d^4}{a^3+b^3+c^3+d^3}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Nam Định năm 2012-2013

Lời giải

Cách 1. Dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a=b=c=d=\frac{3}{4}$. Ta đi chứng minh $P\ge \frac{3}{4}$.

Điều này tương đương với chứng minh $\frac{a^4+b^4+c^4+d^4}{a^3+b^3+c^3+d^3}\ge \frac{3}{4}$

Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta có

$$4\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right)\ge 3\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)$$
$$\Leftrightarrow 4\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right)\ge \left(a+b+c+d\right)\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)$$
$$\Leftrightarrow 3\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right)\ge a^3\left(b+c+d\right)+b^3\left(a+c+d\right)+c^3\left(a+b+d\right)+d^3\left(a+b+c\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được

$$a^4+a^4+a^4+b^4=4a^3b;\ a^4+a^4+a^4+c^4=4a^3c;\ a^4+a^4+a^4+d^4=4a^3d$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $9a^4+\left(b^4+c^4+d^4\right)\ge 4a^3\left(b+c+d\right)$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$9b^4+\left(a^4+c^4+d^4\right)\ge 4b^3(a+c+d)$$
$$9c^4+\left(a^4+b^4+d^4\right)\ge 4c^3(a+b+d)$$
$$9d^4+\left(a^4+b^4+c^4\right)\ge 4d^3(a+b+c)$$

Do đó ta được

$$12\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right)\ge 4a^3(b+c+d)+4b^3(a+c+d)+4c^3(a+b+d)+4d^3(a+b+c)$$

Hay

$$3\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right)\ge a^3(b+c+d)+b^3(a+c+d)+c^3(a+b+d)+d^3(a+b+c)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{4}$, đạt được khi $a=b=c=d=\frac{3}{4}$

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta được

$$4\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right)\ge\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2;$$
$$\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right)\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\ge\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)^2$$

Nhân theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$4\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right)^2\ge\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)^2\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)$$

Hay $16\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right)^2\ge 4\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)^2\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)$.

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có

$$4\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\ge(a+b+c+d)^2=9$$

Do vậy $4\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)^2\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\ge 9\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)^2$.

Suy ra ta được $16\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right)^2\ge 9\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)^2$

Hay $4\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right)\ge 3\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)$.

Do đó ta được $P=\frac{a^4+b^4+c^4+d^4}{a^3+b^3+c^3+d^3}\ge\frac{3}{4}$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{4}$, đạt được khi $a=b=c=d=\frac{3}{4}$

Bài 51. Cho tam giác ABC có chu vi bằng 2. Ký hiệu a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S=\frac{a}{b+c-a}+\frac{4b}{c+a-b}+\frac{9c}{a+b-c}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Hải Dương năm 2013-2014

Lời giải

Với a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác có chu vi bằng 2 nên $a+b+c=2$.

Đặt $b+c-a=x$; $c+a-b=y$; $a+b-c=z$, do a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác nên $x;y;z>0$.

Khi đó ta được $x+y+z=2$ và $a=\frac{y+z}{2}$; $b=\frac{x+z}{2}$; $c=\frac{x+y}{2}$. Khi đó

$$S=\frac{y+z}{2x}+\frac{4(x+z)}{2y}+\frac{9(x+y)}{2z}=\frac{1}{2}\left[\frac{y+z}{x}+\frac{4(x+z)}{y}+\frac{9(x+y)}{z}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{9x}{z}\right)+\left(\frac{4z}{y}+\frac{9y}{z}\right)\right]$$

Ta có

$$\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}=\left(\sqrt{\frac{y}{x}}-2\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2+2\ge 2$$
$$\frac{z}{x}+\frac{9x}{z}=\left(\sqrt{\frac{z}{x}}-3\sqrt{\frac{x}{z}}\right)^2+6\ge 6$$
$$\frac{4z}{y}+\frac{9y}{z}=\left(2\sqrt{\frac{z}{y}}-3\sqrt{\frac{y}{z}}\right)^2+12\ge 12$$

Do đó $S\ge\frac{1}{2}(4+6+12)=11$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}y=2x\\z=3x\\2z=3y\\x+y+z=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{3}\\y=\frac{2}{3}\\z=1\end{cases}\Leftrightarrow a=\frac{5}{6};\ b=\frac{2}{3};\ c=\frac{1}{2}$$

Khi đó $a^2=b^2+c^2$. Vậy giá trị nhỏ nhất của S là 11 khi ΔABC vuông .

Bài 52. Cho x, y, z là ba số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S=\frac{\sqrt{x^2-xy+y^2}}{x+y+2z}+\frac{\sqrt{y^2-yz+z^2}}{y+z+2x}+\frac{\sqrt{z^2-zx+x^2}}{z+x+2y}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Hải Dương năm 2013-2014

Lời giải

Ta có $x^2-xy+y^2=(x+y)^2-3xy\ge(x+y)^2-\frac{3(x+y)^2}{4}=\frac{(x+y)^2}{4}$

Suy ra $\frac{\sqrt{x^2-xy+y^2}}{x+y+2z}\ge\frac{x+y}{2(x+z+y+z)}$. Áp dụng tương tự ta được

$$S\ge\frac{1}{2}\left(\frac{x+y}{y+z+z+x}+\frac{y+z}{z+x+x+y}+\frac{z+x}{x+y+y+z}\right)$$

Đặt $a=x+y;\ b=y+z;\ c=z+x$, khi đó ta được

$$S\ge\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\ge\frac{1}{2}.\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$$

Vì theo bất đẳng thức Neibizt thì $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$.

Vậy ta được giá trị nhỏ nhất của S là $\frac{3}{4}$ đạt được tại $x=y=z$.

Bài 53. Giả sử a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $abc+bcd+cda+dab=1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4\left(a^3+b^3+c^3\right)+9c^3$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐH KHTN Hà Nội năm 2013-2014

Lời giải

Do vai trò của a, b, c như nhau nên ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = kd$, với k là số dương. Khi đó áp dụng bất đẳng thức AM - GM cho ba số dương ta được

$$\frac{1}{k^2}\left(a^3+b^3+c^2\right) \ge \frac{3abc}{k^2}$$
$$\frac{a^3}{k^3}+\frac{b^3}{k^3}+d^3 \ge \frac{3abd}{k^2}$$
$$\frac{b^3}{k^3}+\frac{b^3}{k^3}+d^3 \ge \frac{3bcd}{k^2}$$
$$\frac{c^3}{k^3}+\frac{a^3}{k^3}+d^3 \ge \frac{3cad}{k^2}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\left(\frac{1}{k^2}+\frac{2}{k^3}\right)\left(a^3+b^3+c^2\right)+3d^3 \ge \frac{3\left(abc+abd+bcd+cad\right)}{k^2} = \frac{3}{k^2}$$

Hay $\left(\frac{3}{k^2}+\frac{6}{k^3}\right)\left(a^3+b^3+c^2\right)+9d^3 \ge \frac{9}{k^2}$.

Ta cần tìm k để $\frac{3}{k^2}+\frac{6}{k^3} = 4 \Leftrightarrow 4k^3-3k-6=0$ và ta chọn k là số dương.

Đặt $k=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$ thay vào phương trình trên và biến đổi ta thu được $x^6-12x^3+1=0$

Giải phương trình này ta được $x=\sqrt[3]{6\pm\sqrt{35}}$, để ý là $\left(6+\sqrt{35}\right)\left(6-\sqrt{35}\right)=1$ nên ta tính được

$$k=\frac{\sqrt[3]{6-\sqrt{35}}+\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}}{2}$$

Do đó ta tính được giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{36}{\left(\sqrt[3]{6-\sqrt{35}}+\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}\right)^2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{\sqrt[3]{6-\sqrt{35}}+\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}}{2}.d$

Bài 54. Giả sử dãy số thực có thứ tự $x_1 \le x_2 \le x_3 \le ... \le x_{192}$ thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+...+x_n=0 \\ |x_1|+|x_2|+|x_3|+...+|x_{192}|=2013 \end{cases}$$

Chứng minh rằng $x_{192}-x_1 \ge \frac{2013}{96}$.

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐH KHTN Hà Nội năm 2013-2014

Lời giải

Trước hết ta chứng minh bài toán phụ sau Với $a_1 \le a_2 \le a_3 \le ... \le a_n$ thỏa mãn

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3+...+a_n=0 \\ |a_1|+|a_2|+|a_3|+...+|a_n|=1 \end{cases}$$

Khi đó ta được $a_n-a_1 \ge \frac{2}{n}$.

Thật vậy, từ điều kiện của bài toán ta nhận thấy tồn tại số tự nhiên k để

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le ... \le a_k \le 0 \le a_{k+1} \le ... \le a_n$$

Khi đó từ $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = 0 \\ |a_1| + |a_2| + |a_3| + ... + |a_n| = 1 \end{cases}$ suy ra

$$\begin{cases} (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k) + (a_{k+1} + ... + a_n) = 0 \\ -(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k) + (a_{k+1} + ... + a_n) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{k+1} + ... + a_n = \dfrac{1}{2} \\ a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Cũng từ $a_1 \le a_2 \le a_3 \le ... \le a_k \le 0 \le a_{k+1} \le ... \le a_n$ ta được

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le ... \le a_k \Rightarrow a_1 \le -\frac{1}{2k}$$

$$a_{k+1} \le ... \le a_n \Rightarrow a_n \ge \frac{1}{2(n-k)}$$

Do đó $a_n - a_1 \ge \dfrac{1}{2(n-k)} + \dfrac{1}{2k} = \dfrac{n}{2(n-k)n} \ge \dfrac{2n}{(n-k+n)^2} = \dfrac{2}{n}$

Như vậy bài toán được chứng minh xong.

Từ giả thiết của bài toán trên ta viết lại như sau

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{2013} + \dfrac{x_2}{2013} + \dfrac{x_3}{2013} + ... + \dfrac{x_n}{2013} = 0 \\ \left|\dfrac{x_1}{2013}\right| + \left|\dfrac{x_2}{2013}\right| + \left|\dfrac{x_3}{2013}\right| + ... + \left|\dfrac{x_{192}}{2013}\right| = 1 \end{cases}$$

Áp dụng kết quả của bài toán phụ ta được

$$\frac{x_{192}}{2013} - \frac{x_1}{2013} \ge \frac{2}{192} \Rightarrow x_{192} - x_1 \ge \frac{2013}{96}$$

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 55. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh

$$\sqrt{\frac{ab + 2c^2}{1 + ab - c^2}} + \sqrt{\frac{bc + 2a^2}{1 + bc - a^2}} + \sqrt{\frac{ac + 2b^2}{1 + ac - b^2}} \ge 2 + ab + ba + ca$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Vĩnh Phúc năm 2013-2014

Lời giải

Do $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ nên ta có

$$\sqrt{\frac{ab + 2c^2}{1 + ab - c^2}} = \sqrt{\frac{ab + 2c^2}{a^2 + b^2 + c^2 + ab - c^2}} = \sqrt{\frac{ab + 2c^2}{a^2 + b^2 + ab}} = \frac{ab + 2c^2}{\sqrt{(ab + 2c^2)(a^2 + b^2 + ab)}}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\sqrt{(ab + 2c^2)(a^2 + b^2 + ab)} \le \frac{2c^2 + a^2 + b^2 + 2ab}{2} \le \frac{2(a^2 + b^2 + c^2)}{2} = a^2 + b^2 + c^2$$

Suy ra $\sqrt{\dfrac{ab + 2c^2}{1 + ab - c^2}} = \dfrac{ab + 2c^2}{\sqrt{(ab + 2c^2)(a^2 + b^2 + ab)}} \ge \dfrac{ab + 2c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = ab + 2c^2$

Tương tựta được $\sqrt{\dfrac{bc + 2a^2}{1 + bc - a^2}} \ge bc + 2a^2$; $\sqrt{\dfrac{ca + 2b^2}{1 + ca - b^2}} \ge ca + 2b^2$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên kết hợp $a^2+b^2+c^2=1$ ta có bất đẳng thức cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài 56. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)}+\frac{b}{(b+1)(c+1)}+\frac{c}{(c+1)(a+1)}\ge\frac{3}{4}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Vĩnh Phúc năm 2013-2014

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$4a(c+1)+4b(a+1)+4c(b+1)\ge 3(a+1)(b+1)(c+1)$$
$$\Leftrightarrow 4(ab+bc+ca)+4(a+b+c)\ge 3abc+3(ab+bc+ca)+3(a+b+c)+3$$
$$\Leftrightarrow ab+bc+ca+a+b+c\ge 6$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM cho các số dương ta được

$$ab+bc+ca\ge 3.\sqrt[3]{(abc)^2}=3;\ a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}=3$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được $ab+bc+ca+a+b+c\ge 6$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài 57. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c+ab+bc+ca=6abc$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge 3$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán TP Hà Nội năm 2013-2014

Lời giải

Giả thiết của bài toán được viết lại thành

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=6$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\ge\frac{2}{ab};\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge\frac{2}{bc};\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\ge\frac{2}{ca}$$
$$\frac{1}{a^2}+1\ge\frac{2}{a};\ \frac{1}{b^2}+1\ge\frac{2}{b};\ \frac{1}{c^2}+1\ge\frac{2}{c}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$3\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+3\ge 2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=2.6=12$$

Hay $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge 3$ Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài 58. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{ab+a+2}+\frac{1}{bc+b+2}+\frac{1}{ca+c+2}\le\frac{3}{4}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán TP Hà Nội năm 2013-2014

Lời giải

Đặt $a=\frac{x}{y};\ b=\frac{y}{z};\ c=\frac{z}{x}$. Gọi P là vế trái, khi đó ta được

$$P=\frac{1}{ab+a+2}+\frac{1}{bc+b+2}+\frac{1}{ca+c+2}=\frac{yz}{xy+xz+2yz}+\frac{zx}{xy+yz+2xz}+\frac{xy}{xz+yz+2xy}$$

Biến đổi tương đương ta được

$$3-P=1-\frac{yz}{xy+xz+2yz}+1-\frac{zx}{xy+yz+2xz}+1-\frac{xy}{xz+yz+2xy}$$

$$3-P=(xy+yz+xz)\left(\frac{1}{xy+xz+2yz}+\frac{1}{xy+yz+2xz}+\frac{1}{xz+yz+2xy}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM dạng $\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\ge\frac{1}{A+B+C}$

Ta có $3-P=(xy+yz+xz)\frac{9}{4xy+4yz+4xz}=\frac{9}{4}\Leftrightarrow P\le 3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài 59.

a) Chứng minh rằng $a^3+b^3\ge ab(a+b)$, với a, b là hai số dương.

b) Cho a, b là hai số dương thỏa mãn $a+b\ge 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$F=\left(a^3+b^3\right)^2+\left(a^2+b^2\right)+\frac{3}{2}ab$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Phú Thọ năm 2013-2014

Lời giải

a) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)-ab(a+b)\ge 0\Leftrightarrow(a+b)\left(a^2-2ab+b^2\right)\ge 0\Leftrightarrow(a+b)(a-b)^2\ge 0$$

Ta thấy với a, b là hai số dương nên bất đẳng thức đã cho luôn đúng.

b) **Cách 1.** Áp dụng bất đẳng thức đã chứng minh trên ta có $\left(a^3+b^3\right)^2\ge\left[ab(a+b)\right]^2$ nên theo giả thiết ta được $\left(a^3+b^3\right)^2\ge\left[ab(a+b)\right]^2\ge(ab)^2$. Mặt khác ta có $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab\ge 1-1ab$. Do đó

$$F\ge(ab)^2+1-2ab+\frac{3}{2}ab=(ab)^2-\frac{ab}{2}+1$$

$$=(ab)^2-2.ab.\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{15}{16}=\left(ab-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}\ge\frac{15}{16}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\frac{1}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của F là bằng $\frac{15}{16}$, đạt được khi $a=b=\frac{1}{2}$.

Cách 2. Ta có $F=\left(a^3+b^3\right)^2+(a+b)^2-\frac{1}{2}ab$.

Mà ta luôn có bất đẳng thức $a^3+b^3\ge\frac{(a+b)^3}{4}$, với mọi a, b > 0.

Áp dụng bất đẳng thức trên ta có $\left(a^3+b^3\right)^2\ge\left[\frac{(a+b)^3}{4}\right]^2\ge\frac{1}{16}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$F\ge\frac{1}{16}+(a+b)^2-\frac{(a+b)^2}{8}=\frac{1}{16}+\frac{7(a+b)^2}{8}\ge\frac{1}{16}+\frac{7}{8}=\frac{15}{16}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của F là bằng $\frac{15}{16}$, đạt được khi $a=b=\frac{1}{2}$.

Bài 60. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $12\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\le 3+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Chứng minh rằng $\frac{1}{4a+b+c}+\frac{1}{a+4b+c}+\frac{1}{a+b+4c}\le\frac{1}{6}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Phú Thọ năm 2013-2014

Lời giải

Theo một đánh giá quen thuộc ta có

$$4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2\le 12\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\le 3+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Suy ra $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-1\right)\left[4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+3\right]\le 0$

Do đó ta được $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le 1$ và $a+b+c\ge 9$. Đặt $P=\frac{1}{4a+b+c}+\frac{1}{a+4b+c}+\frac{1}{a+b+4c}$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM dạng $\frac{4}{x+y}\le\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ ta được

$$\begin{aligned}P&=\frac{1}{4a+b+c}+\frac{1}{a+4b+c}+\frac{1}{a+b+4c}\\&\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3a}+\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{3a}+\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{3a}+\frac{1}{a+b+c}\right)\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3a}+\frac{1}{3b}+\frac{1}{3c}+\frac{3}{a+b+c}\right)\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Bài 61. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}>2$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Thanh Hóa năm 2013-2014

Lời giải

Biến đổi tương đương bất đẳng thức như sau

$$\begin{aligned}&\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}>2\\&\Leftrightarrow a\left(b^2+c^2-a^2\right)+b\left(c^2+a^2-b^2\right)+c\left(a^2+b^2-c^2\right)>2abc\\&\Leftrightarrow a\left(b^2+c^2\right)+2abc-a^3+b\left(c^2+a^2\right)-2abc-b^3+c\left(a^2+b^2-c^2\right)-2abc-c^3>0\\&\Leftrightarrow a\left[\left(b+c\right)^2-a^2\right]+b\left[\left(a-c\right)-b^2\right]+c\left[\left(a-b\right)^2-c^2\right]>0\\&\Leftrightarrow a\left(b+c-a\right)\left(b+c+a\right)+b\left(a-c-b\right)\left(a+b-c\right)+c\left(a-b-c\right)\left(a-b+c\right)>0\\&\Leftrightarrow\left(b+c-a\right)\left[a^2-\left(b-c\right)^2\right]>0\\&\Leftrightarrow\left(a+b-c\right)\left(b+c-a\right)\left(c+a-b\right)>0\end{aligned}$$

Vì a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác nên

$$a+b-c>0;\ b+c-a>0;\ c+a-b>0$$

Do vậy bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 62. Cho các số thực dươngx, y, z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3xyz$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{x^4+yz}+\frac{y^2}{y^4+xz}+\frac{z^2}{z^4+xy}\le\frac{3}{2}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Nam Định năm 2014-2015

Lời giải

Cách 1. Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$2x^2\sqrt{yz}\le x^4+yz\Leftrightarrow\frac{1}{2x^2\sqrt{yz}}\ge\frac{1}{x^4+yz}\Leftrightarrow\frac{x^2}{x^4+yz}\le\frac{1}{2\sqrt{yz}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{yz}}\le\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\Leftrightarrow\frac{1}{2\sqrt{yz}}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

Từ hai bất đẳng thức trên ta được $\frac{x^2}{x^4+yz}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$

Hoàn toàn tương tựta có $\frac{y^2}{y^4+xz}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)$; $\frac{z^2}{z^4+xy}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{x^2}{x^4+yz}+\frac{y^2}{y^4+xz}+\frac{z^2}{z^4+xy}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{xy+yz+zx}{xyz}$$

Mặt khác ta lại có $xy+yz+zx\le x^2+y^2+z^2$

Do đó ta được $\frac{x^2+y^2+z^2}{xyz}=\frac{3xyz}{xyz}=3$

Suy ra $\frac{x^2}{x^4+yz}+\frac{y^2}{y^4+xz}+\frac{z^2}{z^4+xy}\le\frac{3}{2}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$

Cách 2. Từ giả thiết của bài toán ta được

$$3xyz=x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$$

Suy ra $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le 3$. Đặt $a=\frac{1}{x}; b=\frac{1}{y}; c=\frac{1}{z}$, khi đó ta được $a+b+c\le 3$

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành $\frac{a^2bc}{a^4+bc}+\frac{b^2ca}{b^4+ca}+\frac{c^2ab}{c^4+ab}\le\frac{3}{2}$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được $a^4+bc\ge 2a^2\sqrt{bc}$

Do đó ta được $\frac{a^2bc}{a^4+bc}\le\frac{a^2bc}{2a^2\sqrt{bc}}=\frac{\sqrt{bc}}{2}$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{a^2bc}{a^4+bc}+\frac{b^2ca}{b^4+ca}+\frac{c^2ab}{c^4+ab}\le\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}{2}$

Dễ thấy $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\le a+b+c\le 3$ nên ta được $\frac{a^2bc}{a^4+bc}+\frac{b^2ca}{b^4+ca}+\frac{c^2ab}{c^4+ab}\le\frac{3}{2}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$

Bài 63. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$2abc(a+b+c)\le\frac{5}{9}+a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐHKHTN Hà Nội năm 2013-2014

Lời giải

Cách 1. Áp dụng bất đẳng thức dạng $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$ ta được

$$a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2\ge abc\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)$$

Bài toán quy về chứng minh $2abc\left(a+b+c\right)\le\frac{5}{9}+abc\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)$

Hay $2\left(a+b+c\right)\le\frac{5}{9abc}+\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được $a^2b+\frac{1}{9b}\ge\frac{2a}{3}$; $b^2c+\frac{1}{9c}\ge\frac{2b}{3}$; $c^2a+\frac{1}{9a}\ge\frac{2c}{3}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$a^2b+b^2c+c^2a+\frac{1}{9a}+\frac{1}{9b}+\frac{1}{9c}\ge\frac{2a}{3}+\frac{2b}{3}+\frac{2c}{3}$$

Hay $a^2b+b^2c+c^2a+\frac{ab+bc+ca}{9abc}\ge\frac{2}{3}\left(a+b+c\right)$

Như vậy ta cần chỉ ra được $2\left(a+b+c\right)\le\frac{4}{9abc}+\frac{2}{3}\left(a+b+c\right)$

Hay $\frac{4abc\left(a+b+c\right)}{3}\le\frac{4}{9}\Leftrightarrow 3abc\left(a+b+c\right)\le 1$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng vì $1=\left(ab+bc+ca\right)^2\ge 3abc\left(a+b+c\right)$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Cách 2. Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$2abc\left(a+b+c\right)+\frac{4}{9}\le 1+a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2$$

Để ý là $1=\left(ab+bc+ca\right)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc\left(a+b+c\right)$

Như vậy ta quy bài toán về chứng minh $\frac{4}{9}\le a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2$

Để ý đến giả thiết ta biến đổi tương đương bất đẳng thức trên thành

$$\frac{4}{9}\le a^2b^2\left(a^2+1\right)+b^2c^2\left(b^2+1\right)+c^2a^2\left(c^2+1\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{4}{9}\le a^2b^2\left(a+b\right)\left(a+c\right)+b^2c^2\left(b+c\right)\left(a+b\right)+c^2a^2\left(c+b\right)\left(c+a\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\le 9\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)\left(\frac{a^2b^2}{b+c}+\frac{b^2c^2}{c+a}+\frac{c^2a^2}{a+b}\right)$$

Dễ dàng chứng minh được

$$9\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)\ge 8\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)=8\left(a+b+c\right)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta lại có

$$\frac{a^2b^2}{b+c}+\frac{b^2c^2}{c+a}+\frac{c^2a^2}{a+b}\ge\frac{\left(ab+bc+ca\right)^2}{2\left(a+b+c\right)}=\frac{1}{2\left(a+b+c\right)}$$

Nhân theo vế hai bất đẳng thức trên ta được

$$9\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)\left(\frac{a^2b^2}{b+c}+\frac{b^2c^2}{c+a}+\frac{c^2a^2}{a+b}\right)\ge 4$$

Hay bất đẳng thức trên được chứng minh.

Bài 64. Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2+3\sqrt[3]{(abc)^2}\ge 2(ab+bc+ca)$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Nghệ An năm 2014-2015

Lời giải

Đặt $x=\sqrt[3]{a^2};\ y=\sqrt[3]{b^2};\ z=\sqrt[3]{c^2}$.

Suy ra $a^2=x^3;\ b^2=y^3;\ c^2=z^3$, nên $a=\sqrt{x^3}$, $b=\sqrt{y^3}$, $c=\sqrt{z^3}$ với $x;\ y;\ z\ge 0$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$x^3+y^3+z^3+3xyz\ge 2\left(\sqrt{x^3y^3}+\sqrt{y^3z^3}+\sqrt{z^3x^3}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được $xy(x+y)\ge 2xy\sqrt{xy}=2\sqrt{x^3y^3}$

Tương tự ta có $yz(y+z)\ge 2\sqrt{y^3z^3};\ zx(z+x)\ge 2\sqrt{z^3x^3}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)\ge 2\left(\sqrt{x^3y^3}+\sqrt{y^3z^3}+\sqrt{z^3x^3}\right)$$

Như vậy phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$x^3+y^3+z^3+3xyz\ge xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)$$

Vì vai trò của các biến bình đẳng nên có thể giả sử $x\ge y\ge z\ge 0$

Khi đó $x(x-y)^2+z(y-z)^2+(z+x-y)(x-y)(y-z)\ge 0$

Suy ra $x^3+y^3+z^3+3xyz\ge xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 65. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thỏa mãn điều kiện $2c+b=abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\dfrac{3}{b+c-a}+\dfrac{4}{c+a-b}+\dfrac{5}{a+b-c}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Bắc Ninh năm 2014-2015

Lời giải

Từ giả thiết ta có $a+b-c>0;\ b+c-a>0;\ c+a-b>0$.

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM dạng $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\ge\dfrac{4}{x+y}$ ta được

$$S=\left(\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}\right)+2\left(\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{a+b-c}\right)+3\left(\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}\right)\ge\frac{2}{c}+\frac{4}{b}+\frac{6}{a}$$

Mà $2c+b=abc\Leftrightarrow\dfrac{2}{b}+\dfrac{1}{c}=a$ nênkết hợp với bất đẳng thức AM - GM ta được $S\ge 2a+\dfrac{6}{a}\ge 4\sqrt{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là $4\sqrt{3}$ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\sqrt{3}$.

Bài 66. Cho phương trình $ax^2+bx+c=0\ (a\ne 0)$ có hai nghiệm thuộc đoạn $[0;2]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{8a^2-6ab+b^2}{4a^2-2ab+ac}$.

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Vĩnh Phúc năm 2014-2015

Lời giải

Gọi $x_1;\ x_2\ (x_1\le x_2)$ là hai nghiệm của phương trình đã cho. Theo định lí Vi-ét ta có

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a};\ x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

Khi đó $P = \frac{8a^2 - 6ab + b^2}{4a^2 - 2ab + ac} = \frac{8 - 6\frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2}{4 - 2\frac{b}{a} + \frac{c}{a}} = \frac{8 + 6(x_1 + x_2) + (x_1 + x_2)^2}{4 + 2(x_1 + x_2) + x_1x_2}$

Do $0 \le x_1 \le x_2 \le 2 \Rightarrow x_1^2 \le x_1x_2$; $x_2^2 \le 4 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 \le x_1x_2 + 4 \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 \le 3x_1x_2 + 4$

Do đó ta được $P \le \frac{8 + 6(x_1 + x_2) + 3x_1x_2 + 4}{4 + 2(x_1 + x_2) + x_1x_2} = 3$

Đẳng thức xảy ra khi $x_1 = x_2 = 2$ hoặc $x_1 = 0; x_2 = 2$ hay $\left[\begin{array}{l} c = -b = 4a \\ b = -2a;\ c = 0 \end{array}\right.$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 3.

Bài 67. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c \le 2014$. Chứng minh rằng

$$\frac{5a^3 - b^3}{ab + 3a^2} + \frac{5b^3 - c^3}{bc + 3b^2} + \frac{5c^3 - a^3}{ca + 3c^2} \le 2014$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Lào Cai năm 2014-2015

Lời giải

Dễ dàng chứng minh được $a^3 + b^3 \ge ab(a + b)$, ta biến đổi tương đương bất đẳng thức bên như sau

$$a^3 + b^3 \ge ab(a + b) \Leftrightarrow 5a^3 - b^3 \le 6a^3 - ab(a + b) \Leftrightarrow 5a^3 - b^3 \le a(6a^2 - ab - b^2)$$

$$\Leftrightarrow 5a^3 - b^3 \le a(2a - b)(3a + b) \Leftrightarrow \frac{5a^3 - b^3}{ab + 3a^2} \le 2a - b$$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{5b^3 - c^3}{bc + 3b^2} \le 2b - c;\ \frac{5c^3 - a^3}{ca + 3c^2} \le 2c - a$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{5a^3 - b^3}{ab + 3a^2} + \frac{5b^3 - c^3}{bc + 3b^2} + \frac{5c^3 - a^3}{ca + 3c^2} \le a + b + c \le 2014$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{2014}{3}$

Bài 68. Cho các số dương x, y, zthỏa mãn $x(x + 1) + y(y + 1) + z(z + 1) \le 18$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = \frac{1}{x + y + 1} + \frac{1}{y + z + 1} + \frac{1}{z + x + 1}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Thái Bình năm 2014-2015

Lời giải

Ta biến đổi giả thiết

$$x(x + 1) + y(y + 1) + z(z + 1) \le 18 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \le 18 - (x + y + z)$$

Áp dụng một đánh giá quen thuộc ta được $(x + y + z)^2 \le 54 - 3(x + y + z)$

Hay $0 < x + y + z \le 6$. Áp dụng bất đẳng thức AM - GM dạng $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \ge \frac{9}{a + b + c}$ ta được

$$B = \frac{1}{x + y + 1} + \frac{1}{y + z + 1} + \frac{1}{z + x + 1} \ge \frac{9}{2(x + y + z) + 3} \ge \frac{9}{2.6 + 3} = \frac{3}{5}$$

Hay $B \ge \frac{3}{5}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của B là $\frac{3}{5}$. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=2$

Bài 69. Cho a, b, c là ba số thực dương và có tổng bằng 1. Chứng minh rằng
$$\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab}\le\frac{3}{2}$$
Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Thái Bình năm 2014-2015

Lời giải

Kết hợp với giả thiết ta có biến đổi sau
$$\frac{a-bc}{a+bc}=1-\frac{2bc}{a+bc}=1-\frac{2bc}{a(a+b+c)+bc}=1-\frac{2bc}{(a+b)(a+c)}$$
Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{b-ca}{b+ca}=1-\frac{2ca}{(b+c)(b+a)}$; $\frac{c-ab}{c+ab}=1-\frac{2ab}{(c+a)(b+c)}$.

Khi đó ta được
$$\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab}=3-2\left(\frac{bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{ca}{(b+c)(b+a)}+\frac{ab}{(c+a)(c+b)}\right)$$
Ta quy bài toán về chứng minh $\frac{bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{ca}{(b+c)(b+a)}+\frac{ab}{(c+a)(c+b)}\ge\frac{3}{4}$

Bất đẳng thức trên tương đương với
$$4bc(b+c)+4ca(c+a)+4ab(a+b)\ge 3(a+b)(b+c)(c+a)$$
$$\Leftrightarrow b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+a^2b+ab^2\ge 6abc\Leftrightarrow\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\ge 6$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-2\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}-2\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}-2\right)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(b-c)^2}{bc}+\frac{(c-a)^2}{ca}\ge 0$$
Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài 70. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $6a+3b+2c=abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $B=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{2}{\sqrt{b^2+4}}+\frac{3}{\sqrt{c^2+9}}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Phú Thọ năm 2014-2015

Lời giải

Giả thiết của bài toán được viết lại thành $\frac{6}{bc}+\frac{3}{ca}+\frac{2}{ab}=1$.

Đặt $a=\frac{1}{x}; b=\frac{2}{y}; c=\frac{3}{z}$, khi đó ta được $xy+yz+zx=1$

Biểu thức B được viết lại thành $B=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}$

Để ý đến giả thiết $xy+yz+zx=1$ ta có $x^2+1=x^2+xy+yz+zx=(x+y)(z+x)$

Khi đó ta được $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{(x+y)(z+x)}}$

Hoàn toàn tương tự ta được $B=\frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}+\frac{y}{\sqrt{(x+y)(y+z)}}+\frac{z}{\sqrt{(z+x)(y+z)}}$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được

$$\frac{x}{\sqrt{(x+y)(z+x)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+y}+\frac{x}{z+x}\right)$$
$$\frac{y}{\sqrt{(x+y)(y+z)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x+y}+\frac{y}{y+z}\right)$$
$$\frac{z}{\sqrt{(x+z)(y+z)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z+x}+\frac{z}{y+z}\right)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$B=\frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}+\frac{y}{\sqrt{(x+y)(y+z)}}+\frac{z}{\sqrt{(z+x)(y+z)}}\le\frac{3}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của B là $\frac{3}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=\sqrt{3};\ b=2\sqrt{3};\ c=3\sqrt{3}$

Bài 71. Cho các số thực a, b, c dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{b}{\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}>2$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Quảng Trị năm 2014-2015

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được $\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}}=\frac{a^2}{\sqrt{a^2\left(b^2+c^2\right)}}\ge\frac{2a^2}{a^2+b^2+c^2}$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{b}{\sqrt{c^2+a^2}}\ge\frac{2b^2}{a^2+b^2+c^2};\ \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\ge\frac{2c^2}{a^2+b^2+c^2}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{b}{\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\ge 2$

Vì đẳng thức không xảy ra nên ta có bất đẳng thức $\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{b}{\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}>2$

Bài toán được chứng minh xong.

Bài 72. Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=\frac{(b+c-a)^3}{2a}+\frac{(c+a-b)^3}{2b}+\frac{(a+b-c)}{2c}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Đăk Lăk, 2014 – 2015

Lời giải

Cách 1. Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được

$$\frac{(b+c-a)^3}{2a}+\frac{2a}{4}+\frac{1}{2}\ge\frac{3(b+c-a)}{2}$$
$$\frac{(c+a-b)^3}{2b}+\frac{2b}{4}+\frac{1}{2}\ge\frac{3(c+a-b)}{2}$$
$$\frac{(a+b-c)^3}{2c}+\frac{2c}{4}+\frac{1}{2}\ge\frac{3(a+b-c)}{2}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{(b+c-a)^3}{2a}+\frac{(c+a-b)^3}{2b}+\frac{(a+b-c)}{2c}+\frac{a+b+c}{2}+\frac{3}{2}\ge\frac{3(a+b+c)}{2}$$

Hay $\frac{(b+c-a)^3}{2a}+\frac{(c+a-b)^3}{2b}+\frac{(a+b-c)}{2c}\ge a+b+c-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{3}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Cách 2. Đặt $x=b+c-a; y=c+a-b; z=a+b-c$, khi đó ta viết lại giả thiết thành $x+y+z=3$. Bài toán quy về tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=\frac{x^3}{2(y+z)}+\frac{y^3}{2(z+x)}+\frac{z^3}{2(x+y)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng phân thức ta được

$$A=\frac{x^3}{y+z}+\frac{y^3}{z+x}+\frac{z^3}{x+y}\ge\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{2(xy+yz+zx)}\ge\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\ge\frac{3}{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{3}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 73. Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $x>-1; y>-2; z>-3$ và $x+y+z=-5$. Chứng minh rằng $\frac{1}{x+1}+\frac{4}{y+2}+\frac{9}{z+3}\ge 36$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Yên Bái năm 2014-2015

Lời giải

Do $x>-1; y>-2; z>-3$ nên $x+1>0; y+2>0; z+3>0$.

Khi đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng phân thức ta được

$$\frac{1}{x+1}+\frac{4}{y+2}+\frac{9}{z+3}\ge\frac{(1+2+3)^2}{x+y+z+6}=36$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}x+y+z=-5\\ \frac{1}{x+1}=\frac{2}{y+2}=\frac{3}{z+3}\end{cases}$$

Bài 74. Cho ba số thực x, y, z không âm thỏa mãn $x+y+z+xyz=4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=xy+yz+zx$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Đại Học Vinh năm 2014-2015

Lời giải

Cách 1. Giả sử x là số nhỏ nhất trong ba số x, y, z. khi đó ta xét các trường hợp sau

- **Trường hợp 1.** $yz \le 1$. Kho đó ta được $xy \le 1;\ zx \le 1$ nên $P \le 3$
- **Trường hợp 2.** $yz > 1$. Khi đó ta được $xyz \ge x$. Do đó

$$\begin{aligned}4 = x+y+z+xyz \ge x+y+z+x &\ge 2\sqrt{(x+y)(x+z)}\\ &= 2\sqrt{x^2+xy+yz+zx} = 2\sqrt{x^2+P} \ge 2\sqrt{P}\end{aligned}$$

Suy ra $P \le 4$. Kết hợp các kết quả ta được giá trị nhỏ nhất của P là 4.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0;\ y = z = 2$ và các hoán vị.

Cách 2. Giả sử x là số lớn nhất trong các số x, y, z.
Khi đó ta được $x+y+z \le 3x;\ xyz \le x^3$.

Suy ra $x^3 + 3x \ge 4$ hay $(x-1)(x^2+x+4) \ge 0 \Rightarrow x \ge 1$ .Ta có

$$\begin{aligned}P = xy+yz+zx &= x(x+y+z)+yz-x^2 = x(4-xyz)+yz-x^2\\ &= -(x-2)^2+4+yz(1-x^2) \le 4\end{aligned}$$

Suy ra $P \le 4$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 4.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0;\ y = z = 2$ và các hoán vị.

Bài 75. Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{\sqrt{b+3}}+\frac{b^2}{\sqrt{c+3}}+\frac{c^2}{\sqrt{a+3}} \ge \frac{3}{2}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Bắc Giang năm 2014-2015

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được

$$\frac{a^2}{\sqrt{b+3}}+\frac{b^2}{\sqrt{c+3}}+\frac{c^2}{\sqrt{a+3}} = \frac{4a^2}{4\sqrt{b+3}}+\frac{4b^2}{4\sqrt{c+3}}+\frac{4c^2}{4\sqrt{a+3}} \ge \frac{4a^2}{b+7}+\frac{4b^2}{c+7}+\frac{4c^2}{a+7}$$

Áp dụng tiếp bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng phân thức ta được

$$\frac{4a^2}{b+7}+\frac{4b^2}{c+7}+\frac{4c^2}{a+7} \ge \frac{4(a+b+c)^2}{a+b+c+21} = \frac{4.9}{3+21} = \frac{3}{2}$$

Suy ra ta được $\frac{a^2}{\sqrt{b+3}}+\frac{b^2}{\sqrt{c+3}}+\frac{c^2}{\sqrt{a+3}} \ge \frac{3}{2}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài 76.

1) Cho a, b, c là ba số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng $a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc} \le \frac{3}{4}(a+b+c)$

2) Cho a, b, c là ba số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng

$$\frac{bc}{a^2+2bc}+\frac{ca}{b^2+2ca}+\frac{ab}{c^2+2ab} \le 1$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Tin - Toán Tỉnh Tiền Giang năm 2014-2015

Lời giải

1) Sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\sqrt{ab} = 2.\sqrt{\frac{a}{4}.b} \le \frac{a}{4}+b;\ \sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{\frac{a}{4}.b.4c} \le \frac{\frac{a}{4}+b+4c}{3}$$

Từ đó ta có $a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}\le a+\frac{a}{4}+b+\frac{\frac{a}{4}+b+4c}{3}=\frac{4(a+b+c)}{3}$.

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=4b=16c$

2) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab}\ge 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng phân thức ta được

$$\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab}\ge \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}=1$$

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Bài 77. Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1-x^2}{x+yz}+\frac{1-y^2}{y+zx}+\frac{1-z^2}{z+xy}\ge 6$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Thành Phố Hà Nội năm 2014-2015

Lời giải

Áp dụng giả thiết ta được

$$\frac{1-x^2}{x+yz}=\frac{(1-x)(1+x)}{(x+y)(z+x)}=\frac{(x+y)(y+z)+(z+x)(y+z)}{(x+y)(z+x)}$$

Hoàn toàn tương tưh ta được

$$\frac{1-y^2}{y+zx}=\frac{(x+z)(x+y)+(x+z)(y+z)}{(x+y)(y+z)}$$

$$\frac{1-z^2}{z+xy}=\frac{(x+y)(y+z)+(x+y)(x+z)}{(y+z)(z+x)}$$

Đặt $a=(x+y)(y+z); b=(y+z)(z+x); c=(x+y)(z+x)$, khi đó ta viết lại được bất đẳng thức thành

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\ge 6$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2; \frac{b}{c}+\frac{c}{b}\ge 2; \frac{c}{a}+\frac{c}{a}\ge 2$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\ge 6$

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 78. Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $xy+yz+zx=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\le \frac{3}{2}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐHSP TP Hồ Chí Minh, 2014-2015

Lời giải

Áp dụng giả thiết ta được $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+xy+yz+zx}}=\frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được

$$\frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}=\sqrt{\frac{x^2}{(x+y)(x+z)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+y}+\frac{x}{z+x}\right)$$

Do đó ta được $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+y}+\frac{x}{z+x}\right)$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x+y}+\frac{y}{y+z}\right);\ \frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z+x}+\frac{z}{y+z}\right)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned}&\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\\&\le\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+y}+\frac{x}{z+x}+\frac{y}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}+\frac{z}{y+z}\right)=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Bài 79. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{z^2+x^2}=2014$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Thanh Hóa, 2014 – 2015

Lời giải

Dễ dàng chứng minh được $\sqrt{2\left(y^2+z^2\right)}\ge x+y$ do đó ta được $\frac{x^2}{y+z}\ge\frac{x^2}{\sqrt{2\left(y^2+z^2\right)}}$.

Hoàn toàn tương tự ta được

$$P\ge\frac{x^2}{\sqrt{2\left(y^2+z^2\right)}}+\frac{y^2}{\sqrt{2\left(z^2+x^2\right)}}+\frac{z^2}{\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}}$$

Đặt $a=\sqrt{y^2+z^2};b=\sqrt{z^2+x^2};c=\sqrt{x^2+y^2}$, suy ra $a+b+c=2014$

Từ đó ta được $x^2=\frac{b^2+c^2-a^2}{2};y^2=\frac{c^2+a^2-b^2}{2};z^2=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}$

Khi đó ta được $P\ge\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{a}+\frac{c^2+a^2-b^2}{b}+\frac{a^2+b^2-c^2}{c}\right)$. Xét biểu thức

$$\begin{aligned}Q&=\frac{b^2+c^2-a^2}{a}+\frac{c^2+a^2-b^2}{b}+\frac{a^2+b^2-c^2}{c}\\&=\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{a}+\frac{a^2}{b}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{c}-(a+b+c)\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned}Q&=\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)+\left(\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c}\right)-(a+b+c)\\&\ge\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c}+\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c}-(a+b+c)=a+b+c=2014\end{aligned}$$

Do đó ta được $P \ge \frac{2014}{2\sqrt{2}}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{2014}{2\sqrt{2}}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{2014}{3\sqrt{2}}$.

Bài 80. Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ac + abc \le 4$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c \ge 2(ab + bc + ac)$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐHKHTN Hà Nội năm 2015-2016

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM 4 số ta có

$$4 \ge abc + ab + bc + ac \ge 4\sqrt[4]{a^3b^3c^3} \Rightarrow 1 \ge abc \Rightarrow a + b + c \ge 3\sqrt[3]{abc} \ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

Khi đó ta quy bài toán về chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 + 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \ge 2(ab + bc + ac)$

Đặt $\sqrt[3]{a^2} = x, \sqrt[3]{b^2} = y, \sqrt[3]{c^2} = z\ (x, y, z > 0)$, bất đẳng thức được viết lại thành

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \ge 2\sqrt{x^3y^3} + 2\sqrt{z^3x^3} + 2\sqrt{z^3y^3}$$

Dễ dàng chứng minh được

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \ge xy(x + y) + yz(y + z) + xz(x + z)$$

$$xy(x + y) + yz(y + z) + xz(x + z) \ge 2\sqrt{x^3y^3} + 2\sqrt{z^3x^3} + 2\sqrt{z^3y^3}$$

Khi đó ta được

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \ge 2\sqrt{x^3y^3} + 2\sqrt{z^3x^3} + 2\sqrt{z^3y^3}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Bài 81. Giả sử x, y, z là các số thực lớn hơn 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{\sqrt{y + z - 4}} + \frac{y}{\sqrt{z + x - 4}} + \frac{z}{\sqrt{x + y - 4}}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐHKHTN Hà Nội năm 2015-2016

Lời giải

Ta có $P = \frac{4x}{4\sqrt{y + z - 4}} + \frac{4y}{4\sqrt{z + x - 4}} + \frac{4z}{4\sqrt{x + y - 4}}$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được

$$4\sqrt{y + z - 4} = 2\sqrt{4(y + z - 4)} \le y + z - 4 + 4 = y + z$$

Áp dụng tương tự thì ta được

$$P = \frac{4x}{4\sqrt{y + z - 4}} + \frac{4y}{4\sqrt{z + x - 4}} + \frac{4z}{4\sqrt{x + y - 4}} \ge 4\left(\frac{x}{y + z} + \frac{y}{x + z} + \frac{z}{x + y}\right)$$

Dễ dàng chứng minh được $\frac{x}{y + z} + \frac{y}{x + z} + \frac{z}{x + y} \ge \frac{3}{2}$

Do đó ta được $P \ge 6$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 6.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 4$.

Bài 82. Tìm các số thực không âm a và b thỏa mãn

$$\left(a^2 + b + \frac{3}{4}\right)\left(b^2 + a + \frac{3}{4}\right) = \left(2a + \frac{1}{2}\right)\left(2b + \frac{1}{2}\right)$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐHSP Hà Nội năm 2015-2016

Lời giải

Ta dễ dàng chứng minh được

$$\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 \ge 0 \Leftrightarrow a^2+\frac{1}{4} \ge a \Leftrightarrow a^2+b+\frac{3}{4} \ge a+b+\frac{1}{2}$$

$$\left(b-\frac{1}{2}\right)^2 \ge 0 \Leftrightarrow b^2+\frac{1}{4} \ge b \Leftrightarrow b^2+a+\frac{3}{4} \ge a+b+\frac{1}{2}$$

Áp dụng đánh giá trên và bất đẳng thức AM - GM ta được

$$\left(a^2+b+\frac{3}{4}\right)\left(b^2+a+\frac{3}{4}\right) \ge \left(a+b+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(2a+2b+1)^2$$

$$= \frac{\left[\left(2a+\frac{1}{2}\right)+\left(2b+\frac{1}{2}\right)\right]^2}{4} \ge \left(2a+\frac{1}{2}\right)\left(2b+\frac{1}{2}\right)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\frac{1}{2}$.

Bài 83. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{y^2z^2}{x(y^2+z^2)}+\frac{z^2x^2}{y(z^2+x^2)}+\frac{x^2y^2}{z(x^2+y^2)}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Phú Thọ năm 2015-2016

Lời giải

Ta có $P=\frac{1}{x\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{y^2}\right)}+\frac{1}{y\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{x^2}\right)}+\frac{1}{z\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)}$

Đặt $a=\frac{1}{x}; b=\frac{1}{y}; z=\frac{1}{z}$ thì $a;b;c>0$ và $a^2+b^2+c^2=1$. Khi đó ta được

$$P=\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2}=\frac{a^2}{a(1-a^2)}+\frac{b^2}{b(1-b^2)}+\frac{c^2}{c(1-c^2)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương ta có

$$a^2(1-a^2)^2=\frac{1}{2}.2a^2(1-a^2)(1-a^2) \le \frac{1}{2}\left(\frac{2a^2+1-a^2+1-a^2}{3}\right)^3=\frac{4}{27}$$

$$\Rightarrow a(1-a^2) \le \frac{2}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{a^2}{a(1-a^2)} \ge \frac{3\sqrt{3}.a^2}{2}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{b^2}{b(1-b^2)} \ge \frac{3\sqrt{3}.b^2}{2}; \frac{c^2}{c(1-c^2)} \ge \frac{3\sqrt{3}.c^2}{2}$$

Cộng theo vế các kết quả trên ta được $P \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\sqrt{3}$

Bài 84. Xét các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T=\frac{a}{b^4+c^4+a}+\frac{b}{a^4+c^4+b}+\frac{c}{a^4+b^4+c}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Nam Định năm 2015-2016

Lời giải

Ta có $2\left(b^4+c^4\right)\ge\left(b^2+c^2\right)^2\ge 2bc\left(b^2+c^2\right)\Rightarrow b^4+c^4\ge bc\left(b^2+c^2\right)$

Do đó ta được

$$\frac{a}{b^4+c^4+a}\le\frac{a}{bc\left(b^2+c^2\right)+a}=\frac{a^2}{abc\left(b^2+c^2\right)+a^2}=\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{b}{a^4+c^4+b}\le\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2};\ \frac{c}{a^4+b^4+c}\le\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Cộng theo vế các kết quả trên ta được $T\le 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của T là 1. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 85. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng

$$\frac{4a^2+(b-c)^2}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{4b^2+(c-a)^2}{2b^2+c^2+a^2}+\frac{4c^2+(a-b)^2}{2c^2+a^2+b^2}\ge 3$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Nam Định năm 2015-2016

Lời giải

Ta có

$$2-\frac{4a^2+(b-c)^2}{2a^2+b^2+c^2}=\frac{2\left(2a^2+b^2+c^2\right)-\left(4a^2+b^2+c^2-2bc\right)}{2a^2+b^2+c^2}=\frac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2}$$

Áp dụng tương tự ta viết lại được bất đẳng thức

$$\frac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{(c+a)^2}{2b^2+c^2+a^2}+\frac{(a+b)^2}{2c^2+a^2+b^2}\le 3$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng phân thức ta được

$$\frac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2}\le\frac{b^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{c^2+a^2}$$
$$\frac{(c+a)^2}{2b^2+c^2+a^2}\le\frac{c^2}{b^2+c^2}+\frac{a^2}{b^2+a^2}$$
$$\frac{(a+b)^2}{2c^2+a^2+b^2}\le\frac{a^2}{c^2+a^2}+\frac{b^2}{c^2+b^2}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{(c+a)^2}{2b^2+c^2+a^2}+\frac{(a+b)^2}{2c^2+a^2+b^2}\le 3$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Bài 86. Cho a, b là các số dương thỏa mãn điều kiện $(a+b)^3+4ab\le 12$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+2015ab\le 2016$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Hải Dương năm 2015-2016

Lời giải

Ta có $12\ge(a+b)^3+4ab\ge\left(2\sqrt{ab}\right)^3+4ab$. Đặt $t=\sqrt{ab},\ t>0$ thì

$$12\ge 8t^3+4t^2\Leftrightarrow 2t^3+t^2-3\le 0\Leftrightarrow(t-1)\left(2t^2+3t+3\right)\le 0$$

Do $2t^2+3t+3>0,\forall t$ nên $t-1\le 0\Leftrightarrow t\le 1$. Vậy $0<ab\le 1$

Dễ dàng chứng minh được $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\le\frac{2}{1+\sqrt{ab}}$, $\forall a,b>0,ab\le 1$

Thật vậy, bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{1}{1+a}-\frac{1}{1+\sqrt{ab}}+\frac{1}{1+b}-\frac{1}{1+\sqrt{ab}}\le 0\Leftrightarrow\frac{\sqrt{ab}-a}{(1+a)\left(1+\sqrt{ab}\right)}+\frac{\sqrt{ab}-b}{(1+b)\left(1+\sqrt{ab}\right)}\le 0$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{1+\sqrt{ab}}\right)\left(\frac{\sqrt{a}}{1+a}-\frac{\sqrt{b}}{1+b}\right)\le 0\Leftrightarrow\frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^2\left(\sqrt{ab}-1\right)}{\left(1+\sqrt{ab}\right)(1+a)(1+b)}\le 0$$

Do $0<ab\le 1$ nên bất đẳng thức này đúng.

Tiếp theo ta sẽ chứng minh $\frac{2}{1+\sqrt{ab}}+2015ab\le 2016,\ \forall a,b>0,ab\le 1$

Đặt $t=\sqrt{ab},0<t\le 1$ ta được $\frac{2}{1+t}+2015t^2\le 2016$

$$2015t^3+2015t^2-2016t-2014\le 0\Leftrightarrow(t-1)\left(2015t^2+4030t+2014\right)\le 0$$

Do $0<t\le 1$ nên bất đẳng thức trên đúng.

Vậy $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+2015ab\le 2016$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1$.

Bài 87. Cho a,b,c là các số thực bất kỳ . Chứng minh rằng

$$\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)\ge\frac{3(a+b+c)^2}{4}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Nghện An năm 2015-2016

Lời giải

Cách 1. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(2a^2+2\right)\left(2b^2+2\right)\left(2c^2+2\right)\ge 3\left(\sqrt{2}a+\sqrt{2}b+\sqrt{2}c\right)^2$$

Đặt $x=a\sqrt{2};\ y=b\sqrt{2};\ z=c\sqrt{2}$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\left(x^2+2\right)\left(y^2+2\right)\left(z^2+2\right)\ge 3(x+y+z)^2$$

Ta có $\left(x^2+2\right)\left(y^2+2\right)=x^2y^2+1+2x^2+2y^2+3$

Suy ra $\left(x^2+2\right)\left(y^2+2\right)\ge 2xy+x^2+y^2+\frac{(x+y)^2}{2}+3=\frac{3}{2}\left[(x+y)^2+2\right]$

$$\Rightarrow\left(x^2+2\right)\left(y^2+2\right)\left(z^2+2\right)\ge\frac{3}{2}\left[(x+y)^2z^2+4+2(x+y)^2+2z^2\right]$$

$$\ge\frac{3}{2}\left[4(x+y)z+2(x+y)^2+2z^2\right]=3(x+y+z)^2$$

Do đó ta được $\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)\ge\frac{3(a+b+c)^2}{4}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Cách 2. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$4a^2b^2c^2 + 4\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right) + a^2 + b^2 + c^2 + 4 \ge 6\left(ab + bc + ca\right)$$

Theo nguyên lý Dirichlet ta giả sử

$$\left(2a^2 - 1\right)\left(2b^2 - 1\right) \ge 0 \Leftrightarrow c^2\left(2a^2 - 1\right)\left(2b^2 - 1\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 4a^2b^2c^2 + c^2 \ge 2a^2c^2 + 2b^2c^2$$

Khi đó ta quy bài toán về chứng minh

$$4\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right) + a^2 + b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 + 4 \ge 6\left(ab + bc + ca\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(a - b\right)^2 + \left(2ab - 1\right)^2 + \frac{3\left(2bc - 1\right)^2 + 3\left(2ca - 1\right)^2}{2} \ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 88. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Chứng minh rằng

a) $a + b + c \ge 3abc$

b) $\sqrt{\frac{a^3}{1 + 3bc}} + \sqrt{\frac{b^3}{1 + 3ca}} + \sqrt{\frac{c^3}{1 + 3ab}} \ge \frac{3}{2}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Bà Rịa – Vũng Tàu, 2015 – 2016

Lời giải

a) Giả thiết của bài toán được viết lại thành

$$abc\left(a + b + c\right) = ab + bc + ca$$

Mà ta lại có $ab + bc + ca \le \frac{\left(a + b + c\right)^2}{3}$

Do đó ta được $abc\left(a + b + c\right) \le \frac{\left(a + b + c\right)^2}{3} \Leftrightarrow 3abc \le a + b + c$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

b) Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\sqrt{\frac{a^4}{a + 3abc}} + \sqrt{\frac{b^4}{b + 3abc}} + \sqrt{\frac{c^4}{c + 3abc}} \ge \frac{3}{2}$$

Áp dụng kết quả câu a ta được

$$\sqrt{\frac{a^4}{a + 3abc}} + \sqrt{\frac{b^4}{b + 3abc}} + \sqrt{\frac{c^4}{c + 3abc}} \ge \frac{a^2}{\sqrt{2a + b + c}} + \frac{b^2}{\sqrt{a + 2b + c}} + \frac{c^2}{\sqrt{a + b + 2c}}$$

Ta cần chỉ ra được

$$\frac{a^2}{\sqrt{2a + b + c}} + \frac{b^2}{\sqrt{a + 2b + c}} + \frac{c^2}{\sqrt{a + b + 2c}} \ge \frac{3}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng phân thức ta được

$$\frac{a^2}{\sqrt{2a + b + c}} + \frac{b^2}{\sqrt{a + 2b + c}} + \frac{c^2}{\sqrt{a + b + 2c}} \ge \frac{\left(a + b + c\right)^2}{\sqrt{2a + b + c} + \sqrt{a + 2b + c} + \sqrt{a + b + 2c}}$$

Mà theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta được

$$\sqrt{2a + b + c} + \sqrt{a + 2b + c} + \sqrt{a + b + 2c} \le \sqrt{12\left(a + b + c\right)}$$

Suy ra

$$\frac{\left(a + b + c\right)^2}{\sqrt{2a + b + c} + \sqrt{a + 2b + c} + \sqrt{a + b + 2c}} \ge \frac{\left(a + b + c\right)^2}{2\sqrt{3\left(a + b + c\right)}} = \frac{\left(a + b + c\right)\sqrt{a + b + c}}{2\sqrt{3}}$$

Cũng từ giả thiết $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ ta suy ra được

$$a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{a+b+c}\Rightarrow a+b+c\ge 3$$

Do đó $\frac{(a+b+c)\sqrt{a+b+c}}{2\sqrt{3}}\le\frac{3}{2}$.

Từ các kết quả trên ta được $\frac{a^2}{\sqrt{2a+b+c}}+\frac{b^2}{\sqrt{a+2b+c}}+\frac{c^2}{\sqrt{a+b+2c}}\ge\frac{3}{2}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 89. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\ge\frac{3}{2}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh TháiBình năm 2015-2016

Lời giải

Theo một đánh giá quen thuộc ta được

$$(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)=9\Rightarrow a+b+c\ge 3$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được $\frac{1}{1+a^2}=1-\frac{a^2}{1+a^2}\ge 1-\frac{a^2}{2a}=1-\frac{a}{2}$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{1}{b^2+1}\ge 1-\frac{b}{2};\ \frac{1}{c^2+1}\ge 1-\frac{c}{2}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\ge 3-\frac{a+b+c}{2}\ge\frac{3}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 90. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c}+\frac{9}{2(ab+bc+ca)}\ge\frac{9}{2}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Thái Bình năm 2015-2016

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng phân thức ta được

$$\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c}\ge\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c}=a+b+c$$

Mà theo một đánh giá quen thuộc thì $a+b+c\ge\sqrt{3(ab+bc+ca)}$. Do đó ta được

$$\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c}+\frac{9}{2(ab+bc+ca)}\ge\sqrt{3(ab+bc+ca)}+\frac{9}{2(ab+bc+ca)}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được

$$\sqrt{3(ab+bc+ca)}+\frac{9}{2(ab+bc+ca)}$$
$$=\frac{\sqrt{3(ab+bc+ca)}}{2}+\frac{\sqrt{3(ab+bc+ca)}}{2}+\frac{9}{2(ab+bc+ca)}\ge 3\sqrt[3]{\frac{27}{8}}=\frac{9}{2}$$

Suy ra $\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c}+\frac{9}{2(ab+bc+ca)}\ge\frac{9}{2}$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 91. Cho a, b, c số thực dương thoả mãn $(a+b)(b+c)(c+a)=1$. Chứng minh rằng

$$ab+ac+bc\le\frac{3}{4}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán TP Hà Nội năm 2015-2016

Lời giải

Dễ dàng chứng minh được $(a+b)(b+c)(c+a)\ge\frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$9(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

Ta có đẳng thức $(a+b+c)(ab+bc+ca)=(a+b)(b+c)(c+a)+abc$. Nên ta được

$$9(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8(a+b)(b+c)(c+a)+8abc$$
$$\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc$$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng. Do đó bất đẳng thức trên đúng.

Áp dụng bất đẳng thức trên và kết hợp với giả thiết ta được

$$1\ge\frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

Lại có $a+b+c\ge\sqrt{3(ab+bc+ca)}$. Nên ta được

$$1\ge\frac{8}{9}\sqrt{3(ab+bc+ca)}(ab+bc+ca)\Leftrightarrow\left(\frac{9}{8}\right)^2\ge 3(ab+bc+ca)^3$$

Hay $ab+bc+ca\le\frac{3}{4}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{2}$.

Bài 92. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$a^5+b^5+c^5+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 6$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Bạc Liêu năm 2015-2016

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được

$$a^5+\frac{1}{a}\ge 2a^2;b^5+\frac{1}{b}\ge 2b^2;\ c^5+\frac{1}{c}\ge 2c^2$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$a^5+b^5+c^5+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 2\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Dễ thấy $a^2+b^2+c^2\ge\dfrac{(a+b+c)^2}{3}=3$

Do đó ta được $a^5+b^5+c^5+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge 6$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 93. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=3\sqrt{2}$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{x(3y+5z)}}+\frac{1}{\sqrt{y(3z+5x)}}+\frac{1}{\sqrt{z(3x+5y)}}\ge\frac{3}{4}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Bình Thuận năm 2015-2016

Lời giải

Cách 1. Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được

$$\frac{1}{\sqrt{x(3y+5z)}}+\frac{1}{\sqrt{y(3z+5x)}}+\frac{1}{\sqrt{z(3x+5y)}}$$
$$\ge\frac{9}{\sqrt{x(3y+5z)}+\sqrt{y(3z+5x)}+\sqrt{z(3x+5y)}}$$

Mà theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta được

$$\sqrt{x(3y+5z)}+\sqrt{y(3z+5x)}+\sqrt{z(3x+5y)}$$
$$\le\sqrt{3\left[x(3y+5z)+y(3z+5x)+z(3x+5y)\right]}=\sqrt{24(xy+yz+zx)}$$

Mà theo một đánh giá quen thuộc thì $3(xy+yz+zx)\le(x+y+z)^2=18$. Do đó ta được

$$\sqrt{x(3y+5z)}+\sqrt{y(3z+5x)}+\sqrt{z(3x+5y)}\le\sqrt{8.18}=12$$

Suy ra $\dfrac{1}{\sqrt{x(3y+5z)}}+\dfrac{1}{\sqrt{y(3z+5x)}}+\dfrac{1}{\sqrt{z(3x+5y)}}\ge\dfrac{9}{12}=\dfrac{3}{4}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\sqrt{2}$.

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được

$$2\sqrt{8x(3y+5z)}\le 8x+3y+5z$$

Suy ra $\dfrac{1}{\sqrt{x(3y+5z)}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{8x(3y+5z)}}\ge\dfrac{4\sqrt{2}}{8x+3y+5z}$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{1}{\sqrt{y(3z+5x)}}\ge\frac{4\sqrt{2}}{8y+3z+5x};\ \frac{1}{\sqrt{z(3x+5y)}}\ge\frac{4\sqrt{2}}{8z+3x+5y}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{\sqrt{x(3y+5z)}}+\frac{1}{\sqrt{y(3z+5x)}}+\frac{1}{\sqrt{z(3x+5y)}}$$
$$\ge\frac{4\sqrt{2}}{8x+3y+5z}+\frac{4\sqrt{2}}{8y+3z+5x}+\frac{4\sqrt{2}}{8z+3x+5y}$$

Mà theo bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\frac{4\sqrt{2}}{8x+3y+5z}+\frac{4\sqrt{2}}{8y+3z+5x}+\frac{4\sqrt{2}}{8z+3x+5y}\ge\frac{9.4\sqrt{2}}{16(x+y+z)}=\frac{36\sqrt{2}}{16.3\sqrt{2}}=\frac{3}{4}$$

Suy ra $\frac{1}{\sqrt{x(3y+5z)}}+\frac{1}{\sqrt{y(3z+5x)}}+\frac{1}{\sqrt{z(3x+5y)}}\ge\frac{3}{4}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\sqrt{2}$.

Bài 94. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{a^2+b^2+c^2}+\frac{ab+bc+ca}{2}+\frac{1}{a^2+b^2+c^2}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐH Vinh năm 2015-2016

Lời giải

Từ giả thiết $a+b+c=2$ ta được $ab+bc+ca=\frac{4-\left(a^2+b^2+c^2\right)}{2}$

Do đó biểu thức P được viết lại thành

$$P=\sqrt{a^2+b^2+c^2}+\frac{4-\left(a^2+b^2+c^2\right)}{4}+\frac{1}{a^2+b^2+c^2}$$

Đặt $t=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\Rightarrow\frac{2}{\sqrt{3}}\le t\le 2$. Khi đó ta được

$$P=t+\frac{1}{t^2}-\frac{t^2}{4}+1=\frac{t}{8}+\frac{t}{8}+\frac{1}{2t^2}+\frac{3t}{4}-\frac{t^2}{4}+1\ge\frac{3}{4}+\frac{(t-1)(2-1)}{4}+\frac{3}{2}\ge\frac{9}{4}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{9}{4}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=0;\ c=2$ và các hoán vị.

Bài 95.

a) Cho a, b là các số thực dương. Chứng minh rằng $\sqrt{(1+a)(1+b)}\ge 1+\sqrt{ab}$

b) Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a+b=ab$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{a^2+2a}+\frac{1}{b^2+2b}+\sqrt{\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Bình Phước năm 2015-2016

Lời giải

a) Bình phương hai vế ta được

$(1+a)(1+b)=1+2\sqrt{ab}+ab\Leftrightarrow a+b\ge 2\sqrt{ab}\Leftrightarrow\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\ge 0$

b) Áp dụng bất đẳng thức câu a và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$ ta được

$$P\ge\frac{4}{a^2+2a+b^2+2b}+1+ab=\frac{4}{(a+b)^2-2ab+2(a+b)}+1+ab=\frac{4}{a^2b^2}+ab+1$$

$$=\left(\frac{4}{a^2b^2}+\frac{ab}{16}+\frac{ab}{16}\right)+\frac{7ab}{8}+1\ge 3.\sqrt[3]{4.\frac{1}{16}.\frac{1}{16}}+\frac{7ab}{8}+1=\frac{7}{4}+\frac{7ab}{8}$$

Mặt khác từ giả thiết ta có $ab=a+b\ge 2\sqrt{ab}\Rightarrow ab\ge 4$

Do đó ta được $P\ge\frac{7}{4}+\frac{7.4}{8}=\frac{21}{4}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{21}{4}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=2$

Bài 96. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}+\frac{ab+bc+ca}{2}\ge 3$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Ninh Bình năm 2015-2016

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được

$$3\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{a+b+c}\Rightarrow a+b+c\ge 3$$

Biến đổi và áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được

$$\frac{a}{1+b^2}=a-\frac{ab^2}{1+b^2}\ge a-\frac{ab^2}{2b}=a=\frac{ab}{2}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{b}{1+c^2}\ge b-\frac{bc}{2};\ \frac{c}{1+a^2}\ge c-\frac{ca}{2}$$

Khi đó ta được

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}+\frac{ab+bc+ca}{2}\ge a+b+c-\frac{ab+bc+ca}{2}+\frac{ab+bc+ca}{2}\ge 3$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 97. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a+b+c\ge 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^4}{(a+2)(b+2)}+\frac{b^4}{(b+2)(c+2)}+\frac{c^4}{(c+2)(a+2)}\ge\frac{1}{3}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Bắc Giang năm 2015-2016

Lời giải

Cách 1. Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\frac{a^4}{(a+2)(b+2)}+\frac{a+2}{27}+\frac{b+2}{27}+\frac{1}{9}\ge\frac{4a}{9}$$

$$\frac{b^4}{(b+2)(c+2)}+\frac{b+2}{27}+\frac{c+2}{27}+\frac{1}{9}\ge\frac{4b}{9}$$

$$\frac{c^4}{(c+2)(a+2)}+\frac{c+2}{27}+\frac{a+2}{27}+\frac{1}{9}\ge\frac{4c}{9}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^4}{(a+2)(b+2)}+\frac{b^4}{(b+2)(c+2)}+\frac{c^4}{(c+2)(a+2)}+\frac{2(a+b+c)}{27}+\frac{1}{3}\ge\frac{4(a+b+c)}{3}$$

Hay $\frac{a^4}{(a+2)(b+2)}+\frac{b^4}{(b+2)(c+2)}+\frac{c^4}{(c+2)(a+2)}\ge\frac{10(a+b+c)}{27}-\frac{21}{27}=\frac{1}{3}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta được

$$\frac{a^4}{(a+2)(b+2)}+\frac{b^4}{(b+2)(c+2)}+\frac{c^4}{(c+2)(a+2)}\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{ab+bc+ca+4(a+b+c)+12}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$3\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\ge ab+bc+ca+4(a+b+c)+12$$

$$\Leftrightarrow 3\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\ge ab+bc+ca+24$$

Theo một đánh giá quen thuộc ta có

$$3\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \ge (a+b+c)^2\left(a^2+b^2+c^2\right) \ge 9\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Lại thấy $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$; $8\left(a^2+b^2+c^2\right) \ge \frac{8(a+b+c)^2}{3} \ge 8.3 = 24$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được

$$3\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \ge 9\left(a^2+b^2+c^2\right) \ge ab+bc+ca+24$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài 98. Cho ba số thực $x;y;z>1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^4}{(y-1)^2}+\frac{y^4}{(z-1)^2}+\frac{z^4}{(x-1)} \ge 48$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Tiền Giang năm 2015-2016

Lời giải

Cách 1. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopsxki ta được

$$\frac{x^4}{(y-1)^2}+\frac{y^4}{(z-1)^2}+\frac{z^4}{(x-1)} \ge \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{z-1}+\frac{z^2}{x-1}\right)^2$$

Ta quy bài toán về chứng minh $\left(\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{z-1}+\frac{z^2}{x-1}\right)^2 \ge 144$, hay $\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{z-1}+\frac{z^2}{x-1} \ge 12$.

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng phân thức ta được

$$\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{z-1}+\frac{z^2}{x-1} \ge \frac{(x+y+x)^2}{x+y+z-3}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $\frac{(x+y+x)^2}{x+y+z-3} \ge 12$ hay

$$(x+y+z)^2 \ge 12(x+y+z)-36 \Leftrightarrow (x+y+z)^2-12(x+y+z)+36 \ge 0 \Leftrightarrow (x+y+z-6)^2 \ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=2$.

Cách 2. Ta đi chứng minh bất đẳng thức Với $a>1$ thì $a^4 \ge 16(a-1)^2$

Thật vậy

$$a^4 \ge 16(a-1)^2 \Leftrightarrow a^4-16a^2+32a-16 \ge 0 \Leftrightarrow (a-2)^2\left(a^2+4a-4\right) \ge 0$$

Vì $a>1$ nên $a^2+4a-4>0$, do đó bất đẳng thức trên đúng.

Áp dụng bất đẳng thức trên ta được $y^4 \ge 16(y-1)^2$ do đó $\frac{x^4}{(y-1)^2} \ge \frac{16x^4}{y^4}$.

Hoàn ta tương tự ta được

$$\frac{x^4}{(y-1)^2}+\frac{y^4}{(z-1)^2}+\frac{z^4}{(x-1)} \ge 16\left(\frac{x^4}{y^4}+\frac{y^4}{z^4}+\frac{z^4}{x^4}\right) \ge 48$$

Vì theo bất đẳng thức AM - GM thì $\frac{x^4}{y^4}+\frac{y^4}{z^4}+\frac{z^4}{x^4} \ge 3$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 99. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy+yz+zx=2xyz$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x}{z(z+x)}+\frac{y}{x(x+y)}+\frac{z}{x(x+z)}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Cần Thơ năm 2015-2016

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta được $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$. Đặt $a=\frac{1}{x}; b=\frac{1}{y}; c=\frac{1}{z}$, khi đó giả thiết trở thành

$$a+b+c=2.$$

Ta viết lại biểu thức P là $P=\frac{a^2}{a+2b}+\frac{b^2}{b^2+2c}+\frac{c^2}{c+2a}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng phân thức ta được

$$P=\frac{a^2}{a+2b}+\frac{b^2}{b^2+2c}+\frac{c^2}{c+2a}\ge\frac{(a+b+c)^2}{3(a+b+c)}=\frac{a+b+c}{3}=\frac{2}{3}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{2}{3}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{3}{2}$

Bài 100. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2+a^2b}+\frac{1}{2+b^2c}+\frac{1}{2+c^2a}\ge 1$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Vĩnh Phúc năm 2015-2016

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a^2b}{2+a^2b}+\frac{b^2c}{2+b^2c}+\frac{c^2a}{2+c^2a}\le 1$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có $2+a^2b=1+1+a^2b\ge 3\sqrt[3]{a^2b}$.

Do đó ta được $\frac{a^2b}{2+a^2b}\le\frac{a^2b}{3\sqrt[3]{a^2b}}=\frac{a\sqrt[3]{ab^2}}{3}$. Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{a^2b}{2+a^2b}+\frac{b^2c}{2+b^2c}+\frac{c^2a}{2+c^2a}\le\frac{a\sqrt[3]{ab^2}+b\sqrt[3]{bc^2}+c\sqrt[3]{ca}}{3}$$

Cũng theo bất đẳng thức AM - GM ta được $\sqrt[3]{ab^2}\le\frac{a+b+b}{3}=\frac{a+2b}{3}$

Suy ra $a\sqrt[3]{ab^2}\le\frac{a(a+2b)}{3}=\frac{a^2+2ab}{3}$

Hoàn toàn tương tự ta được $a\sqrt[3]{ab^2}+b\sqrt[3]{bc^2}+c\sqrt[3]{ca}\le\frac{(a+b+c)^2}{3}=3$.

Từ đó ta được $\frac{a^2b}{2+a^2b}+\frac{b^2c}{2+b^2c}+\frac{c^2a}{2+c^2a}\le 1$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 101. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=11$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{5a+5b+2c}{\sqrt{12(a^2+11)}+\sqrt{12(b^2+11)}+\sqrt{c^2+11}}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Quảng Bình năm 2015-2016

Lời giải

Dễ thấy $a^2+11=a^2+ab+ca+ca=(a+b)(a+c)$, do đó ta được

$$\sqrt{12(a^2+11)}=2\sqrt{3(a+b)(a+c)}\le 3(a+b)+(a+c)=4a+3b+c$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\sqrt{12(b^2+11)}=2\sqrt{3(a+b)(b+c)}\le 3(a+b)+(b+c)=3a+4b+c$$

$$\sqrt{c^2+11}=\sqrt{(c+a)(b+c)}\le\frac{c+a+b+c}{2}=\frac{a+b+2c}{2}$$

Khi đó ta được $\sqrt{12(a^2+11)}+\sqrt{12(b^2+11)}+\sqrt{c^2+11}\le\frac{15a}{2}+\frac{15b}{2}+3c$

Suy ra $P\ge\dfrac{5a+5b+2c}{\frac{15a}{2}+\frac{15b}{2}+3c}=\dfrac{10a+10b+4c}{15a+15b+6c}=\dfrac{2}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{2}{3}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}2a+3b=3a+2b=c\\ab+bc+ca=11\end{cases}\Leftrightarrow a=b=1;\ c=5$$

Bài 102. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{1+8a^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+8b^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+8c^3}}\ge 1$$

Trích đề thi HSG tỉnh Nam Định năm 2011-2012

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$1+8a^3=(1+2a)(1-2a+4a^2)\le\left(\frac{1+2a+1-2a+4a^2}{2}\right)^2=(1+2a^2)^2$$

Do đó ta được $\frac{1}{\sqrt{1+8a^3}}\ge\frac{1}{1+2a^2}$. Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{1}{\sqrt{1+8b^3}}\ge\frac{1}{1+2b^2};\ \frac{1}{\sqrt{1+8c^3}}\ge\frac{1}{1+2c^2}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{\sqrt{1+8a^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+8b^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+8c^3}}\ge\frac{1}{1+2a^2}+\frac{1}{1+2a^2}+\frac{1}{1+2a^2}$$

Theo bất đẳng thức AM - GM ta lại có

$$\frac{1}{1+2a^2}+\frac{1}{1+2a^2}+\frac{1}{1+2a^2}\ge\frac{9}{3+2(a^2+b^2+c^2)}=1$$

Suy ra $\frac{1}{\sqrt{1+8a^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+8b^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+8c^3}}\ge 1$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra hi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài 103. Cho x, y thỏa mãn $\begin{cases}x,y\in R\\0\le x,y\le\frac{1}{2}\end{cases}$. Chứng minh rằng $\frac{\sqrt{x}}{1+y}+\frac{\sqrt{y}}{1+x}\le\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Trích đề thi HSG tỉnh Thái Bình năm 2011-2012

Lời giải

Từ giả thiết suy ra

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{y}\right)\ge 0\Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y}\le\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\sqrt{xy}$$

$$x\sqrt{x}\le x.\frac{1}{\sqrt{2}};\ y\sqrt{y}\le y.\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow x\sqrt{x}+y\sqrt{y}\le\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$$

Lại có $\begin{cases}\sqrt{xy}\le xy+\dfrac{1}{4}\\ \sqrt{xy}\le\dfrac{x+y}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{xy}\le\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\left(xy+\dfrac{1}{4}\right)\\ \dfrac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{xy}\le\dfrac{\sqrt{2}}{6}(x+y)\end{cases}$.

Từ các bất đẳng thức trên ta được

$$x\sqrt{x}+y\sqrt{y}+\sqrt{x}+\sqrt{y}\le\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(xy+\frac{1}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{6}(x+y)\le\frac{2\sqrt{2}(1+x+y+xy)}{3}$$

Suy ra $\dfrac{\sqrt{x}}{1+y}+\dfrac{\sqrt{y}}{1+x}=\dfrac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}+\sqrt{x}+\sqrt{y}}{1+x+y+xy}\le\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=\dfrac{1}{2}$

Bài 104. Cho a,b,c,d là các số thực thỏa mãn điều kiện

$$abc+bcd+cda+dab=a+b+c+d+\sqrt{2012}$$

Chứng minh rằng $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)\ge 2012$

Trích đề thi HSG tỉnh Vĩnh Phúc năm 2011-2012

Lời giải

Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned}2012&=(abc+bcd+cda+dab-a-b-c-d)^2\\&=\left[(ab-1)(c+d)+(cd-1)(a+b)\right]^2\end{aligned}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\begin{aligned}\left[(ab-1)(c+d)+(cd-1)(a+b)\right]^2&\le\left[(ab-1)^2+(a+b)^2\right]\left[(cd-1)^2+(c+d)^2\right]\\&=(a^2b^2+a^2+b^2+1)(c^2d^2+c^2+d^2+1)=(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)\end{aligned}$$

Suy ra $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)\ge 2012$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 105. Cho các số thực dương a, b, c thoả mãn $abc+a+b=3ab$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{ab}{a+b+1}}+\sqrt{\frac{b}{bc+c+1}}+\sqrt{\frac{a}{ca+c+1}}\ge\sqrt{3}$$

Trích đề thi HSG tỉnh Phú Thọ năm 2011-2012

Lời giải

Từ giả thiết ta suy ra $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+c=3.$ Ta viết lại vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$\sqrt{\frac{ab}{a+b+1}}+\sqrt{\frac{b}{bc+c+1}}+\sqrt{\frac{a}{ca+c+1}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}}}+\frac{1}{\sqrt{c+\frac{c}{b}+\frac{1}{b}}}+\frac{1}{\sqrt{c+\frac{c}{a}+\frac{1}{a}}}$$

Đặt $x=\frac{1}{a}; y=\frac{1}{b}; z=c$ .Khi đó giả thiết trở thành $x+y+z=3$ và bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{1}{\sqrt{x+y+xy}}+\frac{1}{\sqrt{y+z+yz}}+\frac{1}{\sqrt{z+x+zx}}\ge\sqrt{3}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta được

$$\frac{1}{\sqrt{x+y+xy}}+\frac{1}{\sqrt{y+z+yz}}+\frac{1}{\sqrt{z+x+zx}}\ge\frac{9}{\sqrt{x+y+xy}+\sqrt{y+z+yz}+\sqrt{z+x+zx}}$$

Đặt $A=\sqrt{x+y+xy}+\sqrt{y+z+yz}+\sqrt{z+x+zx}$

Theo Cauchy - Schwarz ta lại có

$$A^2\le 3(6+xy+yz+zx)=3\left[6+xy+z(3-z)\right]$$

Áp dụng Bất đẳng thức AM - GM ta được $xy\le\frac{1}{4}(x+y)^2=\frac{(3-z)^2}{4}$

Khi đó ta phải chứng minh

$$A^2\le 3\left[6+\frac{(3-z)^2}{4}+z(3-z)\right]=\frac{-3(z-1)^2}{4}+27\le 27$$

Hay $A\le 3\sqrt{3}$. Do đó ta được

$$\frac{9}{\sqrt{x+y+xy}+\sqrt{y+z+yz}+\sqrt{z+x+zx}}\ge\frac{9}{3\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

Suy ra $\frac{1}{\sqrt{x+y+xy}}+\frac{1}{\sqrt{y+z+yz}}+\frac{1}{\sqrt{z+x+zx}}\ge\sqrt{3}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi bà chỉ khi $a=b=c=1$

Bài 106. Cho ba số dương a, b, c tùy ý. Chứng minh rằng

$$\frac{a^4}{b^3(c+2a)}+\frac{b^4}{c^3(a+2b)}+\frac{c^4}{a^3(b+2c)}\ge 1$$

Trích đề thi HSG Thành phố Hải Phòng năm 2011-2012

Lời giải

Cách 1. Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được

$$\frac{a^4}{b^3(c+2a)}+\frac{2a+c}{9a}+\frac{1}{3}\ge\frac{a}{b}$$

$$\frac{b^4}{c^3(a+2b)}+\frac{2b+a}{9b}+\frac{1}{3}\ge\frac{b}{c}$$

$$\frac{c^4}{a^3(b+2c)}+\frac{2c+b}{9c}+\frac{1}{3}\ge\frac{c}{a}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^4}{b^3(c+2a)}+\frac{b^4}{c^3(a+2b)}+\frac{c^4}{a^3(b+2c)}+\frac{c}{9a}+\frac{a}{9b}+\frac{b}{9c}+\frac{5}{3}\ge\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$$

Hay $\frac{a^4}{b^3(c+2a)}+\frac{b^4}{c^3(a+2b)}+\frac{c^4}{a^3(b+2c)}\ge\frac{8}{9}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)-\frac{5}{3}$

Để ý ta lại có $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge 3$. Do đó ta được

$$\frac{a^4}{b^3(c+2a)}+\frac{b^4}{c^3(a+2b)}+\frac{c^4}{a^3(b+2c)}\ge\frac{8}{3}-\frac{5}{3}=1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta được

$$\left[\frac{a^4}{b^3(c+2a)}+\frac{b^4}{c^3(a+2b)}+\frac{c^4}{a^3(b+2c)}\right]\left[b(c+2a)+c(a+2b)+a(b+2c)\right]\ge\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)^2$$

Hay

$$\left[\frac{a^4}{b^3(c+2a)}+\frac{b^4}{c^3(a+2b)}+\frac{c^4}{a^3(b+2c)}\right]\left[3(ab+bc+ca)\right]\ge\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)^2$$

Mặt khác cúng theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta được

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c\ge\sqrt{3(ab+bc+ca)}$$

Do đó ta được

$$\left[\frac{a^4}{b^3(c+2a)}+\frac{b^4}{c^3(a+2b)}+\frac{c^4}{a^3(b+2c)}\right]\left[3(ab+bc+ca)\right]\ge\left[\sqrt{3(ab+bc+ca)}\right]^2$$

Hay $\frac{a^4}{b^3(c+2a)}+\frac{b^4}{c^3(a+2b)}+\frac{c^4}{a^3(b+2c)}\ge 1$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Bài 107. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy+yz+zx=671$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{x^2-yz+2013}+\frac{y}{y^2-zx+2013}+\frac{z}{z^2-xy+2013}\ge\frac{1}{x+y+z}$$

Trích đề thi HSG Thành Phố Hà Nội năm 2011-2012

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng phân thức ta được

$$\frac{x}{x^2-yz+2013}+\frac{y}{y^2-zx+2013}+\frac{z}{z^2-xy+2013}\ge\frac{(x+y+z)^2}{x^3+y^3+x^3-3xyz+2013(x+y+z)}$$

Biến đổi mẫu số bên vế phải ta được

$$\begin{aligned}&x^3+y^3+x^3-3xyz+2013(x+y+z)\\&=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3(xy+yz+zx)(x+y+z)\\&=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)=(x+y+z)^3\end{aligned}$$

Suy ra ta có

$$\frac{x}{x^2-yz+2013}+\frac{y}{y^2-zx+2013}+\frac{z}{z^2-xy+2013}\ge\frac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)^3}=\frac{1}{x+y+z}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{\sqrt{2013}}{3}$.

Bài 108.

a) Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $xy+yz+zx+x+y+z=6$. Chứng minh rằng $x^2+y^2+z^2\ge 3$

b) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}$$

Trích đề thi HSG Tỉnh Nghệ An năm 2011-2012

Lời giải

a) Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$x^2+y^2\ge 2xy;\ y^2+z^2\ge 2yz;\ z^2+x^2\ge 2zx$$
$$x^2+1\ge 2x;\ y^2+1\ge 2y;\ z^2+1\ge 2z$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$3\left(x^2+y^2+z^2\right)+3\ge 2\left(xy+yz+zx+x+y+z\right)=12$$

Hay $x^2+y^2+z^2\ge 3$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

b) Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}=\frac{a^3+ab^2-ab^2}{a^2+b^2}=a-\frac{ab^2}{a^2+b^2}\ge a-\frac{ab^2}{2ab}=a-\frac{b}{2}$$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{b^3}{b^2+c^2}\ge b-\frac{c}{2};\ \frac{c^3}{c^2+a^2}\ge c-\frac{a}{2}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$P=\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}\ge\frac{a+b+c}{2}=\frac{3}{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 109. Chứng minh bất đẳng thức $\frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+...+\frac{1}{2012\sqrt{2011}}<2$

Trích đề thi HSG Tỉnh Quảng Bình năm 2011-2012

Lời giải

Xét biểu thức $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$ với $n\in\mathbb{N}^*$.

Dễ thấy $2(n+1)-2\sqrt{n(n+1)}>1$. Thật vậy, ta có

$$\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^2>0\Leftrightarrow n+1-2\sqrt{n(n+1)}+n>0\Leftrightarrow 2(n+1)-2\sqrt{n(n+1)}>1$$

Khi đó ta có $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<\frac{2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n}.\sqrt{n+1}}=2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

Khi đó ta được

$$\frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+...+\frac{1}{2012\sqrt{2011}}$$
$$<2\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{2011}}-\frac{1}{\sqrt{2012}}\right)=2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2012}}\right)<2$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 110. Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $x+y+z=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=\frac{x^4}{\left(x^2+y^2\right)(x+y)}+\frac{y^4}{\left(y^2+z^2\right)(y+z)}+\frac{z^4}{\left(z^2+x^2\right)(z+x)}$.

Trích đề thi HSG tỉnh Hà Tĩnh năm 2012-2013

Lời giải

Ta có $\frac{x^4}{(x^2+y^2)(x+y)}-\frac{y^4}{(x^2+y^2)(x+y)}=x-y$, hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{y^4}{(y^2+z^2)(y+z)}-\frac{z^4}{(y^2+z^2)(y+z)}=y-z$$
$$\frac{z^4}{(z^2+x^2)(z+x)}-\frac{x^4}{(z^2+x^2)(z+x)}=z-x$$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{a^2+b^2}{2}\ge(a+b)^2$ ta được

$$\begin{aligned}F&=\frac{x^4}{(x^2+y^2)(x+y)}+\frac{y^4}{(y^2+z^2)(y+z)}+\frac{z^4}{(z^2+x^2)(z+x)}\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)(x+y)}+\frac{y^4+z^4}{(y^2+z^2)(y+z)}+\frac{z^4+x^4}{(z^2+x^2)(z+x)}\right)\\
&\ge\frac{1}{4}\left(\frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)(x+y)}+\frac{(y^2+z^2)^2}{(y^2+z^2)(y+z)}+\frac{(z^2+x^2)^2}{(z^2+x^2)(z+x)}\right)\\
&=\frac{1}{4}\left(\frac{(x^2+y^2)}{x+y}+\frac{(y^2+z^2)}{y+z}+\frac{(z^2+x^2)}{z+x}\right)\\
&\ge\frac{1}{8}\left(\frac{(x+y)^2}{x+y}+\frac{(y+z)^2}{y+z}+\frac{(z+x)^2}{z+)}\right)=\frac{1}{4}(x+y+z)=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Do đó F đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{4}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$

Bài 111. Cho $A_n=\frac{1}{(2n+1)\sqrt{2n-1}}$ với $n\in\mathbb{N}^*$.Chứng minh rằng $A_1+A_2+A_3+...+A_n<1$

Trích đề thi HSG tỉnh Hải Dương năm 2012-2013

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned}A_n&=\frac{1}{(2n+1)\sqrt{2n-1}}=\frac{\sqrt{2n-1}}{(2n+1)(2n-1)}=\frac{\sqrt{2n-1}}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\\
&=\frac{\sqrt{2n-1}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}+\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)\end{aligned}$$

Vì $\frac{1}{\sqrt{2n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}>0$ và $\frac{1}{\sqrt{2n-1}}+\frac{1}{\sqrt{2n+1}}<\frac{2}{\sqrt{2n-1}}$.

Nên $A_n<\frac{1}{\sqrt{2n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}(\forall n\in\mathbb{N}^*)$. Do đó ta được

$$A_1+A_2+A_3+...+A_n<1-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

Hay $A_1+A_2+A_3+...+A_n<1-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}<1$

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 112. Cho các số thực dương a, b, c thoả mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{(ab+a+1)^2}+\frac{b}{(bc+b+1)^2}+\frac{c}{(ca+c+1)^2}\ge\frac{1}{a+b+c}$$

Trích đề thi HSG tỉnh Ninh Bình năm 2012-2013

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}+\sqrt{c^2}\right)\left[\left(\frac{\sqrt{a}}{ab+a+1}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{b}}{bc+b+1}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{c}}{ca+c+1}\right)^2\right]\\&\ge\left(\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}\right)^2\\&=\left(\frac{1}{b+1+bc}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{bc}{1+bc+b}\right)^2=1\end{aligned}$$

Do đó ta được $\frac{a}{(ab+a+1)^2}+\frac{b}{(bc+b+1)^2}+\frac{c}{(ca+c+1)^2}\ge\frac{1}{a+b+c}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 113. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{a+3b+2c}+\frac{bc}{b+3c+2a}+\frac{ca}{c+3a+2b}\le\frac{a+b+c}{6}$$

Trích đề thi HSG tỉnh Phú Thọ năm 2012-2013

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM dạng $\frac{9}{x+y+z}\le\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ ta được

$$\frac{1}{a+3b+2c}=\frac{1}{a+c+b+c+2b}\le\frac{1}{9}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{2b}\right)$$

Do đó ta được

$$\frac{ab}{a+3b+2c}\le\frac{ab}{9}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{2b}\right)=\frac{1}{9}\left(\frac{ab}{a+c}+\frac{ab}{b+c}+\frac{a}{2}\right)$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{bc}{2a+b+3c}\le\frac{1}{9}\left(\frac{bc}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{b}{2}\right);\ \frac{ac}{3a+2b+c}\le\frac{1}{9}\left(\frac{ac}{a+b}+\frac{ac}{b+c}+\frac{c}{2}\right)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned}&\frac{ab}{a+3b+2c}+\frac{bc}{b+3c+2a}+\frac{ca}{c+3a+2b}\\&\le\frac{1}{9}\left(\frac{ac+bc}{a+b}+\frac{ab+ac}{b+c}+\frac{bc+ab}{a+c}+\frac{a+b+c}{2}\right)=\frac{a+b+c}{6}\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 114. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^3+b^3+c^3-3abc=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2+b^2+c^2$

Trích đề thi HSG tỉnh Nghệ An năm 2012-2013

Lời giải

Từ giả thiết ta được $(a+b+a)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)=1$ hay

$$a^2+b^2+c^2=\frac{1}{a+b+c}+ab+bc+ca$$
$$\Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2+c^2\right)=\frac{2}{a+b+c}+2(ab+bc+ca)$$
$$\Leftrightarrow 3\left(a^2+b^2+c^2\right)=\frac{2}{a+b+c}+(a+b+c)^2$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được

$$\frac{2}{a+b+c}+(a+b+c)^2=\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{a+b+c}+(a+b+c)^2\ge 3$$

Do đó ta được $3\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 3\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\ge 1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 1. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}a^3+b^3+c^3-3abc=1\\(a+b+c)^3=1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b=0;\ c=1\\a=c=0;\ b=1\\a=1;\ b=c=0\end{array}\right.$$

Bài 115. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc=\frac{1}{6}$. Chứng minh rằng

$$3+\frac{a}{2b}+\frac{2b}{3c}+\frac{3c}{a}\ge a+2b+3c+\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{3c}$$

Trích đề thi HSG tỉnh Vĩnh Phúc năm 2012-2013

Lời giải

Đặt $a=x;2b=y;3c=z$, khi đó ta được $xyz=1$ và bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành $3+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\ge x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$.

Đặt $x=\frac{n}{m};y=\frac{p}{n};z=\frac{m}{p}$. Khi đó bất đẳng thức trở thành

$$m^3+n^3+p^3+3mnp\ge m^2n+mn^2+n^2p+np^2+m^2p+mp^2$$

Biến đổi tương đương ta được $mnp\ge(m+n-p)(n+p-m)(p+m-n)$

Bất đẳng thức trên luôn đúng. Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 116. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=6$. Chứng minh rằng

$$\frac{b+c+5}{a+1}+\frac{c+a+4}{b+2}+\frac{a+b+3}{c+3}\ge 6$$

Trích đề thi HSG tỉnh Quảng Bình năm 2012-2013

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{b+c+5}{a+1}+1+\frac{c+a+4}{b+2}+1+\frac{a+b+3}{c+3}+1\ge 9$$

Hay $(a+b+c+6)\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+3}\right)\ge 9$. Theo bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+3}\ge\frac{9}{a+b+c+6}$$

Do đó ta được

$$\left(a+b+c+6\right)\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+3}\right)\ge\left(a+b+c+6\right)\frac{9}{a+b+c+6}=9$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=3;\ b=2;\ c=1$

Bài 117. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{b}=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{27a^2}{c\left(c^2+9a^2\right)}+\frac{b^2}{a\left(4a^2+b^2\right)}+\frac{8c^2}{b\left(9b^2+4c^2\right)}\ge\frac{3}{2}$$

Trích đề thi HSG Thành Phố Hà Nội năm 2012-2013

Lời giải

Cách 1. Đặt $a=\frac{1}{x};\ b=\frac{2}{y};\ c=\frac{3}{z}$, khi đó giả thiết được viết lại là $x+y+z=3$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $\frac{x^3}{x^2+y^2}+\frac{y^3}{y^2+z^2}+\frac{z^3}{z^2+x^2}\ge\frac{3}{2}$

Sửdụng kỹ thuât AM - GM ngược dấu ta chứng minh được

$$\frac{x^3}{x^2+y^2}+\frac{y^3}{y^2+z^2}+\frac{z^3}{z^2+x^2}\ge\frac{x+y+z}{2}=\frac{3}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=3;\ b=2;\ c=1$.

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được

$$\frac{27a^2}{c\left(c^2+9a^2\right)}=\frac{27a^2+3c^2-3c^2}{c\left(c^2+9a^2\right)}=\frac{3}{c}-\frac{3c}{c^2+9a^2}\ge\frac{3}{c}-\frac{3c}{2\sqrt{c^2.9a^2}}=\frac{3}{c}-\frac{1}{2a}$$

$$\frac{b^2}{a\left(4a^2+b^2\right)}=\frac{b^2+4a^2-4a^2}{a\left(4a^2+b^2\right)}=\frac{1}{a}-\frac{4a}{4a^2+b^2}\ge\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$$

$$\frac{8c^2}{b\left(9b^2+4c^2\right)}=\frac{8c^2+18b^2-18b^2}{b\left(9b^2+4c^2\right)}=\frac{2}{b}-\frac{18b}{9b^2+4c^2}\ge\frac{2}{b}-\frac{3}{2c}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{27a^2}{c\left(c^2+9a^2\right)}+\frac{b^2}{a\left(4a^2+b^2\right)}+\frac{8c^2}{b\left(9b^2+4c^2\right)}\ge\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\right)=\frac{3}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=3;\ b=2;\ c=1$.

Bài 118. Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $x+y+z=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{2x^2+y^2+z^2}{4-yz}+\frac{2y^2+z^2+x^2}{4-zx}+\frac{2z^2+x^2+y^2}{4-xy}\ge 4xyz$$

Trích đề thi HSG Tỉnh Phú Thọ năm 2013-2014

Lời giải

Cách 1. Theo bất đẳng thức AM - GM ta có $2x^2+y^2+z^2\ge 2x\left(y+z\right)$.

Tương tự ta có $2y^2+z^2+x^2\ge 2y\left(z+x\right);\ 2z^2+x^2+y^2\ge 2z\left(x+y\right)$.

Do đó ta sẽ chứng minh $\frac{x\left(y+z\right)}{4-yz}+\frac{y\left(z+x\right)}{4-zx}+\frac{z\left(x+y\right)}{4-xy}\ge 2xyz$.

Bất đẳng thức này tương đương với

$$\frac{y+z}{(4-yz)2yz}+\frac{z+x}{(4-zx)2zx}+\frac{x+y}{(4-xy)xy}\ge 1$$

Ta có $\frac{y+z}{(4-yz)2yz}\ge\frac{2\sqrt{yz}}{\left(2-\sqrt{yz}\right)\left(2+\sqrt{yz}\right)2yz}=\frac{1}{\left(2-\sqrt{yz}\right)\sqrt{yz}\left(2+\sqrt{yz}\right)}$

Dễ thấy $0<\left(2-\sqrt{yz}\right)\sqrt{yz}=-\left(\sqrt{xy}-1\right)^2+1\le 1$ nên

$$\frac{1}{\left(2-\sqrt{yz}\right)\sqrt{yz}\left(2+\sqrt{yz}\right)}\ge\frac{1}{2+\sqrt{yz}}$$

Do đó ta được $\frac{y+z}{(4-yz)2yz}\ge\frac{1}{2+\sqrt{yz}}$

Hoàn toàn tương tự có $\frac{z+x}{(4-zx)2zx}\ge\frac{1}{2+\sqrt{zx}}$; $\frac{x+y}{(4-xy)2xy}\ge\frac{1}{2+\sqrt{xy}}$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{y+z}{(4-yz)2yz}+\frac{z+x}{(4-zx)2zx}+\frac{x+y}{(4-xy)xy}\ge\frac{1}{2+\sqrt{xy}}+\frac{1}{2+\sqrt{yz}}+\frac{1}{2+\sqrt{zx}}$$

Theo một đánh giá quen thuộc thì

$$\frac{1}{2+\sqrt{xy}}+\frac{1}{2+\sqrt{yz}}+\frac{1}{2+\sqrt{zx}}\ge\frac{9}{6+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}}\ge\frac{9}{6+x+y+z}=1$$

Do đó ta suy ra $\frac{y+z}{(4-yz)2yz}+\frac{z+x}{(4-zx)2zx}+\frac{x+y}{(4-xy)xy}\ge 1$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy rakhi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Cách 2. Gọi vế trái của bất đẳng thức là P. Khi đó biến đổi P như sau

$$P=\left(\frac{x^2}{4-yz}+\frac{y^2}{4-xz}+\frac{z^2}{4-yx}\right)+\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(\frac{1}{4-yz}+\frac{1}{4-xz}+\frac{1}{4-yx}\right)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng phân thức ta có

$$\frac{x^2}{4-yz}+\frac{y^2}{4-xz}+\frac{z^2}{4-yx}\ge\frac{(x+y+z)^2}{12-(xy+yz+zx)}$$

$$\frac{1}{4-yz}+\frac{1}{4-xz}+\frac{1}{4-yx}\ge\frac{9}{12-(xy+yz+zx)}$$

Do đó ta được

$$\begin{aligned}P&\ge\frac{(x+y+z)^2}{12-(xy+yz+xz)}+\frac{9\left(x^2+y^2+z^2\right)}{12-(xy+yz+xz)}\\&\ge\frac{3(xy+yz+xz)}{12-(xy+yz+xz)}+\frac{9(xy+yz+xz)}{12-(xy+yz+xz)}\\&\ge\frac{12(xy+yz+xz)}{12-(xy+yz+xz)}\ge\frac{36\sqrt[3]{x^2y^2z^2}}{12-3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}}\end{aligned}$$

Đặt $\sqrt[3]{xyz}=t\le\frac{x+y+z}{3}=1$.Khi đó ta có

$$\frac{36t^2}{12-3t^2}-4t^3\Leftrightarrow 12t^2(t-1)\left(t^2+t-3\right)\ge 0$$

Đánh giá cuối cùng luôn đúng. Bất đẳng thức được chứng minh xong.

Cách 3 Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$P=\frac{x^2+y^2+x^2+z^2}{xyz(4-yz)}+\frac{x^2+y^2+y^2+z^2}{xyz(4-xz)}+\frac{z^2+y^2+x^2+z^2}{xyz(4-yx)}\geq 4$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\begin{aligned}M&\geq\frac{2xy+2xz}{xyz(4-yz)}+\frac{2xy+2yz}{xyz(4-xz)}+\frac{2xz+2yz}{xyz(4-yx)}\\&=2\left(\frac{y+z}{yz(4-yz)}+\frac{x+z}{xz(4-xz)}+\frac{x+z}{yx(4-yx)}\right)\\&=2\left(\frac{1}{z(4-yz)}+\frac{1}{x(4-yz)}+\frac{1}{y(4-yx)}\right)+2\left(\frac{1}{y(4-yz)}+\frac{1}{zx(4-yz)}+\frac{1}{x(4-yx)}\right)\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\frac{1}{z(4-yz)}+\frac{1}{x(4-yz)}+\frac{1}{y(4-yx)}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{xyz(4-yz)(4-xz)(4-xy)}}$$

$$\frac{1}{y(4-yz)}+\frac{1}{zx(4-yz)}+\frac{1}{x(4-yx)}\geq\frac{6}{\sqrt[3]{xyz(4-yz)(4-xz)(4-xy)}}$$

Do đó ta được $P\geq\frac{12\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3xyz(4-yz)(4-xz)(4-xy)}}$

Mặt khác ta lại có

$$3xyz(4-xz)(4-yz)(4-xy)\leq\left(\frac{3xyz+12-xz-xy-yz}{4}\right)^4$$

Mà $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{9}{x+y+z}=3\Leftrightarrow\frac{xy+yz+xz}{xyz}\geq 3\Leftrightarrow 3xyz-xy-xz-yz\leq 0$

Suy ra

$$3xyz(4-xz)(4-yz)(4-xy)\leq 81\Leftrightarrow\sqrt[3]{3xyz(4-xz)(4-yz)(4-xy)}\leq 3\sqrt[3]{3}$$

Do đó ta được $P\geq\frac{12\sqrt[3]{3}}{3\sqrt[3]{3}}=4$. Như vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 4 Đặt vế trái của bất đẳng thức là P.

Với $x, y, z>0$ ta có $yz\leq\frac{(y+z)^2}{4}<\frac{(x+y+z)^2}{4}=\frac{9}{4}\Rightarrow 4-yz>0$

Tương tự ta cũng có $4-zx>0; 4-xy>0$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có

$$4\left(x^2+x^2+y^2+z^2\right)\geq(x+x+y+z)^2=(2x+y+z)^2$$

Từ đó suy ra $\frac{2x^2+y^2+z^2}{4-yz}\geq\frac{(2x+y+z)^2}{4(4-yz)}$. Hoàn toàn tương tự ta có

$$\frac{2y^2+z^2+x^2}{4-zx}\geq\frac{(2y+z+x)^2}{4(4-zx)};\ \frac{2z^2+x^2+y^2}{4-xy}\geq\frac{(2z+x+y)^2}{4(4-xy)}$$

Do đó ta được $P\geq\frac{(2x+y+z)^2}{4(4-yz)}+\frac{(2y+z+x)^2}{4(4-zx)}+\frac{(2z+x+y)^2}{4(4-xy)}=Q$

Mặt khác theo bất đẳng thức AM - GM

$$\frac{(2x+y+z)^2}{4(4-yz)}+\frac{4}{9}(4-yz)\ge 2\sqrt{\frac{(2x+y+z)^2}{4(4-yz)}.\frac{4}{9}(4-yz)}=\frac{2}{3}(2x+y+z)$$

$$\frac{(2y+z+x)^2}{4(4-zx)}+\frac{4}{9}(4-zx)\ge 2\sqrt{\frac{(2y+z+x)^2}{4(4-zx)}.\frac{4}{9}(4-zx)}=\frac{2}{3}(2y+z+x)$$

$$\frac{(2z+x+y)^2}{4(4-xy)}+\frac{4}{9}(4-xy)\ge 2\sqrt{\frac{(2z+x+y)^2}{4(4-xy)}.\frac{4}{9}(4-xy)}=\frac{2}{3}(2z+x+y)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$Q+\frac{4}{9}(12-xy-yz-zx)\ge\frac{8}{3}(x+y+z)=8\Rightarrow Q\ge\frac{8}{3}+\frac{4}{9}(xy+yz+zx)$$

Bất đẳng thức trên sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra đươc

$$\frac{8}{3}+\frac{4}{9}(xy+yz+zx)\ge 4xyz$$

Thậy vậy, ta viết lại bất đẳng thức trên thành

$$\frac{8}{81}.(x+y+z)^3+\frac{4}{27}(x+y+z)(xy+yz+zx)\ge 4xyz$$

Sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz};\ xy+yz+zx\ge 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$$

Suy ra $\frac{8}{81}.(x+y+z)^3+\frac{4}{27}(x+y+z)(xy+yz+zx)\ge 4xyz$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Cách 5 Vế trái của bất đẳng thức được viết lại thành

$$P=(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{1}{4-xy}+\frac{1}{4-yz}+\frac{1}{4-zx}\right)+\left(\frac{x^2}{4-yz}+\frac{y^2}{4-zx}+\frac{z^2}{4-xy}\right)$$

Áp dụng bất đẳng AM - GM ta có

$$(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{1}{4-xy}+\frac{1}{4-yz}+\frac{1}{4-zx}\right)\ge\frac{9(x^2+y^2+z^2)}{12-(xy+yz+zx)}=\frac{18(x^2+y^2+z^2)}{15+x^2+y^2+z^2}$$

Theo bất đẳng thức AM - GM ta lại có

$$\frac{x^2}{4-yz}+\frac{x(4-yz)}{9}+\frac{1}{3}\ge 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{4-yz}.\frac{x(4-yz)}{9}.\frac{1}{3}}=x$$

$$\Rightarrow\frac{x^2}{4-yz}\ge x-\frac{x(4-yz)}{9}-\frac{1}{3}=\frac{5x}{9}+\frac{xyz}{9}-\frac{1}{3}$$

Tương tự ta có $\frac{y^2}{4-zx}\ge\frac{5y}{9}+\frac{xyz}{9}-\frac{1}{3};\frac{z^2}{4-xy}\ge\frac{5z}{9}+\frac{xyz}{9}-\frac{1}{3}$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{x^2}{4-yz}+\frac{y^2}{4-zx}+\frac{z^2}{4-xy}\ge\frac{5}{9}(x+y+z)+\frac{xyz}{3}-1=\frac{2}{3}+\frac{xyz}{3}$$

Do đó ta được $A\ge\frac{18(x^2+y^2+z^2)}{15+x^2+y^2+z^2}+\frac{2}{3}+\frac{xyz}{3}$

Từ giả thiết ta được $x^2+y^2+z^2\ge 3$. Do đó ta có $\frac{18(x^2+y^2+z^2)}{15+x^2+y^2+z^2}\ge 3$

Cũng từ giả thiết ta được $xyz \ge 1$.

Từ đó suy ra $P \ge 3+\frac{2}{3}+\frac{xyz}{3}=\frac{11}{3}+\frac{xyz}{3} \ge \frac{11xyz}{3}+\frac{xyz}{3}=4xyz$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong

Bài 119. Cho x, y là các số thực dương thoả mãn $x+y=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$B=\frac{1}{x^3+y^3}+\frac{1}{xy}$$

Trích đề thi HSG Tỉnh Thanh Hóa năm 2013-2014

Lời giải

Ta có $B=\frac{1}{(x+y)^3-3xy(x+y)}+\frac{1}{xy}=\frac{1}{1-3xy}+\frac{1}{xy}=\frac{1-2xy}{xy(1-3xy)}$

Theo bất đẳng thức AM - GM ta có $xy \le \frac{(x+y)^2}{4}=\frac{1}{4}$.

Gọi B_0 là một giá trị của B, khi đó luôn tồn tại x, y để

$$B_0=\frac{1-2xy}{xy(1-3xy)} \Leftrightarrow 3B_0(xy)^2-(2+B_0)xy+1=0$$

Để tồn tại x, y thì phương trình trên phải có nghiệm xy, tức là

$$\Delta=B_0^2-\ 8B_0+\ 4 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B_0 \ge 4+2\sqrt{3} \\ B_0 \le 4-2\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Để ý rằng với giả thiết bài toán thì B > 0. Do đó ta có $B_0 \ge 4+2\sqrt{3}$.

Với $B_0=4+2\sqrt{3} \Rightarrow xy=\frac{2+B_0}{6B_0}=\frac{3+\sqrt{3}}{6\left(2+\sqrt{3}\right)} \Rightarrow x(1-x)=\frac{3+\sqrt{3}}{6\left(2+\sqrt{3}\right)}$

$$\Leftrightarrow x^2-x+\frac{3+\sqrt{3}}{6\left(2+\sqrt{3}\right)}=0 \Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2},\ x=\frac{1-\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của B là $4+2\sqrt{3}$, đạt được khi

$$x=\frac{1+\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2};\ y=\frac{1-\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2} \text{ hoặc } x=\frac{1-\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2};\ y=\frac{1+\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2}.$$

Bài 120. Cho a, b, clà các số thực dương thỏa mãn $2ab+6bc+2ca=7abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C=\frac{4ab}{a+2b}+\frac{9ca}{a+4c}+\frac{4bc}{b+c}$

Trích đề thi HSG tỉnh Hải Dương năm 2013-2014

Lời giải

Từ $2ab+6bc+2ca=7abc$ ta được$\frac{2}{c}+\frac{6}{a}+\frac{2}{b}=7$. Đặt $x=\frac{1}{a};\ y=\frac{1}{b};\ z=\frac{1}{c} \Rightarrow \begin{cases} x,y,z>0 \\ 2z+6x+2y=7 \end{cases}$

Khi đó ta được $C=\frac{4ab}{a+2b}+\frac{9ca}{a+4c}+\frac{4bc}{b+c}=\frac{4}{2x+y}+\frac{9}{4x+z}+\frac{4}{y+z}$. Hay

$$C=\frac{4}{2x+y}+2x+y+\frac{9}{4x+z}+4x+z+\frac{4}{y+z}+y+z-\left(2x+y+4x+z+y+z\right)$$
$$=\left(\frac{2}{\sqrt{x+2y}}-\sqrt{x+2y}\right)^2+\left(\frac{3}{\sqrt{4x+z}}-\sqrt{4x+z}\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{y+z}}-\sqrt{y+z}\right)^2+17\ge 17$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của C là 17. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=\frac{1}{2};\ y=z=1$

Bài 121. Cho a, b, clà độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{4a}{b+c-a}+\frac{9b}{c+a-b}+\frac{16c}{a+b-c}\ge 26$$

Trích đề thi HSG tỉnh Quảng Trị năm 2013-2014

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{8a}{b+c-a}+4+\frac{18b}{c+a-b}+9+\frac{32c}{a+b-c}+16\ge 81$$

Hay $\left(a+b+c\right)\left(\frac{4}{b+c-a}+\frac{9}{c+a-b}+\frac{16}{a+b-c}\right)\ge 81$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng phân thức ta được

$$\frac{4}{b+c-a}+\frac{9}{c+a-b}+\frac{16}{a+b-c}\ge\frac{\left(2+3+4\right)^2}{a+b+c}=\frac{81}{a+b+c}$$

Do đó ta được

$$\left(a+b+c\right)\left(\frac{4}{b+c-a}+\frac{9}{c+a-b}+\frac{16}{a+b-c}\right)\ge\frac{81\left(a+b+c\right)}{a+b+c}=81$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 122. Cho a, b, c thỏa mãn $0\le a;b;c\le 4$ và $a+b+c=6$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$$

Trích đề thi HSG Thành phố Hà Nội năm 2013-2014

Lời giải

Vì $0\le a;b;c\le 4$ do đó ta được $\left(a-4\right)\left(b-4\right)\left(c-4\right)\le 0$, biến đổi tương đương ta thu được

$$\left(a-4\right)\left(b-4\right)\left(c-4\right)\le 0\Leftrightarrow abc-4\left(ab+bc+ca\right)+16\left(a+b+c\right)-64\le 0$$
$$\Leftrightarrow 4\left(ab+bc+ca\right)\ge abc+16\left(a+b+c\right)-64$$

Do $abc\ge 0$ nên ta được

$$4\left(ab+bc+ca\right)\ge abc+16\left(a+b+c\right)-64\ge 16.6-64=32\Leftrightarrow ab+bc+ca\ge 8$$

Ta có

$$P=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=\left(a+b+c\right)^2-\left(ab+bc+ca\right)\le 6^2-8=28$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 28. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=0;\ b=2;\ c=4$ và các hoán vị.

Bài 123. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=4$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x^2+4yz}+\frac{1}{y^2+4zx}+\frac{1}{z^2+4xy}<\frac{1}{xyz}$$

Trích đề thi HSG tỉnh Thừa Thiên Huế năm 2013-2014

Lời giải

Dễ thấy $\frac{1}{x^2+4yz}<\frac{1}{4yz};\frac{1}{y^2+4zx}<\frac{1}{4zx};\frac{1}{z^2+4xy}<\frac{1}{4xy}$

Do đó ta được $\frac{1}{x^2+4yz}+\frac{1}{y^2+4zx}+\frac{1}{z^2+4xy}<\frac{1}{4yz}+\frac{1}{4zx}+\frac{1}{4xy}$

Kết hợp với giả thiết ta được $\frac{1}{4yz}+\frac{1}{4zx}+\frac{1}{4xy}=\frac{x+y+z}{4xyz}=\frac{1}{xyz}$

Suy ra $\frac{1}{x^2+4yz}+\frac{1}{y^2+4zx}+\frac{1}{z^2+4xy}<\frac{1}{xyz}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 124. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}+\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{a}+\frac{\sqrt{c^2+a^2}}{b}\ge 2\left(\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{b}{\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

Trích đề thi HSG tỉnh Bắc Giang năm 2013-2014

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM dạng $2\left(x^2+y^2\right)\ge\left(x+y\right)^2$ ta được

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}+\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{a}+\frac{\sqrt{c^2+a^2}}{b}=\frac{\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}}{\sqrt{2}c}+\frac{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}}{\sqrt{2}a}+\frac{\sqrt{2\left(c^2+a^2\right)}}{\sqrt{2}b}$$

$$\ge\frac{a+b}{\sqrt{2}c}+\frac{b+c}{\sqrt{2}a}+\frac{c+a}{\sqrt{2}b}$$

Mặt khác cũng áp dụng bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{b}{\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\le\frac{\sqrt{2}a}{b+c}+\frac{\sqrt{2}b}{c+a}+\frac{\sqrt{2}c}{a+b}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{a+b}{\sqrt{2}c}+\frac{b+c}{\sqrt{2}a}+\frac{c+a}{\sqrt{2}b}\ge\frac{2\sqrt{2}a}{b+c}+\frac{2\sqrt{2}b}{c+a}+\frac{2\sqrt{2}c}{a+b}$$

Hay $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\ge\frac{4a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{4c}{a+b}$

Thật vậy, Áp dụng bất đẳng thức AM - GM dạng $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$, ta được

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}=a\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\right)+b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge\frac{4a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{4c}{a+b}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 125. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b^2c}+\frac{b^2}{c^2a}+\frac{c^2}{a^2b}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Trích đề thi HSG tỉnh Vĩnh Phúc năm 2013-2014

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được

$$\frac{a^2}{b^2c}+\frac{b^2}{c^2a}+\frac{1}{a}\ge\frac{3}{c};\frac{b^2}{c^2a}+\frac{c^2}{a^2b}+\frac{3}{b}\ge\frac{1}{a};\frac{a^2}{b^2c}+\frac{c^2}{a^2b}+\frac{1}{c}\ge\frac{3}{b}$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$2\left(\frac{a^2}{b^2c}+\frac{b^2}{c^2a}+\frac{c^2}{a^2b}\right)+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{3}{a}+\frac{3}{b}+\frac{3}{c}$$

Hay $\frac{a^2}{b^2c}+\frac{b^2}{c^2a}+\frac{c^2}{a^2b}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 126. Cho ba số dương a,b,c thoả mãn $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}=1$ .Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Trích đề thi HSG tỉnh Hải Dương năm 2014-2015

Lời giải

Dễ thấy $2\left(a^2+b^2\right)\le(a+b)^2$.Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{a^2}{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}}+\frac{b^2}{\sqrt{2\left(c^2+a^2\right)}}+\frac{c^2}{\sqrt{2\left(c^2+a^2\right)}}$$

Đặt $x=\sqrt{b^2+c^2}$, $y=\sqrt{c^2+a^2}$, $z=\sqrt{a^2+b^2}$. Khi đó ta được suy ra

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{y^2+z^2-x^2}{2\sqrt{2}x}+\frac{z^2+x^2-y^2}{2\sqrt{2}y}+\frac{x^2+y^2-z^2}{2\sqrt{2}z}$$

Áp dụng tiếp bất đẳng thức trên thì ta được

$$\begin{aligned}
&\frac{y^2+z^2-x^2}{2\sqrt{2}x}+\frac{z^2+x^2-y^2}{2\sqrt{2}y}+\frac{x^2+y^2-z^2}{2\sqrt{2}z}\\
&\ge\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\frac{(y+z)^2}{2x}-x+\frac{(z+x)^2}{2y}-y+\frac{(x+y)^2}{2z}-z\right]\\
&\ge\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\frac{(y+z)^2}{2x}+2x-3x\right)+\left(\frac{(z+x)^2}{2y}+2y-3y\right)+\left(\frac{(x+y)^2}{2z}+2z-3z\right)\right]\\
&\ge\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[2y+z-3x+2(z+x)-3y+2(x+y)-3z\right]=\frac{1}{2\sqrt{2}}(x+y+z)=\frac{1}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Do đó ta được $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3\sqrt{2}}$

Bài 127. Với a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^5}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^5}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^5}{c^2+ca+a^2}\ge\frac{a^3+b^3+c^3}{3}$$

Trích đề thi HSG tỉnh Thái Bình năm 2013-2014

Lời giải

Cách 1. Ta có

$$\begin{aligned}
\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}\ge\frac{2a-b}{3}&\Leftrightarrow 3a^3\ge(2a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)\Leftrightarrow a^3+b^3\ge ab(a+b)\\
&\Leftrightarrow a^2-ab+b^2\ge ab\Leftrightarrow(a-b)^2\ge 0
\end{aligned}$$

Đánh giá cuối cùng luôn đúng.

Do đó $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} \ge \frac{2a-b}{3} \Leftrightarrow \frac{a^5}{a^2+ab+b^2} \ge \frac{2a^3-a^2b}{3}$.

Chứng minh tương tự ta được

$$\frac{a^5}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^5}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^5}{c^2+ca+a^2} \ge \frac{a^3+b^3+c^3}{3}+\frac{a^3+b^3+c^3-a^2b-b^2c-c^2a}{3}$$

Mặt khác vì vai trò a, b, c như nhau nên giả sử $a \ge b \ge c > 0$

$$a^3+b^3+c^3-a^2b-b^2c-c^2a = a^2(a-b)+b^2(b-c)+c^2(c-a)$$
$$=(a-b)^2(a+b)+(a-c)(b-c)(b+c) \ge 0$$

Từ đó suy ra $\frac{a^5}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^5}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^5}{c^2+ca+a^2} \ge \frac{a^3+b^3+c^3}{3}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng phân thức ta có

$$\frac{a^5}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^5}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^5}{c^2+ca+a^2}$$
$$=\frac{a^6}{a^3+a^2b+ab^2}+\frac{b^6}{b^3+b^2c+bc^2}+\frac{c^6}{c^3+c^2a+ca^2}$$
$$\ge \frac{\left(a^3+b^3+c^3\right)^2}{a^3+b^3+c^3+a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2}$$

Mặt khác ta có $(a-b)^2 \ge 0 \Leftrightarrow a^2-ab+b^2 \ge ab \Leftrightarrow a^3+b^3 \ge ab(a+b)$

Chứng minh tương tự $b^3+c^3 \ge bc(b+c)$; $c^3+a^3 \ge ca(c+a)$

Suy ra $3\left(a^3+b^3+c^3\right) \ge a^3+b^3+c^3+ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$

$$\frac{\left(a^3+b^3+c^3\right)^2}{a^3+b^3+c^3+a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2} \ge \frac{a^3+b^3+c^3}{3}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 128. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{a}{9a^3+3b^2+c}+\frac{b}{9b^3+3c^2+a}+\frac{c}{9c^3+3a^2+b}$

Trích đề thi HSG tỉnh Vĩnh Phúc năm 2014-2015

Lời giải

Cách 1. Ta có $P=\frac{3a}{27a^3+9b^2+3c}+\frac{3b}{27b^3+9c^2+3a}+\frac{3c}{27c^3+9a^2+3b}$

Đặt $x=3a;\ y=3b;\ z=3c \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=3 \\ x;\ y;\ z>0 \end{cases}$. Khi đó ta viết lại được

$$P=\frac{x}{x^3+y^2+z}+\frac{y}{y^3+z^2+x}+\frac{z}{z^3+x^2+y}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz và chú ý đến giả thiết ta có

$$\left(x^3+y^2+z\right)\left(\frac{1}{x}+1+z\right) \ge (x+y+z)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^3+y^2+z} \le \frac{\frac{1}{x}+1+z}{(x+y+z)^2} \Rightarrow \frac{x}{x^3+y^2+z} \le \frac{1+x+zx}{(x+y+z)^2}=\frac{1+x+zx}{9}$$

Hoàn toàn tương tự thu được $\frac{y}{y^3+z^2+x}\le\frac{1+y+xy}{9}$; $\frac{y}{z^3+x^2+y}\le\frac{1+z+yz}{9}$

Từ đó suy ra $P\le\frac{3+x+y+z+(xy+yz+zx)}{9}=\frac{6+(xy+yz+zx)}{9}$

Dẽ dàng chứng minh được $xy+yz+zx\le\frac{1}{3}(x+y+z)^2=3$

Do đó $P\le\frac{6+(xy+yz+zx)}{9}\le\frac{6+3}{9}=1$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 1 đạt được tại $a=b=c=\frac{1}{3}$

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$9a^3+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ge 3a; 9b^2+\frac{1}{3}\ge 2b\Rightarrow 9a^3+9b^2+c\ge 3a+2b+c-1=2a+b$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$9b^3+9c^2+a\ge 2b+c; 9c^3+9a^2+b\ge 2c+a$$

Do đó ta suy ra

$$P\le\frac{a}{2a+b}+\frac{b}{2b+c}+\frac{c}{2c+a}=\frac{1}{2+\frac{b}{a}}+\frac{1}{2+\frac{c}{b}}+\frac{1}{2+\frac{a}{c}}$$

Đặt $x=\frac{b}{a}; y=\frac{c}{b}; z=\frac{a}{c}\Rightarrow xyz=1$. Khi đó ta được $P\le\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2+y}+\frac{1}{2+z}$.

Ta chứng minh $\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2+y}+\frac{1}{2+z}\le 1$.

Thật vậy, bất đẳng thức tương đương với

$$(2+z)(2+y)+(2+y)(2+z)+(2+z)(2+x)\le(2+x)(2+y)(2+z)$$
$$\Leftrightarrow xy+yz+zx+4(x+y+z)+12\le xyz+2(xy+yz+zx)+4(x+y+z)+8$$
$$\Leftrightarrow x+y+x\ge 3$$

Bất đảng thức cuối cùng luôn đúng do $x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}=3$

Do đó bất đẳng thức trên được chứng minh.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 1 đạt được tại $a=b=c=\frac{1}{3}$

Bài 129. Cho các số thực dương x, y, z thảo mãn $x^2+y^2+z^2=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{\sqrt[3]{yz}}+\frac{y}{\sqrt[3]{xz}}+\frac{z}{\sqrt[3]{xy}}\ge xy+yz+xz$$

Trích đề thi HSG tỉnh Phú Thọ năm 2014-2015

Lời giải

Ta có $A=\frac{x}{\sqrt[3]{yz}}+\frac{y}{\sqrt[3]{xz}}+\frac{z}{\sqrt[3]{xy}}=\frac{x\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{xyz}}+\frac{y\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{xyz}}+\frac{z\sqrt[3]{z}}{\sqrt[3]{xyz}}$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có $3=x^2+y^2+z^2\ge 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\Leftrightarrow xyz\le 1$.

Suy ra $A\ge x\sqrt[3]{x}+y\sqrt[3]{y}+z\sqrt[3]{z}$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz

$$\left(x\sqrt[3]{x}+y\sqrt[3]{y}+z\sqrt[3]{z}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{z^2}\right)\ge(x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+xz)$$

Lại thấy theo bất đẳng thức AM - GM thì

$$\sqrt[3]{x^2.1.1} \le \frac{x^2+1+1}{3};\ \sqrt[3]{y^2.1.1} \le \frac{y^2+1+1}{3};\ \sqrt[3]{z^2.1.1} \le \frac{z^2+1+1}{3}$$

Nên $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{z^2} \le \frac{x^2+y^2+z^2+6}{3} = 3$.

Do đó ta được $A \ge x\sqrt[3]{x} + y\sqrt[3]{y} + z\sqrt[3]{z} \ge xy + yz + xz$, hay $\frac{x}{\sqrt[3]{yz}} + \frac{y}{\sqrt[3]{xz}} + \frac{z}{\sqrt[3]{xy}} \ge xy + yz + xz$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x^2 = y^2 = z^2 = 1 \\ \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{z} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1$$

Bài 130. Cho ba số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \sqrt{2x^2 + 3xy + 2y^2} + \sqrt{2y^2 + 3yz + 2z^2} + \sqrt{2z^2 + 3zx + 2x^2}$$

Trích đề thi HSG tỉnh Ninh Bình năm 2014-2015

Lời giải

Ta viết lại biểu thức A thành

$$A = \sqrt{2(x+y)^2 - xy} + \sqrt{2(y+z)^2 - yz} + \sqrt{2(z+x)^2 - zx}$$

Theo một đánh giá quen thuộc ta có

$$2(x+y)^2 - xy \ge 2(x+y)^2 - \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{7(x+y)^2}{4}$$

Do đó ta được $\sqrt{2(x+y)^2 - xy} \ge \frac{\sqrt{7}(x+y)}{2}$

Hoàn toàn tương tự ta thu được

$$A = \sqrt{2x^2 + 3xy + 2y^2} + \sqrt{2y^2 + 3yz + 2z^2} + \sqrt{2z^2 + 3zx + 2x^2} \ge \sqrt{7}(x+y+z) = 3\sqrt{7}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $3\sqrt{7}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$

Bài 131. Cho các số dương a, b, c có tổng bằng 3. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+6a+9}{a^2-2a+3} + \frac{b^2+6b+9}{b^2-2b+3} + \frac{c^2+6c+9}{c^2-2c+3} \le 24$$

Trích đề thi HSG tỉnh Gia Lai năm 2014-2015

Lời giải

Ta có

$$\frac{a^2+6a+9}{a^2-2a+3} = \frac{(a-1)^2+8a+8}{(a-1)^2+2} = 1 + \frac{8a+6}{(a-1)^2+2} \le 1 + \frac{8a+6}{2} = 4a+4$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{b^2+6b+9}{b^2-2b+3} \le 4b+4;\ \frac{c^2+6c+9}{c^2-2c+3} \le 4c+4$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên và kết hợp với giả thiết ta được

$$\frac{a^2+6a+9}{a^2-2a+3} + \frac{b^2+6b+9}{b^2-2b+3} + \frac{c^2+6c+9}{c^2-2c+3} \le 4(a+b+c) + 3.4 = 24$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Bài 132. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{a+2b+3} + \frac{1}{b+2c+3} + \frac{1}{c+2a+3}$$

Trích đề thi HSG tỉnh Nghệ An năm 2014-2015

Lời giải

Đặt $a = x^2$; $b = y^2$; $z = c^2$ khi đó ta được $xyz = 1$ và bểu thức P được viết lại thành

$$P = \frac{1}{x^2+2y^2+3} + \frac{1}{y^2+2z^2+3} + \frac{1}{z^2+2x^2+3}$$

Ta có $x^2 + y^2 \ge 2xy;\ y^2 + 1 \ge 2y \Rightarrow x^2 + 2y^2 + 3 \ge 2(xy + y + 1)$

Do đó ta được $\frac{1}{x^2+2y^2+3} \le \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{xy+y+1}$. Chứng minh tương tự ta có

$$\frac{1}{y^2+2z^2+3} \le \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{yz+z+1};\ \frac{1}{z^2+2x^2+3} \le \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{zx+z+1}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$P \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy+y+1} + \frac{1}{yz+z+1} + \frac{1}{zx+x+1}\right)$$

Ta cần chứng minh $\frac{1}{ab+b+1} + \frac{1}{bc+c+1} + \frac{1}{ca+a+1} = 1$

Đến đây ta có hai hướng đánh giá $\frac{1}{xy+y+1} + \frac{1}{yz+z+1} + \frac{1}{zx+x+1}$

Hướng 1. Do $xyz = 1$, nên tồn tại các số dương m, n, p để $x = \frac{m}{n}; y = \frac{n}{p}; z = \frac{p}{m}$. Khi đó ta có

$$\frac{1}{xy+y+1} + \frac{1}{yz+z+1} + \frac{1}{zx+x+1} = \frac{p}{m+n+p} + \frac{m}{m+n+p} + \frac{n}{m+n+p} = 1$$

Hướng 2. Do $xyz = 1$, nên ta được

$$\frac{1}{xy+y+1} + \frac{1}{yz+z+1} + \frac{1}{zx+x+1} = \frac{zx}{z+1+zx} + \frac{x}{1+zx+z} + \frac{1}{zx+z+1} = 1$$

Từ đó ta được $P \le \frac{1}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 133. Cho các số dương x, y, z thay đổi thỏa mãn $xy + yz + zx = xyz$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = \frac{1}{4x+3y+z} + \frac{1}{x+4y+3z} + \frac{1}{3x+y+4z}$

Trích đề thi HSG Tỉnh Hải Dương năm 2014-2015

Lời giải

Từ giả thiết ta có $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta được

$$\frac{64}{4x+3y+z} \le \frac{16}{4x} + \frac{16}{3y+z} \le \frac{4}{x} + \frac{4}{2y} + \frac{4}{y+z} \le \frac{4}{x} + \frac{3}{y} + \frac{1}{z}$$

Tương tự ta được $\frac{64}{x+4y+3z}\le\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{3}{z}$; $\frac{64}{3x+y+4z}\le\frac{3}{x}+\frac{1}{y}+\frac{4}{z}$

Do đó ta được $M=\frac{1}{4x+3y+z}+\frac{1}{x+4y+3z}+\frac{1}{3x+y+4z}\le\frac{1}{8}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{8}$

Vậy M đạt giá trị lớn nhất là $\frac{1}{8}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=3$.

Bài 134. Cho các số dương x, y, z thay đổi thỏa mãn $x+y+z=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{x+\sqrt{3x+yz}}+\frac{y}{y+\sqrt{3y+zx}}+\frac{z}{z+\sqrt{3z+xy}}\le 1$$

Trích đề thi HSG Tỉnh Hà Nam năm 2014-2015

Lời giải

Áp dụng giả thiết ta chú ý đến phép biến đổi

$$3x+yz=x(x+y+z)+yz=(x+y)(x+z)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta được

$$(x+y)(x+z)\ge\left(\sqrt{xy}+\sqrt{xz}\right)^2$$

Do đó ta được $\frac{x}{x+\sqrt{3x+yz}}\le\frac{x}{x+\sqrt{xy}+\sqrt{xz}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$.

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{y}{y+\sqrt{3y+zx}}\le\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}};\ \frac{z}{z+\sqrt{3z+xy}}\le\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{x}{x+\sqrt{3x+yz}}+\frac{y}{y+\sqrt{3y+zx}}+\frac{z}{z+\sqrt{3z+xy}}\le 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Bài 135. Cho các số dương a, b, c thay đổi thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{b^2-bc+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2-ca+a^2}}$$

Trích đề thi HSG Thành Phố Hà Nội năm 2014-2015

Lời giải

Cách 1. Ta có $a^2-ab+b^2=(a+b)^2-3ab\ge(a+b)^2-\frac{3(a+b)^2}{4}=\frac{(a+b)^2}{4}$

Do đó ta được $\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+b^2}}\le\frac{2}{a+b}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$. Hoàn toàn tương tự ta có

$$\frac{1}{\sqrt{b^2-bc+c^2}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right);\ \frac{1}{\sqrt{c^2-ca+a^2}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$P=\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{b^2-bc+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2-ca+a^2}}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 3. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được $a^2-ab+b^2\ge 2ab-ab=ab$

Do đó ta được $\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+b^2}}\le\frac{1}{\sqrt{ab}}$. Hoàn toàn tương tự ta có

$$\frac{1}{\sqrt{b^2-bc+c^2}}\le\frac{1}{\sqrt{bc}};\ \frac{1}{\sqrt{c^2-ca+a^2}}\le\frac{1}{\sqrt{ca}}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$P=\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{b^2-bc+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2-ca+a^2}}\le\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}$$

Dễ thấy $\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$

Do đó ta được $P\le 3$. Vậy giá trị lớn nhất của P là 3.

Bài 136. Cho a, b, c là các các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$a^3+b^3+c^3+ab+bc+ca\ge 6$$

Trích đề thi HSG Tỉnh Đăk Lăk năm 2014-2015

Lời giải

Cách 1. Để ý đến giả thiết $a+b+c=3$ ta có

$$a^3+b^3+c^3+ab+bc+ca=a^3+b^3+c^3+\frac{(a+b+c)^2-\left(a^2+b^2+c^2\right)}{2}$$
$$=a^3+b^3+c^3+\frac{9-\left(a^2+b^2+c^2\right)}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được

$$a^3+a^3+1\ge 3a^2;\ b^3+b^3+1\ge 3b^2;\ c^3+c^3+1\ge 3c^2$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$2\left(a^3+b^3+c^3\right)+3\ge 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Do đó ta được $a^3+b^3+c^3+\frac{9-\left(a^2+b^2+c^2\right)}{2}\ge a^2+b^2+c^2+3$

Lại thấy $a^2+b^2+c^2\ge\frac{(a+b+c)^2}{3}=3$

Do đó ta được $a^3+b^3+c^3+\frac{9-\left(a^2+b^2+c^2\right)}{2}\ge 6$

Hay $a^3+b^3+c^3+ab+bc+ca\ge 6$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta được

$$3\left(a^3+b^3+c^3\right)=(a+b+c)\left(a^3+b^3+c^3\right)\ge\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$

Dễ thấy $a^2+b^2+c^2\ge 3$, do đó ta được

$$3\left(a^3+b^3+c^3\right)\ge 3\left(a^2+b^2+c^2\right)\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3\ge a^2+b^2+c^2$$

Khi đó ta suy ra

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3+ab+bc+ca &\ge a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\\ &=(a+b+c)^2-(ab+bc+ca)\\ &\ge (a+b+c)^2-\frac{(a+b+c)^2}{3}=9-3=6\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 137. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a\le 1; b\le 2; a+b+c=6$. Chứng minh rằng

$$(a+1)(b+1)(c+1)\ge 4abc$$

Trích đề thi HSG Tỉnh Bắc Giang năm 2014-2015

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\ge 4\Leftrightarrow 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{abc}\ge 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{a+b+c+1}{abc}\ge 3\Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{7}{abc}\ge 3$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được

$$a+\frac{b}{2}\ge 2\sqrt{\frac{ab}{2}};\ \frac{b}{2}+\frac{c}{3}\ge 2\sqrt{\frac{bc}{6}}$$

Do đó ta được $6=a+\frac{b}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}+\frac{2c}{3}\ge 2\sqrt{\frac{ab}{2}}+2\sqrt{\frac{bc}{6}}+\frac{2c}{3}\ge 6\sqrt[3]{\sqrt{\frac{ab^2c^3}{108}}}$

Do đó ta được $ab^2c^3\le 108$, mà theo giả thiết $a\le 1; b\le 2$ suy ra $a^2b\le 2$

Suy ra ta có $216\ge 108a^2b\ge ab^2c^3a^2b=(abc)^3\Rightarrow abc\le 6$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM và các giả thiết ta lại có

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\ge 3\sqrt[3]{\frac{6}{abc}}\ge 3;\ \frac{2}{a}+\frac{1}{b}\ge 2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2};\ \frac{3.7}{abc}\ge\frac{3.7}{6}=\frac{7}{2}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{7}{abc}\right)\ge 3+\frac{5}{2}+\frac{7}{2}$$

Hay $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{7}{abc}\ge 3$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=1;\ b=2;\ c=3$.

Bài 138. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\frac{19a+3}{1+b^2}+\frac{19b+3}{1+c^2}+\frac{19c+3}{1+a^2}$

Trích đề thi HSG Tỉnh Hưng Yên năm 2014-2015

Lời giải

Cách 1. Biến đổi và áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được

$$\frac{19a+3}{1+b^2}=19a+3-\frac{b^2(19a+3)}{1+b^2}\ge 19a+3-\frac{b(19a+3)}{2}=\frac{38a+6-19ab-3b}{2}$$

Hoàn toàn tương tự được

$$\frac{19b+3}{1+c^2}\ge\frac{38b+6-19bc-3c}{2};\ \frac{19c+3}{1+a^2}\ge\frac{38c+6-19ca-3a}{2}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$T=\frac{19a+3}{1+b^2}+\frac{19b+3}{1+c^2}+\frac{19c+3}{1+a^2}\ge\frac{35\left(a+b+c\right)+18-19\left(ab+bc+ac\right)}{2}$$

$$\ge\frac{35.\sqrt{3\left(ab+bc+ca\right)}+18-19.3}{2}=33$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 33. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Cách 2. Dễthấy $\frac{19a+3}{1+b^2}=\frac{16a}{1+b^2}+\frac{3\left(a+1\right)}{1+b^2}$. Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được

$$\frac{16a}{1+b^2}=16a-\frac{16ab^2}{1+b^2}\ge16a-\frac{16ab^2}{2b}=16a-8ab$$

$$\frac{3\left(a+1\right)}{1+b^2}=3\left(a+1\right)-\frac{3\left(a+1\right)b^2}{1+b^2}\ge3\left(a+1\right)-\frac{3\left(a+1\right)b^2}{2b}=3\left(a+1\right)-\frac{3\left(a+1\right)b}{2}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$T=\frac{19a+3}{1+b^2}+\frac{19b+3}{1+c^2}+\frac{19c+3}{1+a^2}\ge\frac{35\left(a+b+c\right)+18-19\left(ab+bc+ac\right)}{2}$$

$$\ge\frac{35.\sqrt{3\left(ab+bc+ca\right)}+18-19.3}{2}=33$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 33.

Bài 139. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz=2\sqrt{2}$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^8+y^8}{x^4+y^4+x^2y^2}+\frac{y^8+z^8}{y^4+z^4+y^2z^2}+\frac{z^8+x^8}{z^4+x^4+z^2y^2}\ge8$$

Trích đề thi chọn học sinh dự thi HSGQG Tỉnh Hải Dương năm học 2013-2014

Lời giải

Đặt $a=x^2;b=y^2;c=z^2$ suy ra $abc=8$. Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2+ab}+\frac{b^4+c^4}{b^2+c^2+bc}+\frac{c^4+a^4}{c^2+a^2+ca}\ge8$$

Dễ dàng chứng minh minh được

$$a^4+b^4\ge\frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{2};a^2+b^2+ab\le\frac{3\left(a^2+b^2\right)}{2}$$

Suy ra $\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2+ab}\ge\frac{a^2+b^2}{3}$. Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2+ab}+\frac{b^4+c^4}{b^2+c^2+bc}+\frac{c^4+a^4}{c^2+a^2+ca}\ge\frac{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}{3}$$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được

$$a^2+b^2+c^2\ge3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=12$$

Do đó ta được $\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2+ab}+\frac{b^4+c^4}{b^2+c^2+bc}+\frac{c^4+a^4}{c^2+a^2+ca}\ge8$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\sqrt{2}$

Bài 140. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng

$$a.\sqrt{\frac{b+c}{a^2+bc}}+b.\sqrt{\frac{c+a}{b^2+ca}}+c.\sqrt{\frac{a+b}{c^2+ab}}\le\frac{3}{abc}$$

Trích đề thi chọn học sinh dự thi HSGQG Tỉnh Bắc Giang năm học 2013-2014

Lời giải

Cách 1. Ta có $a.\sqrt{\frac{b+c}{a^2+bc}}=\sqrt{a}.\sqrt{\frac{ab+ac}{a^2+bc}}$. Khi đó áp dụng bất đẳng thức AM - GM và chú ý đến giả thiết $ab+bc+ca=3$ ta có

$$a^2+bc+ab^2c^2\ge 3abc\Rightarrow a^2+bc\ge abc(3-bc)=abc(ab+ac)$$

Do đó ta được

$$\frac{ab+ac}{a^2+bc}\le\frac{1}{abc}\Rightarrow\sqrt{a}.\sqrt{\frac{ab+ac}{a^2+bc}}\le\frac{1}{\sqrt{bc}}\Rightarrow a.\sqrt{\frac{b+c}{a^2+bc}}\le\frac{1}{\sqrt{bc}}$$

Áp dụng hoàn toàn tương tự ta được

$$b.\sqrt{\frac{c+a}{b^2+ca}}\le\frac{1}{\sqrt{ca}};\ c.\sqrt{\frac{a+b}{c^2+ab}}\le\frac{1}{\sqrt{ab}}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$a.\sqrt{\frac{b+c}{a^2+bc}}+b.\sqrt{\frac{c+a}{b^2+ca}}+c.\sqrt{\frac{a+b}{c^2+ab}}\le\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{abc}}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{abc}}\le\frac{3}{abc}\Leftrightarrow\sqrt{abc}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\le 3$$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng vì

$$3=ab+bc+ca\ge\sqrt{abc}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta được

$$\left(a.\sqrt{\frac{b+c}{a^2+bc}}+b.\sqrt{\frac{c+a}{b^2+ca}}+c.\sqrt{\frac{a+b}{c^2+ab}}\right)^2\le(a+b+c)\left(\frac{ab+ac}{a^2+bc}+\frac{bc+ab}{b^2+ca}+\frac{ca+ac}{c^2+a}\right)$$

Ta cần chứng minh được

$$(a+b+c)\left(\frac{ab+ac}{a^2+bc}+\frac{bc+ab}{b^2+ca}+\frac{ca+ac}{c^2+a}\right)\le\left(\frac{3}{abc}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow(abc)^2(a+b+c)\left(\frac{ab+ac}{a^2+bc}+\frac{bc+ab}{b^2+ca}+\frac{ca+ac}{c^2+a}\right)\le 9$$

Dễ thấy $abc(a+b+c)\le\frac{1}{3}(ab+bc+ca)^2=3$ và cũng từ giả thiết ta suy ra $abc\le 1$.

Do đó ta được $(abc)^2(a+b+c)\le 3$. Như vậy phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{ab+ac}{a^2+bc}+\frac{bc+ab}{b^2+ca}+\frac{ca+ac}{c^2+a}\le 3$$

Thật vậy, biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{ab+ac}{a^2+bc}-1+\frac{bc+ab}{b^2+ca}-1+\frac{ca+ac}{c^2+a}-1\le 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)(a-c)}{a^2+bc}+\frac{(b-c)(b-a)}{b^2+ca}+\frac{(c-a)(c-b)}{c^2+a}\ge 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)\left[(a-c)(b^2+ca)-(b-c)(a^2+bc)\right]}{(a^2+bc)(b^2+ca)}+\frac{(c-a)(c-b)}{c^2+a}\ge 0$$
$$(b-a)(b+a)(2a+c)$$

Do vai trò của các biến như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử

Bài 141. Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn
$$\frac{1}{1+a^3}+\frac{1}{1+b^3}+\frac{1}{1+c^3}+\frac{1}{1+d^3}=2$$
Chứng minh rằng $\frac{1-a}{1-a+a^2}+\frac{1-b}{1-b+b^2}+\frac{1-c}{1-c+c^2}+\frac{1-d}{1-d+d^2}\ge 0$

Trích đề thi chọn học sinh dự thi HSGQG Tỉnh Đồng Tháp năm học 2013-2014

Lời giải

Biến đổi tương đương bất đẳng thức cần chứng minh
$$\frac{1-a^2}{1+a^3}+\frac{1-b^2}{1+b^3}+\frac{1-c^2}{1+c^3}+\frac{1-d^2}{1+d^3}\ge 0$$
Hay $\frac{1}{1+a^3}+\frac{1}{1+b^3}+\frac{1}{1+c^3}+\frac{1}{1+d^3}\ge\frac{a^2}{1+a^3}+\frac{b^2}{1+b^3}+\frac{c^2}{1+c^3}+\frac{d^2}{1+d^3}$

Từ giả thiếtvà áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có
$$\frac{1}{1+a^3}+\frac{1}{1+b^3}+\frac{1}{1+c^3}=2-\frac{1}{1+d^3}=\frac{1+2d^3}{1+d^3}\ge\frac{3d^2}{1+d^3}$$
Hay $\frac{1}{1+a^3}+\frac{1}{1+b^3}+\frac{1}{1+c^3}\ge\frac{3d^2}{1+d^3}$

Hoàn toàn tương tự ta được
$$\frac{1}{1+b^3}+\frac{1}{1+c^3}+\frac{1}{1+d^3}\ge\frac{3a^2}{1+a^3}$$
$$\frac{1}{1+a^3}+\frac{1}{1+c^3}+\frac{1}{1+d^3}\ge\frac{3b^2}{1+b^3}$$
$$\frac{1}{1+a^3}+\frac{1}{1+b^3}+\frac{1}{1+d^3}\ge\frac{3c^2}{1+c^3}$$
Cộng theo vế bốn bất đẳng thức trên ta được
$$\frac{1}{1+a^3}+\frac{1}{1+b^3}+\frac{1}{1+c^3}+\frac{1}{1+d^3}\ge\frac{a^2}{1+a^3}+\frac{b^2}{1+b^3}+\frac{c^2}{1+c^3}+\frac{d^2}{1+d^3}$$
Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=1$.

Bài 142. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c\le\frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$S=\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{c^2}}$$

Trích đề thi chọn học sinh dự thi HSGQG Tỉnh Trà Vinh năm học 2013-2014

Lời giải

Cách 1. Chú ý đến dấu đẳng thức xảy ra ta được

$$\sqrt{17\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)}=\sqrt{\left(1+4^2\right)\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)}\ge\sqrt{\left(a+\frac{4}{a}\right)^2}=a+\frac{4}{a}$$

Áp dụng tương tự ta được $\sqrt{17\left(b^2+\frac{1}{b^2}\right)}\ge b+\frac{4}{b};\sqrt{17\left(c^2+\frac{1}{c^2}\right)}\ge c+\frac{4}{c}$

Khi đó ta được

$$\sqrt{17\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)}+\sqrt{17\left(b^2+\frac{1}{b^2}\right)}+\sqrt{17\left(c^2+\frac{1}{c^2}\right)}\ge a+b+c+\frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{4}{c}$$

Theo một đánh giá quen thuộc ta có $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{36}{a+b+c}$

Nên ta được $a+b+c+\frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{4}{c}\ge a+b+c+\frac{36}{a+b+c}$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM và kết hợp với giả thiết ta được

$$\begin{aligned}a+b+c+\frac{36}{a+b+c}&=a+b+c+\frac{9}{4(a+b+c)}+\frac{135}{4(a+b+c)}\\&\ge 2.\sqrt{(a+b+c).\frac{9}{4(a+b+c)}}+\frac{135}{4.\frac{3}{2}}=3+\frac{135}{6}=\frac{51}{2}\end{aligned}$$

Từ đó ta suy ra $\sqrt{17\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)}+\sqrt{17\left(b^2+\frac{1}{b^2}\right)}+\sqrt{17\left(c^2+\frac{1}{c^2}\right)}\ge\frac{51}{2}$

Hay $\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{c^2}}\ge\frac{3\sqrt{17}}{2}$

Như vậy giá trị nhỏ nhất của S là $\frac{3\sqrt{17}}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{2}$.

Cách 2. Dễ dàng chứng minh được với a, b, x, y là các số thực dương ta luôn có

$$\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+y^2}\ge\sqrt{(a+b)^2+(x+y)^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned}S=\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{c^2}}&\ge\sqrt{(a+b)^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2}+\sqrt{c^2+\frac{1}{c^2}}\\&\ge\sqrt{(a+b+c)^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}\end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức AM - GM ta có $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2\ge\left(\frac{9}{a+b+c}\right)^2=\frac{81}{(a+b+c)^2}$

Do đó ta được

$$(a+b+c)^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2\ge(a+b+c)^2+\frac{81}{(a+b+c)^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM và giả thiết ta có

$$(a+b+c)^2+\frac{81}{16(a+b+c)^2}\ge 2.\frac{9}{4}=\frac{9}{2};\ \frac{1215}{16(a+b+c)^2}\ge\frac{1215}{16.\frac{9}{4}}=\frac{135}{4}$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được $(a+b+c)^2+\frac{81}{(a+b+c)^2}\ge\frac{9}{2}+\frac{135}{4}=\frac{153}{4}$

Từ các kết quả đó ta được $S \geq \sqrt{\frac{153}{4}} = \frac{3\sqrt{17}}{2}$.

Như vậy giá trị nhỏ nhất của S là $\frac{3\sqrt{17}}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

Bài 143. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{bc}{a^2(b+c)} + \frac{ca}{b^2(c+a)} + \frac{ab}{c^2(a+b)}$$

Trích đề thi chọn học sinh dự thi HSGQG Tỉnh Lâm Đồng năm học 2013-2014

Lời giải

Kết hợp với giả thiết ta viết lại biểu thức P thành

$$P = \frac{b^2c^2}{ab+ac} + \frac{c^2a^2}{ab+bc} + \frac{a^2b^2}{ca+bc}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng phân thức ta được

$$P = \frac{b^2c^2}{ab+ac} + \frac{c^2a^2}{ab+bc} + \frac{a^2b^2}{ca+bc} \geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{2(ab+bc+ca)} = \frac{ab+bc+ca}{2}$$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức AM - GM ta được

$$ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 3$$

Suy ra ta được $P \geq \frac{3}{2}$ hay giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Bài 144. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $0 \leq a; b; c \leq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(2-c) \leq 2$$

Trích đề thi chọn học sinh dự thi HSGQG Tỉnh An Giang năm học 2014-2015

Lời giải

Từ giả thiết ta được $0 \leq 1-a; 1-b \leq 1; a+b+1 \geq 1$.

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được

$$1 = \frac{(1-a)+(1-b)+(a+b+1)}{3} \geq \sqrt[3]{(1-a)(1-b)(a+b+1)}$$

Suy ta $1 \geq (1-a)(1-b)(a+b+1)$. Vì $2-c > 0$ nên khi đó ta được

$$2 - c \geq (1-a)(1-b)(a+b+1)(2-c)$$

Suy ra $(1-a)(1-b)(2-c) \leq \frac{2-c}{a+b+1}$.

Hay $\frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(2-c) \leq \frac{2}{a+b+1}$ (1)

Ta đi chứng minh $\frac{a}{b+c+1} \leq \frac{2a}{a+b+1}$. Thật vậy, biến đổitương đương bất đẳng thức trên ta được

$$a(a+b+1) \leq 2a(b+c+1) \Leftrightarrow a(b+2c+1-a) \leq 0$$

Tương tự ta được $\frac{b}{a+c+1} \leq \frac{2b}{a+b+1}$.Từ các kết quả trên ta được

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(2-c)$$
$$\le\frac{2}{a+b+1}+\frac{2a}{a+b+1}+\frac{2b}{a+b+1}=2$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=0;\ c=1$.

Bài 145. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$a^3+b^3+c^3+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 3(ab+bc+ca)$$

Trích đề thi chọn học sinh dự thi HSGQG Tỉnh Lâm Đồng năm học 2014-2015

Lời giải

Dễ thấy $2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge\frac{18}{a+b+c}=6$. Do đó ta được

$$a^3+b^3+c^3+6\ge 3(ab+bc+ca)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được

$$a^3+1+1\ge 3a;\ b^3+1+1\ge 3b;\ c^3+1+1\ge 3c$$

Ta quy bài toán về chứng minh $3(a+b+c)\ge 3(ab+bc+ca)$

Hay $(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$, đây là một đánh giá đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài 146. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a(b+c)}{a^2+(b+c)^2}+\frac{b(c+a)}{b^2+(c+a)^2}+\frac{c(a+b)}{c^2+(a+b)^2}\le\frac{6}{5}$$

Trích đề thi chọn học sinh dự thi HSGQG Tỉnh Thái Bình năm học 2014-2015

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$a^2+(b+c)^2=\left[a^2+\frac{(b+c)^2}{4}\right]+\frac{3}{4}(b+c)^2\ge a(b+c)+\frac{3}{4}(b+c)^2=\frac{(b+c)(4a+3b+3c)}{4}$$

Suy ra ta được $\frac{a(b+c)}{a^2+(b+c)^2}\le\frac{4a(b+c)}{(4a+3b+3c)(b+c)}=\frac{4a}{4a+3b+3c}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng phân thức ta được

$$\frac{4a}{4a+3b+3c}=\frac{a}{25}.\frac{(9+1)^2}{4a+3b+3c}\le\frac{a}{25}\left(\frac{9^2}{3(a+b+c)}+\frac{1}{a}\right).$$

Suy ra ta được $\frac{a(b+c)}{a^2+(b+c)}\le\frac{27a}{25(a+b+c)}+\frac{1}{25}$. Áp dụng hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{b(c+a)}{b^2+(c+a)^2}\le\frac{27b}{25(a+b+c)}+\frac{1}{25};\ \frac{c(c+a)}{c^2+(c+a)^2}\le\frac{27c}{25(a+b+c)}+\frac{1}{25}$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a(b+c)}{(b+c)^2+a^2}+\frac{b(a+c)}{(c+a)^2+b^2}+\frac{c(a+b)}{(a+b)^2+c^2}\le\frac{27(a+b+c)}{25(a+b+c)}+\frac{3}{25}=\frac{6}{5}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Bài 147. Cho a, b, c là các số thực không âm sao cho $a+b+c=1$.Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+9bc+4(b-c)^2}+\frac{b}{1+9ca+4(c-a)^2}+\frac{c}{1+9ab+4(a-b)^2}\ge\frac{1}{2}$$

Trích đề thi chọn học sinh dự thi HSGQG Thành Phố hải Phòng năm học 2014-2015

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng phân thức ta được

$$\frac{a}{1+9bc+4(b-c)^2}+\frac{b}{1+9ca+4(c-a)^2}+\frac{c}{1+9ab+4(a-b)^2}$$

$$\ge\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)+27abc+4a(b-c)^2+4b(c-a)^2+4c(a-b)^2}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$2(a+b+c)^2\ge 1+27abc+4a(b-c)^2+4b(c-a)^2+4c(a-b)^2$$

Hay $1\ge 4ab(a+b)+4bc(b+c)+4ca(c+a)+3abc$.

Để ý đến giả thiết ta viết lại được bất đẳng thức trên thành

$$(a+b+c)^3\ge 4ab(a+b)+4bc(b+c)+4ca(c+a)+3abc$$

Hay $a^3+b^3+c^3+3abc\ge ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$

Biến đổi tương đương ta được $abc\ge(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$.

Bất đẳng thức trên là một bất đẳng thức đúng và dễ dàng chứng minh được.

Vậy bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$ hoặc $a=b=\frac{1}{2}; c=0$ và các hoán vị.

Bài 148. Cho x, y, z là các số thực không dương.Chứng minh rằng

$$\frac{xy^3z^3}{(x^2+yz)^2(y^3+z^3)}+\frac{yz^3x^3}{(y^2+zx)^2(z^3+x^3)}+\frac{zx^3y^3}{(z^2+xy)^2(x^3+y^3)}\le\frac{3}{8}$$

Trích đề thi chọn học sinh dự thi HSGQG Trường ĐHKHTN Hà Nội năm học 2014-2015

Lời giải

Dễ dàng chứng minh được $2(y^3+z^3)\ge(y+z)(y^2+z^2)\ge 2\sqrt{yz}(y^2+z^2)$

Và lại có $x^2+yz\ge 2x\sqrt{yz}$. Nhân theo vế hai kết quả trên ta được

$$(x^2+yz)(y^3+z^3)\ge 2xyz(y^2+z^2)$$

Suy ra ta được

$$\frac{xy^3z^3}{(x^2+yz)^2(y^3+z^3)}\le\frac{xy^3z^3}{2(x^2+yz)xyz(y^2+z^2)}$$

$$=\frac{y^2z^2}{2(x^2y^2+x^2z^2+y^3z+yz^3)}\le\frac{y^2z^2}{2(x^2y^2+x^2z^2+2y^2z^2)}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{xy^3z^3}{(x^2+yz)^2(y^3+z^3)}+\frac{yz^3x^3}{(y^2+zx)^2(z^3+x^3)}+\frac{zx^3y^3}{(z^2+xy)^2(x^3+y^3)}$$

$$\le\frac{y^2z^2}{2(x^2y^2+x^2z^2+2y^2z^2)}+\frac{x^2z^2}{2(x^2y^2+2x^2z^2+y^2z^2)}+\frac{x^2y^2}{2(2x^2y^2+x^2z^2+2y^2z^2)}$$

Ta càn chỉ ra được

$$\frac{y^2z^2}{x^2y^2+x^2z^2+2y^2z^2}+\frac{x^2z^2}{x^2y^2+2x^2z^2+y^2z^2}+\frac{x^2y^2}{2x^2y^2+x^2z^2+2y^2z^2}\le\frac{3}{4}$$

Đặt $a=x^2y^2; b=y^2z^2; c=z^2x^2$. Khi đó bất đẳng thức được viết lại thành

$$\frac{a}{2a+b+c}+\frac{b}{a+2b+c}+\frac{c}{a+b+2c}\le\frac{3}{4}$$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{b+c}{2a+b+c}+\frac{a+c}{a+2b+c}+\frac{a+b}{a+b+2c}\ge\frac{3}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng phân thức ta được

$$\frac{b+c}{2a+b+c}+\frac{a+c}{a+2b+c}+\frac{a+b}{a+b+2c}\ge\frac{(2a+2b+2c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)+6(ab+bc+ca)}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$2(2a+2b+2c)^2\ge3\left[2(a^2+b^2+c^2)+6(ab+bc+ca)\right]$$

$$\Leftrightarrow 4(a+b+c)^2\ge3(a+b+c)^2+3(ab+ba+ca)$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2\ge3(ab+bc+ca)$$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$

Bài 149. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=1$.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{\frac{x^2y}{4x+5y}}+\sqrt{\frac{y^2z}{4y+5z}}+\sqrt{\frac{z^2x}{4z+5x}}$$

Trích đề thi chọn học sinh dự thi HSGQG Trường ĐHKHTN Hà Nội năm học 2014-2015

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta được

$$P^2\le(xy+yz+zx)\left(\frac{x}{4x+5y}+\frac{y}{4y+5z}+\frac{z}{4z+5x}\right)$$

Đặt $Q=\frac{x}{4x+5y}+\frac{y}{4y+5z}+\frac{z}{4z+5x}=\frac{1}{4}\left[3-\left(\frac{5y}{4x+5y}+\frac{5z}{4y+5z}+\frac{5x}{4z+5x}\right)\right]$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng phân thức ta được

$$\frac{5y}{4x+5y}+\frac{5z}{4y+5z}+\frac{5x}{4z+5x}\ge\frac{5(x+y+z)^2}{4(xy+yz+zx)+5(x^2+y^2+z^2)}$$

$$=\frac{5}{5(x+y+z)^2-6(xy+yz+zx)}=\frac{5}{5-6(xy+yz+zx)}$$

Do đó ta được $Q\le\frac{1}{4}\left[3-\frac{5}{5-6(xy+yz+zx)}\right]$

Khi đó ta suy ra $P^2\le\frac{1}{4}(xy+yz+zx)\left[3-\frac{5}{5-6(xy+yz+zx)}\right]$

Đặt $a=xy+yz+zx\Rightarrow0<a\le\frac{1}{3}$. Khi đó ta được

$$P^2 \le \frac{1}{4}a\left(3-\frac{5}{5-6a}\right)=\frac{a(5-9a)}{2(5-6a)}$$

Ta sẽ chứng minh $\frac{a(5-9a)}{2(5-6a)} \le \frac{1}{9}$.

Thật vậy, bất đẳng thức này tương đương với $(1-3a)(10-27a) \ge 0$, đây là một đánh giá đúng do $0 < a \le \frac{1}{3}$. Do đó bất đẳng thức trên được chứng minh.

Suy ra $P \le \frac{1}{3}$ hay giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Bài 150. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{1+9b^2ca}+\frac{b^3}{1+9c^2ab}+\frac{c^3}{1+9a^2bc} \ge \frac{(a+b+c)^3}{18}$$

Trích đề thi chọn học sinh dự thi HSGQG Tỉnh Thừa Thiên Huế năm học 2014-2015

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng phân thức ta được

$$\frac{a^3}{1+9b^2ca}+\frac{b^3}{1+9c^2ab}+\frac{c^3}{1+9a^2bc} \ge \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a+b+c+9abc(ab+bc+ca)}$$

Dễ thấy $a^2+b^2+c^2 \ge \frac{(a+b+c)^2}{3}$ và để ý đến giả thiết $ab+bc+ca=1$ ta được

$$\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a+b+c+9abc(ab+bc+ca)} \ge \frac{(a+b+c)^4}{9(a+b+c+9abc)}$$

Do đó ta có

$$\frac{a^3}{1+9b^2ca}+\frac{b^3}{1+9c^2ab}+\frac{c^3}{1+9a^2bc} \ge \frac{(a+b+c)^4}{9(a+b+c+9abc)}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{(a+b+c)^4}{9(a+b+c+9abc)} \ge \frac{(a+b+c)^3}{18}$$

Hay $a+b+c \ge 9abc$. Để ý đến giả thiết $ab+bc+ca=1$, áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được

$$a+b+c=(a+b+c)(ab+bc+ac) \ge 3\sqrt[3]{abc}.3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=9abc$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Bài 151. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng

$$\sqrt{5a^2+4bc}+\sqrt{5b^2+4ca}+\sqrt{5c^2+4ab}$$
$$\ge \sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}+2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)$$

Trích đề thi chọn học sinh dự thi HSGQG Tỉnh Quảng Nam năm học 2014-2015

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sqrt{5a^2+4bc}-2\sqrt{bc}+\sqrt{5b^2+4ca}-2\sqrt{ca}+\sqrt{5c^2+4ab}-2\sqrt{ab}\ge\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$

Hay

$$\frac{5a^2}{\sqrt{5a^2+4bc}+2\sqrt{bc}}+\frac{5b^2}{\sqrt{5b^2+4ca}+2\sqrt{ca}}+\frac{5c^2}{\sqrt{5c^2+4ab}+2\sqrt{ab}}\ge\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$

Hay

$$\frac{1}{\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}}\left(\frac{5a^2}{\sqrt{5a^2+4bc}+2\sqrt{bc}}+\frac{5b^2}{\sqrt{5b^2+4ca}+2\sqrt{ca}}+\frac{5c^2}{\sqrt{5c^2+4ab}+2\sqrt{ab}}\right)\ge 1$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$2\sqrt{5a^2+4bc}\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}\le 8a^2+3b^2+3c^2+4bc$$

$$4\sqrt{bc}\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}=\frac{4.3\sqrt{bc}.\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}}{3}\le\frac{2\left(3a^2+3b^2+3c^2+9bc\right)}{3}$$
$$=2\left(a^2+b^2+c^2+3bc\right)$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được

$$2\left(\sqrt{5a^2+4bc}+2\sqrt{bc}\right)\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}\le 10a^2+5b^2+5c^2+10bc$$

Suy ra

$$\frac{10a^2}{2\left(\sqrt{5a^2+4bc}+2\sqrt{bc}\right)\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}}\ge\frac{10a^2}{10a^2+5b^2+5c^2+10bc}$$

Lại có $10bc\le 5b^2+5c^2$ nên ta được

$$\frac{10a^2}{10a^2+5b^2+5c^2+10bc}\ge\frac{10a^2}{10a^2+10b^2+10c^2}=\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Do đó ta được $\dfrac{10a^2}{2\left(\sqrt{5a^2+4bc}+2\sqrt{bc}\right)\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}}\ge\dfrac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{1}{\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}}\left(\frac{5a^2}{\sqrt{5a^2+4bc}+2\sqrt{bc}}+\frac{5b^2}{\sqrt{5b^2+4ca}+2\sqrt{ca}}+\frac{5c^2}{\sqrt{5c^2+4ab}+2\sqrt{ab}}\right)$$
$$\ge\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{b^2}{b^2+a^2+c^2}+\frac{c^2}{c^2+b^2+a^2}=1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 152. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{2a+3b}{a+2b+c}+\frac{4b}{a+b+2c}-\frac{8c}{a+b+3c}$$

Trích đề thi chọn học sinh dự thi HSGQG Tỉnh Quảng Nam năm học 2014-2015

Lời giải

Đặt $x=a+2b+c;\ y=a+b+2c;\ z=a+b+3c$. Khi đó ta được

$$a=5y-x-3z;\ b=x+z-2y;\ c=z-x$$

Biểu thức P được viết lại thành $P=\dfrac{4x}{y}+\dfrac{2y}{x}+\dfrac{8y}{z}+\dfrac{4z}{y}-17$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được

$$P = \frac{4x}{y} + \frac{2y}{x} + \frac{8y}{z} + \frac{4z}{y} - 17 \ge 2\sqrt{\frac{4x}{y}.\frac{2y}{x}} + 2\sqrt{\frac{8y}{z}.\frac{4z}{y}} - 17 = 12\sqrt{2} - 17$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $12\sqrt{2} - 17$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{4x}{y} = \frac{2y}{x} \\ \frac{8y}{z} = \frac{4z}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = y^2 \\ 2y^2 = z^2 \end{cases} \Leftrightarrow z = \sqrt{2}y = 2x$$

Bài 153. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $2\sqrt{xy} + \sqrt{xz} = 1$. Xh]ngs minh rằng

$$\frac{3yz}{x} + \frac{4zx}{y} + \frac{5xy}{z} \ge 4$$

Trích đề thi chọn học sinh dự thi HSGQG Tỉnh Tuyên Quang năm học 2014-2015

Lời giải

Biến đổi vế trái của bất đẳng thức như sau

$$\frac{3yz}{x} + \frac{4zx}{y} + \frac{5xy}{z} = \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{2yz}{x} + \frac{2xy}{z} + \frac{3zx}{y} + \frac{3xy}{z}$$

Khi đó áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được

$$\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \ge 2z; \frac{2yz}{x} + \frac{2xy}{z} \ge 4y; \frac{3zx}{y} + \frac{3xy}{z} \ge 6x$$

Do đó ta được $\frac{3yz}{x} + \frac{4zx}{y} + \frac{5xy}{z} \ge 6x + 4y + 2z$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức AM - GM ta được

$$6x + 4y + 2z = 4(x+y) + 2(x+z) \ge 8\sqrt{xy} + 4\sqrt{xz} = 4\left(2\sqrt{xy} + \sqrt{xz}\right) = 4$$

Do đó ta suy ra $\frac{3yz}{x} + \frac{4zx}{y} + \frac{5xy}{z} \ge 4$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$

Bài 154. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$3\left(x^4 + y^4 + z^4\right) - 7\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + 12 = 0.$$

Tìm giá trị nỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^2}{y+2z} + \frac{y^2}{z+2x} + \frac{z^2}{x+2y}$

Trích đề thi chọn học sinh dự thi HSGQG Tỉnh Yên Bái năm học 2014-2015

Lời giải

Trước hết ta đơn giản hóa giả thiết của bài toán.

Áp dụng một đánh giá quen thuộc ta có $x^4 + y^4 + z^4 \ge 3\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2$

Khi đó ta được $3\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 - 7\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + 12 \le 0$. Hay $x^2 + y^2 + z^2 \ge 3$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng phân thức ta được

$$P = \frac{x^2}{y+2z} + \frac{y^2}{z+2x} + \frac{z^2}{x+2y} \ge \frac{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2}{x^2y + y^2z + z^2x + 2\left(xy^2 + zx^2 + yz^2\right)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta được

$$x^2y+y^2z+z^2x\le\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)}$$

$$\le\sqrt{\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}{3}}=\left(x^2+y^2+z^2\right)\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$2\left(xy^2+yz^2+zx^2\right)\ge2\left(x^2+y^2+z^2\right)\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}$$

Do đó ta được $P\ge\dfrac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{3\left(x^2+y^2+z^2\right)\sqrt{\dfrac{x^2+y^2+z^2}{3}}}=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2+z^2}{3}}=1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 1. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Bài 155. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng

$$\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}+\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}\ge\frac{3}{5}$$

Trích đề thi chọn học sinh dự thi HSGQG Tỉnh Đăk Lăk năm học 2014-2015

Lời giải

Để ý là $\dfrac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}=\dfrac{(a+b)^2+c^2-2c(a+b)}{(a+b)^2+c^2}=1-\dfrac{2c(a+b)}{(a+b)^2+c^2}$

Áp dụng tương tự ta quy bài toán về chứng minh

$$\frac{a(b+c)}{a^2+(b+c)^2}+\frac{b(c+a)}{b^2+(c+a)^2}+\frac{c(a+b)}{c^2+(a+b)^2}\le\frac{6}{5}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$a^2+(b+c)^2=\left[a^2+\frac{(b+c)^2}{4}\right]+\frac{3}{4}(b+c)^2\ge a(b+c)+\frac{3}{4}(b+c)^2$$

$$=\frac{(b+c)(4a+3b+3c)}{4}$$

Suy ra ta được $\dfrac{a(b+c)}{a^2+(b+c)^2}\le\dfrac{4a(b+c)}{(4a+3b+3c)(b+c)}=\dfrac{4a}{4a+3b+3c}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng phân thức ta được

$$\frac{4a}{4a+3b+3c}=\frac{a}{25}.\frac{(9+1)^2}{4a+3b+3c}\le\frac{a}{25}\left(\frac{9^2}{3(a+b+c)}+\frac{1}{a}\right).$$

Suy ra ta được $\dfrac{a(b+c)}{a^2+(b+c)}\le\dfrac{27a}{25(a+b+c)}+\dfrac{1}{25}$

Áp dụng hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{b(c+a)}{b^2+(c+a)^2}\le\frac{27b}{25(a+b+c)}+\frac{1}{25};\ \frac{c(c+a)}{c^2+(c+a)^2}\le\frac{27c}{25(a+b+c)}+\frac{1}{25}$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a(b+c)}{(b+c)^2+a^2}+\frac{b(a+c)}{(c+a)^2+b^2}+\frac{c(a+b)}{(a+b)^2+c^2}\le\frac{27(a+b+c)}{25(a+b+c)}+\frac{3}{25}=\frac{6}{5}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Bài 156. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy+yz+zx=2xyz$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{x}{2y^2z^2+xyz}}+\sqrt{\frac{y}{2z^2x^2+xyz}}+\sqrt{\frac{z}{2x^2y^2+xyz}}\le 1$$

Trích đề thi chọn học sinh dự thi HSGQG Tỉnh Gia Lai năm học 2014-2015

Lời giải

Giả thiết của bài toán được viết lại thành $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$. Đặt $x=\frac{1}{a};y=\frac{1}{b};z=\frac{1}{c}$ thì ta được $a+b+c=2$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{bc}{\sqrt{2a+bc}}+\frac{ca}{\sqrt{2b+ca}}+\frac{ab}{\sqrt{2c+ab}}\le 1$$

Chú ý đến giả thiết $a+b+c=2$, ta có

$$\frac{bc}{\sqrt{2a+bc}}=\frac{bc}{\sqrt{a(a+b+c)+bc}}=\frac{bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}\le\frac{bc}{2}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+a}\right)$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{ca}{\sqrt{2b+ca}}\le\frac{ca}{2}\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}\right);\frac{ab}{\sqrt{2c+ab}}\le\frac{ab}{2}\left(\frac{1}{c+a}+\frac{1}{b+c}\right)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{bc}{\sqrt{2a+bc}}+\frac{ca}{\sqrt{2b+ca}}+\frac{ab}{\sqrt{2c+ab}}$$
$$\le\frac{bc}{2}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+a}\right)+\frac{ca}{2}\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}\right)+\frac{ab}{2}\left(\frac{1}{c+a}+\frac{1}{b+c}\right)=\frac{a+b+c}{2}=1$$

Như vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{3}{2}$

Bài 157. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x+2}{x^3(y+z)}+\frac{y+2}{y^3(z+x)}+\frac{z+2}{z^3(x+y)}$$

Trích đề thi chọn học sinh dự thi HSGQG Tỉnh Cần Thơ năm học 2015-2016

Lời giải

Đặt $a=\frac{1}{x};b=\frac{1}{y};z=\frac{1}{c}$, suy ra $abc=1$. Biểu thức P được viết lại thành

$$P=\frac{a^2bc(1+2a)}{b+c}+\frac{b^2ca(1+2b)}{c+a}+\frac{c^2ab(1+2c)}{a+b}$$

Hay $P=\frac{a(1+2a)}{b+c}+\frac{b(1+2b)}{c+a}+\frac{c(1+2c)}{a+b}$.

Ta viết biểu thức P thành $P=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{2a^2}{b+c}+\frac{2b^2}{c+a}+\frac{2c^2}{a+b}$.

Dễ dàng chứng minh được $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$.

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng phân thức ta được

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)}=\frac{a+b+c}{2}\ge\frac{3\sqrt[3]{abc}}{2}=\frac{3}{2}$$

DO đó ta được $P \ge \frac{3}{2} + 2.\frac{3}{2} = \frac{9}{2}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{9}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1$

Bài 158. Cho a, b, c là các số thực dương bất kỳ. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \ge \frac{ab+bc+ca}{3}\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

Trích đề thi chọn học sinh dự thi HSGQG Tỉnh Kiên Giang năm học 2015-2016

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^6 \ge \left(\frac{ab+bc+ca}{3}\right)^2.\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

Hay $\frac{(a+b+c)^6}{27} \ge (ab+bc+ca)^2(a^2+b^2+c^2)$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$(ab+bc+ca)^2(a^2+b^2+c^2) = (ab+bc+ca)(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2)$$

$$\le \left[\frac{(ab+bc+ca)+(ab+bc+ca)+(a^2+b^2+c^2)}{3}\right]^3 = \frac{(a+b+c)^6}{27}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 159. Cho a, b, c là các số thực không âm trong đó không có hai số nào cùng bằng 0. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2-ab+b^2} + \frac{1}{b^2-bc+c^2} + \frac{1}{c^2-ca+a^2} \ge \frac{3}{ab+bc+ca}$$

Trích đề thi chọn học sinh dự thi HSGQG Tỉnh Thanh Hóa năm học 2015-2016

Lời giải

Vì vai trò của các biến như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử c là số nhỏ nhất trong ba số a, b, c. Khi đó ta được

$$b^2 - bc + c^2 = b^2 - c(b-c) \le b^2$$

$$a^2 - ac + c^2 = a^2 - c(a-c) \le a^2$$

$$ab + bc + ca = ab + c(a+b) \ge ab$$

Từ đó ta có

$$\frac{1}{a^2-ab+b^2} + \frac{1}{b^2-bc+c^2} + \frac{1}{c^2-ca+a^2} \ge \frac{3}{a^2-ab+b^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

Và có $\frac{3}{ab+bc+ca} \le \frac{1}{ab}$. Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2-ab+b^2} \ge \frac{3}{ab}$$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{ab} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2-ab+b^2} - \frac{1}{ab} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{ab-a^2}{a^3b} + \frac{ab-b^2}{ab^3} + \frac{2ab-a^2-b^2}{(a^2-ab+b^2)ab} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(a-b)^4}{a^2b^2(a^2-ab+b^2)} \ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 160. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{4}{a+b}+\frac{4}{b+c}+\frac{4}{c+a}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+9$$

Trích đề thi chọn học sinh dự thi HSGQG Thành Phố Hà Nội năm học 2015-2016

Lời giải

Cách 1. Để ý đến giả thiết lại viết lại được bất đẳng thức trên thành

$$\frac{4(a+b+c)}{a+b}+\frac{4(a+b+c)}{b+c}+\frac{4(a+b+c)}{c+a}\le\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}+9$$

$$\Leftrightarrow\frac{4c}{a+b}+\frac{4a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+12\le\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}+12$$

$$\Leftrightarrow\frac{4c}{a+b}+\frac{4a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}\le\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM dạng $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$, ta được

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}=a\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\right)+b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

$$\ge\frac{4a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{4c}{a+b}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Cách 2. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{4}{1-c}+\frac{4}{1-a}+\frac{4}{1-b}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+9$$

Ta sẽ chứng minh $\frac{4}{1-c}-\frac{1}{c}\le 18c-3$. Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$5c-1\le c(1-c)(18c-3)\Leftrightarrow 5c-1\le 21c^2-3c-18c^3\Leftrightarrow(3c-1)^2(2c-1)\le 0$$

Do a, b, c là ba cạnh của một tam giác và $a+b+c=1$ nên

$$2c-1=2c-(a+b+c)=c-(a+b)<0$$

Do đó bất đẳng thức trên đúng. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 161. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{a+b+1}{a^3+b^3+1}+\frac{b+c+1}{b^3+c^3+1}+\frac{c+a+1}{c^3+a^3+1}$$

Trích đề thi chọn học sinh dự thi HSGQG Trường Đại học Vinh năm học 2015-2016

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM cho giả thiết ta được

$$a+b+c=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge 3$$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng phân thức cho giả thiết ta được

$$a+b+c=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}\Rightarrow ab+bc+ca\ge a+b+c$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\left(a^3+b^3+1\right)\left(a+b+1\right)\ge\left(a^2+b^2+1\right)^2\ge\frac{\left(a+b+1\right)^2\left(a^2+b^2+1\right)}{3}$$

Do đó ta được $\frac{a+b+1}{a^3+b^3+1}\le\frac{3}{a^2+b^2+1}$

Hoàn toàn tương tự ta thu được $P\le\frac{3}{a^2+b^2+1}+\frac{3}{b^2+c^2+1}+\frac{3}{c^2+a^2+1}$

Ta sẽ chứng minh $\frac{1}{a^2+b^2+1}+\frac{1}{b^2+c^2+1}+\frac{1}{c^2+a^2+1}\le 1$

Thật vậy, bất đẳng thức trên được viết lại thành

$$\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+1}+\frac{b^2+c^2}{b^2+c^2+1}+\frac{c^2+a^2}{c^2+a^2+1}\ge 2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng phân thức ta được

$$\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+1}+\frac{b^2+c^2}{b^2+c^2+1}+\frac{c^2+a^2}{c^2+a^2+1}\ge\frac{\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\right)^2}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)+3}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\right)^2\ge 4\left(a^2+b^2+c^2\right)+6$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)}+\sqrt{\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)}+\sqrt{\left(c^2+a^2\right)\left(c^2+a^2\right)}\ge a^2+b^2+c^2+3$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta được

$$\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)}\ge b^2+ac$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)}+\sqrt{\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)}+\sqrt{\left(c^2+a^2\right)\left(c^2+a^2\right)}$$
$$\ge a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$$

Mà từ giả thiết ta được $ab+bc+ca\ge 3$. Do vậy ta được

$$\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)}+\sqrt{\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)}+\sqrt{\left(c^2+a^2\right)\left(c^2+a^2\right)}\ge a^2+b^2+c^2+3$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là 3. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 162. Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$\left(a+bc\right)^2+\left(b+ca\right)^2+\left(c+ab\right)^2\ge\sqrt{2}\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)$$

Trích đề thi chọn học sinh dự thi HSGQG Tỉnh Đăk Lăk năm học 2015-2016

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được

$$\left(a+bc\right)^2+\left(b+ca\right)^2\ge\frac{\left(a+bc+b+ca\right)^2}{2}=\frac{\left(a+b\right)^2\left(c+1\right)^2}{2}$$

Khi đó ta được $\left(a+bc\right)^2+\left(b+ca\right)^2+\left(c+ab\right)^2\ge\frac{\left(a+b\right)^2\left(c+1\right)^2}{2}+\left(c+ab\right)^2$

Cũng theo bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\frac{\left(a+b\right)^2\left(c+1\right)^2}{2}+\left(c+ab\right)^2\ge 2\frac{\left(a+b\right)\left(c+1\right)\left(c+ab\right)}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\left(a+b\right)\left(c+1\right)\left(c+ab\right)$$

Bài toán quy về chứng minh

$$\sqrt{2}(a+b)(c+1)(c+ab)\ge\sqrt{2}(a+b)(b+c)(c+a)$$
$$\Leftrightarrow(c+1)(c+ab)\ge(b+c)(c+a)\Leftrightarrow c+abc=bc+ca$$
$$\Leftrightarrow c(a-1)(b-1)\ge 0$$

Theo nguyên lí Dirrichlet thì trong ba số a, b, c luôn tìm được hai số cùng phía với 1. Vì vai trò của a, b, c như nhau nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử hai số đó là a và b. Khi đó bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 163. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^3-2x^2+x}{\sqrt{x}(y+z)}+\frac{y^3-2y^2+y}{\sqrt{y}(z+x)}+\frac{z^3-2z^2+z}{\sqrt{z}(x+y)}\le\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Trích đề thi chọn học sinh dự thi HSGQG Tỉnh Kiên Giang năm học 2015-2016

Lời giải

Áp dụng giả thiết $x+y+z=1$ ta được

$$\frac{x^3-2x^2+x}{\sqrt{x}(y+z)}=\frac{x(1-x)^2}{\sqrt{x}(1-x)}=\sqrt{x}(1-x)=\sqrt{x}-x\sqrt{x}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{x^3-2x^2+x}{\sqrt{x}(y+z)}+\frac{y^3-2y^2+y}{\sqrt{y}(z+x)}+\frac{z^3-2z^2+z}{\sqrt{z}(x+y)}$$
$$=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\left(x\sqrt{x}+x\sqrt{y}+x\sqrt{z}\right)$$

Ta cần chứng minh $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\left(x\sqrt{x}+x\sqrt{y}+x\sqrt{z}\right)\le\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Từ $x+y+z=1\Rightarrow\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\le\sqrt{3}$. Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có

$$\sqrt{3}\left(x\sqrt{x}+y\sqrt{y}+z\sqrt{z}\right)\ge\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\left(x\sqrt{x}+y\sqrt{y}+z\sqrt{z}\right)\ge(x+y+z)^2$$

Do đó ta được $x\sqrt{x}+y\sqrt{y}+z\sqrt{z}\ge\frac{1}{\sqrt{3}}$. Tư đó ta có

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\left(x\sqrt{x}+x\sqrt{y}+x\sqrt{z}\right)\le\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Bài 164. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\le a+b+c$$

Trích đề thi chọn học sinh dự thi HSGQG Tỉnh Thừa Thiên Huế năm học 2015-2016

Lời giải

Sử dụng kỹ thuật thêm bớt ta có bất đẳng thức tương đương với

$$2(a+b+c)\ge 2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$$
$$\Leftrightarrow\left(a^4+b^4+c^4\right)+2(a+b+c)\ge\left(a^4+b^4+c^4\right)+2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$$
$$\Leftrightarrow\left(a^4+b^4+c^4\right)+2(a+b+c)\ge\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\ge 9$$

Vậy ta cần chứng minh $a^4+b^4+c^4+2(a+b+c)\ge 9$

Hay là $\left(a^4+a+a\right)+\left(b^4+b+b\right)+\left(c^4+c+c\right)\ge 9$.

Điều này hiển nhiên đúng vì theo bất đẳng thức AM - GM bộ ba số ta có

$$a^4+a+a\ge 3\sqrt[3]{a^4.a.a}=3a^2$$
$$b^4+b+b\ge 3\sqrt[3]{b^4.b.b}=3b^2$$
$$c^4+c+c\ge 3\sqrt[3]{c^4.c.c}=3c^2$$

Bài toán được giải quyết. Bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài 165. Cho a, b, c là các số thực dương thả mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$a^4+b^4+c^4+a+b+c+\frac{2a}{b^2+c^2}+\frac{2b}{a^2+c^2}+\frac{2c}{a^2+b^2}\ge 9$$

Trích đề thi chọn học sinh dự thi HSGQG Tỉnh Thái Nguyên năm học 2015-2016

Lời giải

Dễ dàng chứng minh được $a^4+b^4\ge ab\left(a^2+b^2\right)=\dfrac{a^2+b^2}{c}$

Áp dụng hoàn toàn tương tự ta được

$$2\left(a^4+b^4+c^4\right)\ge\frac{a^2+b^2}{c}+\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}$$

Bài toán quy về chứng minh

$$\frac{a^2+b^2}{c}+\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}+2\left(a+b+c\right)+\frac{4a}{b^2+c^2}+\frac{4b}{a^2+c^2}+\frac{4c}{a^2+b^2}\ge 18$$

Áp dụng bất đẳng thức Caychy ta được

$$\frac{a^2+b^2}{c}+\frac{4c}{a^2+b^2}\ge 4;\ \frac{b^2+c^2}{a}+\frac{4a}{b^2+c^2}\ge 4;\ \frac{c^2+a^2}{b}+\frac{4b}{c^2+a^2}\ge 4$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^2+b^2}{c}+\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}+\frac{4a}{b^2+c^2}+\frac{4b}{a^2+c^2}+\frac{4c}{a^2+b^2}\ge 12$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $a+b+c\ge 3$, đánh giá cuối cùng đúng theo bất đẳng thức AM - GM. Vậy bài toán được chứng minh xong