EBOOK

CHINH PHỤC
OLYMPIC TOÁN

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN

TÍCH PHÂN

TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC

CHINH PHỤC OLYMPIC TOÁN

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN TÍCH PHÂN

EBOOK

TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC

LỜI GIỚI THIỆU

Đây là cuốn sách fanpage Tạp Chí Và Tư Liệu Toán Học xuất bản 2 năm về trước, tuy nhiên nay fanpage chia sẻ ebook này lại cho mọi người nên cũng không có lời giới thiệu gì nhiều cả, chỉ mong mọi người trân trọng món quà này và vấn đề bản quyền, như vậy chúng tôi đã cảm thấy rất vui rồi. Trong cuốn ebook này có nhiều phần không phù hợp với kỳ thi và chúng tôi đã chú thích, các bạn nên tránh sa đà vào những vấn đề như thế mà chỉ nên tập trung vào các kỹ thuật tính toán tích phân (nếu không học cẩn thận các phần này thì các bạn coi chừng lên đại học sẽ vật vã với môn giải tích đấy nhé ^^)

Tất nhiên là cuốn sách không thể tránh khỏi những sai sót, do vậy mọi ý kiến đóng góp gửi về: https://www.facebook.com/OlympiadMathematical.

Cảm ơn bạn đọc đã theo dõi fanpage!

MỤC LỤC

GIỚI THIỆU ĐÔI NÉT VỀ LỊCH SỬ

Các ý tưởng giúp hình thành môn vi tích phân phát triển qua một thời gian dài. Các nhà toán học Hi Lạp là những người đã đi những bước tiên phong. Leucippus, Democritus và Antiphon đã có những đóng góp vào phương pháp "vét cạn" của Hi Lạp, và sau này được Euxodus, sống khoảng 370 trước Công Nguyên, nâng lên thành lí luận khoa học. Sở dĩ gọi là phương pháp "vét cạn" vì ta xem diện tích của một hình được tính bằng vô số hình, càng lúc càng lấp đầy hình đó. Tuy nhiên, chỉ có Archimedes (287-212 B.C), mới là người Hi Lạp kiệt xuất nhất. Thành tựu to lớn đầu tiên của ông là tính được diện tích giới hạn bởi tam giác cong parabol bằng $\frac{4}{3}$ diện tích của tam giác có cùng đáy và đỉnh và bằng $\frac{2}{3}$ diện tích của hình bình hành ngoại tiếp. Để tìm ra kết quả này, Archimedes dựng một dãy vô tận các tam giác, bắt đầu với tam giác có diện tích bằng A và tiếp tục ghép thêm các tam giác mới nằm xen giữa các tam giác đã có với đường parabol. Hình parabol dần dần được lấp đầy bởi các tam giác có tổng diện tích là:

$$A, A+\frac{A}{4}, A+\frac{A}{4}+\frac{A}{16}, A+\frac{A}{4}+\frac{A}{16}+\frac{A}{64}....$$

Diện tích giới hạn bởi parabol là

$$A\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+...\right)=\frac{4A}{3}$$

Archimedes cũng dùng phương pháp "vét cạn" để tính diện tích hình tròn. Đây là mô hình đầu tiên của phép tính tích phân, nhờ đó ông đã tìm được giá trị gần đúng của số pi ở khoảng giữa hai phân số 310/71 và 31/7. Trong tất cả những khám phá của mình, Archimedes tâm đắc nhất là công thức tính thể tích hình cầu. "*Thể tích hình cầu thì bằng 2/3 thể tích hình trụ ngoại tiếp*". Thể theo nguyện vọng lúc sinh thời, sau khi ông mất, người ta cho dựng một mộ bia có khắc hoa văn một hình cầu nội tiếp một hình trụ. Ngoài toán học, Archimedes còn có những phát minh về cơ học, thủy động học. Tất cả học sinh đều quen thuộc với định luật mang tên ông về sức đẩy một vật thể khi nhúng vào một chất lỏng cùng với câu thốt bất hủ "*Eureka! Eureka!*" (Tìm ra rồi! Tìm ra rồi!) khi ông đang tắm. Ông tìm ra các định luật về đòn bẩy cùng câu nói nổi tiếng "*Hãy cho tôi một điểm tựa, tôi sẽ nhấc bổng quả đất*").

Dù ông có vẻ thích toán học hơn vật lí, nhưng Archimedes vẫn là một kỹ sư thiên tài. Trong những năm quân xâm lược La Mã hùng mạnh tấn công đất nước Syracuse quê hương ông, nhờ có những khí tài do ông sáng chế như máy bắn đá, cần trục kéo lật tàu địch, gương parabol đốt cháy chiến thuyền, đã giúp dân thành Syracuse cầm chân quân địch hơn 3 năm. Cuối cùng quân La Mã cũng tràn được vào thành. Dù có lệnh tướng La Mã là Marcus không được giết chết ông, một tên lính La Mã thô bạo xông vào phòng làm việc khi ông đang mê mải suy nghĩ cạnh một sa bàn một bài toán hình dang dở. Khi thấy bóng của nó đổ lên hình vẽ, ông quát lên: " Đừng quấy rầy đến các đường tròn của ta !". Thế là tên lính nỗi cáu, đâm chết ông. Sau khi ông mất, nền toán học hầu như rơi vào trong bóng tối cho đến thế kỹ thứ 17. Lúc này do nhu cầu kỹ thuật, phép tính vi tích phân trở lại để giải quyết những bài toán về sự biến thiên các đại lượng vật lý. Phép tính vi tích phân được phát triển nhờ tìm ra cách giải quyết được bốn bài toán lớn của thời đại:

1. Tìm tiếp tuyến của một đường cong.
2. Tìm độ dài của một đường cong.
3. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của một đại lượng ; ví dụ tìm khoảng cách gần nhất và xa nhất giữa một hành tinh và mặt trời, hoặc khoảng cách tối đa mà một đạn đạo có thể bay tới theo góc bắn đi của nó.
4. Tìm vận tốc và gia tốc của một vật thể theo thời gian biết phương trình giờ của vật thể ấy.

Vào khoảng giữa thế kỷ 17, những anh tài của thời đại, như Fermat, Roberval, Descartes, Cavalieri lao vào giải các bài toán này. Tất cả cố gắng của họ đã đạt đến đỉnh cao khi Leibniz và Newton hoàn thiện phép tính vi tích phân. Leibniz (1646-1716) Ông là một nhà bác học thiên tài, xuất sắc trên nhiều lãnh vực: một nhà luật học, thần học, triết gia, nhà chính trị. Ông cũng giỏi về địa chất học, siêu hình học, lịch sử và đặc biệt toán học. Leibniz sinh ở Leipzig, Đức. Cha là một giáo sư triết học tại Đại học Leipzig, mất khi ông vừa sáu tuổi. Cậu bé suốt ngày vùi đầu ở thư viện của cha, ngấu nghiến tất cả các quyển sách về đủ mọi vấn đề. Và thói quen này đã theo cậu suốt đời. Ngay khi mới 15 tuổi, ông đã được nhận vào học luật tại Đại học Leipzig, và 20 tuổi đã đậu tiến sĩ luật. Sau đó, ông hoạt động trong ngành luật và ngoại giao, làm cố vấn luật pháp cho các ông vua bà chúa. Trong những chuyến đi công cán ở Paris, Leibnz có dịp gặp gỡ nhiều nhà toán học nổi tiếng, đã giúp niềm say mê toán học của ông thêm gia tăng. Đặc biệt, nhà vật lí học lừng danh Huygens đã dạy ông toán học. Vì không phải là dân toán học chuyên nghiệp, nên có nhiều khi ông khám phá lại những định lí toán học đã được các nhà toán học khác biết trước. Trong đó có sự kiện được hai phe Anh Đức tranh cãi trong suốt 50 năm. Anh thì cho chính Newton là cha đẻ của phép tính vi tích phân trong khi Đức thì nói vinh dự đó phải thuộc về Leibniz. Trong khi hai đương sự thì không có ý kiến gì. Đúng ra là hai người đã tìm được chân lý trên một cách độc lập: Leibniz tìm ra năm 1685, mười năm sau Newton, nhưng cho in ra công trình của mình trước Newton hai mươi năm. Leibniz sống độc thân suốt đời và mặc dù có những đóng góp kiệt xuất, ông không nhận được những vinh quang như Newton. Ông trải qua những năm cuối đời trong cô độc và nổi cay đắng. Newton(1642-1727) - Newton sinh ra tại một ngôi làng Anh Quốc. Cha ông mất trước khi ông ra đời, một tay mẹ nuôi nằng và dạy dỗ trên nông trại nhà. Năm 1661, ông vào học tại trường đại học Trinity ở Cambridge mặc dù điểm hình học hơi yếu. Tại đây ông được Barrow, nhà toán học tài năng chú ý. Ông lao vào học toán và khoa học, nhưng tốt nghiệp loại bình thường. Vì bệnh dịch hoành hành khắp châu Âu và lan truyền nhanh chóng đến London, ông phải trở lại làng quê và trú ngụ tại đó trong hai năm 1665, 1666. Chính trong thời gian này, ông đã xây dựng những nền tảng của khoa học hiện đại: khám phá nguyên tắc chuyển động các hành tinh, của trọng lực, phát hiện bản chất của ánh sáng. Tuy thế ông không phổ biến các khám phá của mình. Ông trở lại Cambridge năm 1667 để lấy bằng cao học. Sau khi tốt nghiệp, ông dạy học tại Trinity. Năm 1669, ông giữ chức giáo sư trưởng khoa toán, kế nhiệm giáo sư Barrow, một chức danh vinh dự nhất trong giáo dục. Trong những năm sau đó, ông đã công thức hoá các định luật hấp dẫn, nhờ đó giải thích được sự chuyển động của các hành tinh, mặt trăng và thủy triều. Ông cũng chế tạo ra kính viễn vọng hiện đại đầu tiên. Trong đời ông, ông ít khi chịu cho in các khám phá vĩ đại của mình, chỉ phổ biến trong phạm vi bạn bè đồng nghiệp. Năm 1687, trước sự khuyến khích nhiệt tình của nhà thiên văn học Halley, Newton mới chịu cho xuất bản cuốn Những nguyên tắc toán học. Tác phẩm này ngay lập tức được đánh giá là một trong những tác phẫm có ảnh hưởng lớn lao nhất của nhân loại. Cũng tương tự như thế, chỉ sau khi biết Leibniz đã in công trình của minh, ông mới công bố tác phẩm của mình về phép tính vi tich phân. Vĩ đại như thế, nhưng khi nói về minh ông luôn cho rằng sở dĩ ông có đôi khi nhìn xa hơn kẻ khác vì ông đứng trên vai của các vĩ nhân. Và với những khám phá lớn lao của mình, ông nói: "*Tôi thấy mình như một đứa trẻ chơi đùa trên bãi biển, may mắn gặp được những viên sỏi tròn trịa, hoặc một vỏ sò đẹp hơn bình thường, trong khi trước mặt là một đại dương bao la của chân lí mà tôi chưa được biêt*".

CHƯƠNG 1 NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN HÀM HỮU TỶ

Nguyên hàm phân thức hữu tỷ là một bài toán khá cơ bản, nhưng cũng được phát triển ra rất nhiều bài toán khó, hầu như các bài toán nguyên hàm – tích phân khó sau khi biến đổi ta sẽ đưa chúng được về dạng nguyên hàm – tích phân hàm hữu tỷ. Trong mục này ta sẽ tìm hiểu cách giải quyết dạng toán này.

Tổng quát. Với hàm hữu tỉ, nếu bậc của tử lớn hơn hoặc bằng bậc của mẫu thì phải chia tách phần đa thức để còn lại hàm hữu tỉ với bậc tử bé hơn mẫu. Nếu bậc của tử bé hơn bậc của mẫu thì phân tích mẫu ra các thừa số bậc nhất $(x+a)$ hay (x^2+px+q) bậc hai vô nghiệm rồi đồng nhất hệ số theo phần tử đơn giản: $\frac{A}{x+a};\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$ (Đồng nhất hệ số ở tử thức thì tính được các hằng số A, B, C, … Kết hợp với các biến đổi sai phân, thêm bớt đặc biệt để phân tích nhanh)

CÁC DẠNG TOÁN

CÁC DẠNG TÍCH PHÂN ĐA THỨC HỮU TỶ.

- $\int_a^b |P(x)|dx$: Chia miền xét dấu $P(x)$,
- $\int_a^b x(mx+n)^\alpha dx$: Đặt $u=mx+n$ hoặc phân tích,
- $\int_a^b (mx+n)(px^2+qx+r)^\alpha dx$: Đặt $u=px^2+qx+r$,
- $\int_a^b (x+m)^\alpha.(x+m)^\beta dx$: Nếu $\alpha<\beta$ thì đặt $u=x+n$.

CÁC DẠNG TÍCH PHÂN HÀM PHÂN THỨC

1. Dạng $\int_a^b \frac{1}{px^2+qx+r}dx$. Lập $\Delta=q^2-4pr$.

- Nếu $\Delta=0\Rightarrow\int_a^b\frac{dx}{(mx+n)^2}$, dùng công thức của hàm đa thức.

- Nếu $\Delta < 0 \Rightarrow \int_a^b \frac{dx}{x^2+k^2}$, đặt $x = k\tan t$
- Nếu $\Delta > 0 \Rightarrow \int_a^b \frac{dx}{x^2-k^2}$, biến đổi $\frac{1}{x^2-k^2} = \frac{1}{2k}\left(\frac{1}{x-k} - \frac{1}{x+k}\right)$

2. Dạng $\int_a^b \frac{mx+n}{px^2+qx+r}dx$. Lập $\Delta = q^2 - 4pr$

- Nếu $\Delta \geq 0 \Rightarrow$ Phân tích và dùng công thức.
- Nếu $\Delta < 0 \Rightarrow \frac{mx+n}{px^2+qx+r} = \frac{A\left(px^2+qx+r\right)'}{px^2+qx+r} + \frac{B}{(x+\alpha)^2+k^2}$

3. Dạng $\int_a^b \frac{dx}{x\left(1+x^n\right)^m} = \int_a^b \frac{x^{n-1}dx}{x^n\left(1+x^n\right)^m}$, đặt $t = 1 + x^n$.

Chú ý. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-a;a]$.

- Nếu $f(x)$ lẻ thì $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.
- Nếu $f(x)$ chẵn thì $\int_a^a f(x) = 2\int_0^a f(x)dx$.

CÁC CÔNG THỨC NÊN NHỚ.

- $\int \frac{1}{(x-a)(x-b)}dx = \frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right| + C$
- $\frac{mx+n}{(ax+b)^2} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{(ax+b)^2}$
- $\frac{mx+n}{(ax+b)^2(cx+d)} = \frac{A}{(ax+b)^2} + \frac{B}{cx+d} + \frac{C}{ax+b}$.
- $\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$
- $\int \frac{1}{(ax+b)^2+c^2}dx = \frac{\arctan\left(\frac{ax+b}{c}\right)}{ac} + C$

CÔNG THỨC TÁCH NHANH PHÂN THỨC HỮU TỶ

- $$\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} \Rightarrow \begin{cases} A = \left.\frac{P(x)}{(x-b)(x-c)}\right|_{x=a} \\ B = \left.\frac{P(x)}{(x-a)(x-c)}\right|_{x=b} \\ C = \left.\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)}\right|_{x=c} \end{cases}$$

- $$\frac{P(x)}{(x-m)(ax^2+bx+c)}=\frac{A}{x-m}+\frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}\Rightarrow\begin{cases}A=\left.\dfrac{P(x)}{ax^2+bx+c}\right|_{x=m}\\ Bx+C=\left.\dfrac{P(x)-A(ax^2+bx+c)}{x-m}\right|_{x=1000}\end{cases}$$

Sau đây ta sẽ cùng đi vào các ví dụ minh họa cụ thể cho dạng toán này!

Câu 1.

Tính các tích phân sau : a) $I=\int_1^2\frac{x^3}{2x+3}dx$ b) $I=\int_{\sqrt5}^3\frac{x^2-5}{x+1}dx$ c) $\int_0^{\frac12}\frac{x^3}{x^2-1}dx$

Lời giải

a) Ta có: $\frac{x^3}{2x+3}=\frac12.\frac{(2x^3+3x^2)-\frac32(2x^2+3x)+\frac94(2x+3)-\frac{27}{4}}{2x+3}=\frac{x^2}{2}-\frac34x+\frac98-\frac{27}{8(2x+3)}$.

$$\Rightarrow\int_1^2\frac{x^3}{2x+3}dx=\int_1^2\left(\frac{x^2}{2}-\frac34x+\frac98-\frac{27}{8(2x+3)}\right)dx$$

$$=\left.\left(\frac13x^3-\frac38x^2+\frac98x-\frac{27}{16}\ln|2x+3|\right)\right|_1^2=-\frac{13}{6}-\frac{27}{16}\ln35$$

b) Ta có: $\frac{x^2-5}{x+1}=\frac{x^2-1-4}{x+1}=x-1-\frac{4}{x+1}$.

$$\Rightarrow\int_{\sqrt5}^3\frac{x^2-5}{x+1}dx=\int_{\sqrt5}^3\left(x-1-\frac{4}{x+1}\right)dx=\left.\left(\frac12x^2-x-4\ln|x+1|\right)\right|_{\sqrt5}^3=\sqrt5-1+4\ln\left(\frac{\sqrt5+1}{4}\right).$$

c) Ta có: $\frac{x^3}{x^2-1}=\frac{x(x^2-1)+x}{x^2-1}=x+\frac{x}{x^2-1}$.

$$\Rightarrow\int_0^{\frac12}\frac{x^3}{x^2-1}dx=\int_0^{\frac12}\left(x+\frac{x}{x^2-1}\right)dx=\int_1^{\frac12}xdx+\int_0^{\frac12}\frac{xdx}{x^2-1}=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\frac12}+\frac12\ln|x^2-1|\Big|_0^{\frac12}=\frac18+\frac12\ln\frac34.$$

Câu 2.

Tính tích phân: $I=\int_0^1\frac{4x+11}{x^2+5x+6}dx$.

Lời giải

Cách 1. *Phương pháp đồng nhất thức*

Ta có $f(x)=\frac{4x+1}{x^2+5x+6}=\frac{4x+11}{(x+2)(x+3)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+3}=\frac{A(x+3)+B(x+2)}{(x+2)(x+3)}$

Thay $x=-2$ vào hai tử số: $3=A$ và thay $x=-3$ vào hai tử số: $-1=-B$ suy ra $B=1$

Do đó: $f(x)=\frac{3}{x+2}+\frac{1}{x+3}$

Vậy $\int\limits_0^1 \frac{4x+11}{x^2+5x+6}dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{3}{x+2}+\frac{1}{x+3}\right)dx = 3\ln|x+2|+\ln|x+3|\Big|_0^1 = 2\ln 3-\ln 2$

Cách 2. *Nhảy tầng lầu*

Ta có: $f(x)=\frac{2(2x+5)+1}{x^2+5x+6}=2.\frac{2x+5}{x^2+5x+6}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}=2.\frac{2x+5}{x^2+5x+6}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}$

$$\Rightarrow I=\int\limits_0^1 f(x)dx=\int\limits_0^1\left(2.\frac{2x+5}{x^2+5x+6}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)dx$$

$$=\left(2\ln\left|x^2+5x+6\right|+\ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right|\right)\Bigg|_0^1=2\ln 3-\ln 2$$

Câu 3.

Tính các tích phân sau a) $I=\int\limits_0^3 \frac{x^3}{x^2+2x+1}dx$ b) $I=\int\limits_0^1 \frac{4x}{4x^2-4x+1}dx$

Lời giải

a)

Cách 1. Thực hiện cách chia đa thức x^3 cho đa thức x^2+2x+1 đã học ở chương trình lớp 8

Ta được $\frac{x^3}{x^2+2x+1}=x-2+\frac{3x+2}{x^2+2x+1}$

$$\Rightarrow I=\int\limits_0^3 \frac{x^3}{x^2+2x+1}dx=\int\limits_0^3 (x-2)dx+\int\limits_0^3 \frac{3x+3-1}{x^2+2x+1}dx$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\Bigg|_0^3+\frac{3}{2}\int\limits_0^3 \frac{d\left(x^2+2x+1\right)}{x^2+2x+1}-\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x+1)^2}$$

$$=-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\ln(x+1)^2\Big|_0^3+\frac{1}{x+1}\Bigg|_0^3=-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\ln 16+\frac{1}{4}-1=-\frac{9}{4}+6\ln 2.$$

Cách 2. Ta có $\int\limits_0^3 \frac{x^3}{x^2+2x+1}dx=\int\limits_0^3 \frac{x^3}{(x+1)^2}dx$

Đặt $t=x+1\Rightarrow dx=dt; x=t-1$. Đổi cận $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=1 \\ x=3\Rightarrow t=4 \end{cases}$

$$\Rightarrow \int\limits_0^3 \frac{x^3}{(x+1)^2}dx=\int\limits_1^4 \frac{(t-1)^3}{t^2}dt=\int\limits_1^4\left(t-3+\frac{3}{t}-\frac{1}{t^2}\right)dt=\left(\frac{1}{2}t^2-3t+3\ln|t|+\frac{1}{t}\right)\Bigg|_1^4=-\frac{9}{4}+6\ln 2$$

b) Ta có $\frac{4x}{4x^2-4x+1}=\frac{4x}{(2x-1)^2}$

Đặt $t=2x-1\Rightarrow dt=2dx\to dx=\frac{1}{2}dt$. Đổi cận $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=-1 \\ x=1\Rightarrow t=1 \end{cases}$

Do đó $\int\limits_0^1 \frac{4x}{4x^2-4x+1}dx=\int\limits_0^1 \frac{4x}{(2x-1)^2}dx=\int\limits_{-1}^1 \frac{4.\frac{1}{2}(t+1)}{t^2}\frac{1}{2}dt=\int\limits_{-1}^1\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)dt=\left(\ln|t|-\frac{1}{t}\right)\Bigg|_{-1}^1=-2$

Câu 4.

Tính các tích phân sau a) $I=\int_0^2 \frac{x}{x^2+4x+5}dx$ b) $I=\int_0^2 \frac{x^3+2x^2+4x+9}{x^2+4}dx$

Lời giải

a) Ta có $\int_0^2 \frac{x}{x^2+4x+5}dx=\int_0^2 \frac{x}{(x+2)^2+1}dx$

Đặt $x+2=\tan t$, suy ra $dx=\frac{1}{\cos^2 t}dt$. Đổi cận $\begin{cases} x=0\Rightarrow \tan t=2 \\ x=2\Rightarrow \tan t=4 \end{cases}$

Do đó $\int_0^2 \frac{x}{(x+2)^2+1}dx=\int_{t_1}^{t_2} \frac{\tan t-2}{1+\tan^2 t}\frac{dt}{\cos^2 t}=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\sin t}{\cos t}-2\right)dt=\left(-\ln|\cos t|-2t\right)\Big|_{t_1}^{t_2}$ (1)

Ta có $\left[\begin{array}{l} \tan t=2\Rightarrow 1+\tan^2 t=5\Leftrightarrow \cos^2 t=\frac{1}{5}\Rightarrow \cos t_1=\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \tan t=4\Rightarrow 1+\tan^2 t=17\Leftrightarrow \cos^2 t=\frac{1}{17}\Rightarrow \cos t_2=\frac{1}{\sqrt{17}} \end{array}\right.$

$$\Rightarrow\left(-\ln|\cos t|-2t\right)\Big|_{t_1}^{t_2}=-\left[\left(\ln|\cos t_2|\right)-2t_2\right]-\left(\ln|\cos t_1|-2t_1\right)=-\ln\left|\frac{\cos t_2}{\cos t_1}\right|+2(t_2-t_1)$$

$$=2(\arctan 4-\arctan 2)-\ln\left|\frac{1}{\sqrt{17}}.\sqrt{5}\right|=2(\arctan 4-\arctan 2)-\frac{1}{2}\ln\frac{5}{17}$$

b) Ta có $\frac{x^3+2x^2+4x+9}{x^2+4}=\frac{x^3+4x+2x^2+8+1}{x^2+4}=x+2+\frac{1}{x^2+4}$

Do đó: $\int_0^2 \frac{x^3+2x^2+4x+9}{x^2+4}dx=\int_0^2\left(x+2+\frac{1}{x^2+4}\right)dx=\left(\frac{1}{2}x^2+2x\right)\Big|_0^2+\int_0^2\frac{dx}{x^2+4}=6+J$ (1)

- Tính tích phân $J=\int_0^2 \frac{1}{x^2+4}dx$

Đặt $x=2\tan t$ suy ra: $dx=\frac{2}{\cos^2 t}dt$. Đổi cận $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=0 \\ x=2\Rightarrow t=\frac{\pi}{4} \end{cases}$. Ta có $t\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]\to \cos t>0$

Khi đó $J=\int_0^2\frac{1}{x^2+4}dx=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2 t}\frac{2}{\cos^2 t}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt=\frac{1}{2}t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}$. Từ $(1)\Rightarrow I=6+\frac{\pi}{8}$.

Câu 5.

Tính các tích phân sau a) $I=\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^3}dx$ b) $I=\int_{-1}^0 \frac{x^4}{(x-1)^3}dx$

Lời giải

a) ***Cách 1.*** Đặt $x+1=t$, suy ra $x=t-1$. Đổi cận $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=1 \\ x=1\Rightarrow t=2 \end{cases}$.

Do đó $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^3}dx = \int_1^2 \frac{t-1}{t^3}dt = \int_1^2\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^3}\right)dt = \left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\frac{1}{t^2}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{8}$

Cách 2. Ta có $\frac{x}{(x+1)^3} = \frac{(x+1)-1}{(x+1)^3} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3}$

Do đó $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^3}dx = \int_0^1\left[\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^3}\right]dx = \left[-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2}\right]\Big|_0^1 = \frac{1}{8}$

b) Đặt $x-1=t$, suy ra $x=t+1$. Đổi cận $\begin{cases} x=-1 \Rightarrow t=-2 \\ x=0 \Rightarrow t=-1 \end{cases}$

Do đó $\int_{-1}^0 \frac{x^4}{(x-1)^3}dx = \int_{-2}^{-1}\frac{(t+1)^4}{t^3}dt = \int_{-2}^{-1}\frac{t^4+4t^3+6t^2+4t+1}{t^3}dt = \int_{-2}^{-1}\left(t+4+\frac{6}{t}+\frac{4}{t^2}+\frac{1}{t^3}\right)dt$

$$= \left(\frac{1}{2}t^2+4t+6\ln|t|-\frac{4}{t}-\frac{1}{2}\frac{1}{t^2}\right)\Big|_{-2}^{-1} = \frac{33}{8}-6\ln 2$$

Câu 6.

Tính tích phân $\int_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{3}} \frac{-4x^4+x^2-3}{x^4+1}dx = \frac{\sqrt{2}}{8}\left(a\sqrt{3}+b+c\pi\right)+4$. Với a, b, c là các số nguyên. Khi đó biểu thức $a+b^2+c^4$ có giá trị bằng ?

Lời giải

Ta có $\int_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \frac{-4x^4+x^2-3}{x^4+1}dx = \int_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}\left(-4+\frac{x^2+1}{x^4+1}\right)dx = -4\int_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}dx + \int_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx = I+J$.

- Tính $I = -4\int_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}dx = -4x\Big|_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} = -2\sqrt{6}-2\sqrt{2}+4$.
- Tính $J = \int_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \int_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx = \int_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}dx.$

Đặt $t = x-\frac{1}{x} \Rightarrow dt = \left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$. Khi $\begin{cases} x=1 \Rightarrow t=0 \\ x=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t=\sqrt{2} \end{cases}$.

Khi đó $J = \int_0^{\sqrt{2}}\frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}$. Đặt $t=\sqrt{2}\tan u \Rightarrow dt = \sqrt{2}\left(1+\tan^2 u\right)du$.

Đổi cận $\begin{cases} t=0 \Rightarrow u=0 \\ t=\sqrt{2} \Rightarrow u=\frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow J = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\left(1+\tan^2 u\right)}{2\left(1+\tan^2 u\right)}du = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}du = \frac{\sqrt{2}}{2}u\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{8}\pi$.

Vậy $\int\limits_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \frac{-4x^4+x^2-3}{x^4+1}dx = \frac{\sqrt{2}}{8}\left(-16\sqrt{3}-16+\pi\right)+4 \Rightarrow \begin{cases} a=b=-16 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow a+b^2+c^4=241$.

Câu 7.

Tính các tích phân sau a) $I=\int\limits_2^3 \frac{1}{(x-1)(x+1)^3}dx$ b) $I=\int\limits_2^3 \frac{x^2}{(x-1)^2(x+2)}dx$

Lời giải

a) ***Cách 1.*** *Phương pháp đồng nhất thức*

Ta có $\frac{1}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x+1)}+\frac{C}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2+B(x-1)(x+1)+C(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}$ (1)

Thay hai nghiệm mẫu số vào hai tử số $\begin{cases} 1=4A \\ 1=-2C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{4} \\ C=-\frac{1}{2} \end{cases}$.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(A+B)x^2+(2A+C)x+A-B-C}{(x-1)(x+1)^2} \Rightarrow A-B-C=1 \Leftrightarrow B=A-C-1=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{4}$$

Do đó $\int\limits_2^3 \frac{1}{(x-1)(x+1)^2}dx = \int\limits_2^3\left(\frac{1}{4}.\frac{1}{x-1}+\frac{1}{4}.\frac{1}{(x+1)}-\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$

$$=\left[\frac{1}{4}\ln(x-1)(x+1)+\frac{1}{2}.\frac{1}{(x+1)}\right]\Bigg|_2^3 = \frac{1}{4}\ln 8 = \frac{3}{4}\ln 2.$$

Cách 2. *Phương pháp đổi biến*

Đặt $t=x+1$, suy ra $x=t-1$. Đổi cận $\begin{cases} x=2\Rightarrow t=3 \\ x=3\Rightarrow t=4 \end{cases}$

Khi đó $I=\int\limits_2^3 \frac{1}{(x-1)(x+1)^2}dx = \int\limits_3^4 \frac{dt}{t^2(t-2)} = \frac{1}{2}\int\limits_3^4 \frac{t-(t-2)}{t^2(t-2)}dt = \frac{1}{2}\left(\int\limits_2^4 \frac{1}{t(t-2)}dt - \int\limits_3^4 \frac{1}{t}dt\right)$

$$\Leftrightarrow I=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\int\limits_2^4\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t}\right)dt - \int\limits_3^4\frac{1}{t}dt\right) = \left(\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t}\right|-\frac{1}{2}\ln|t|\right)\Bigg|_3^4 = \frac{3}{4}\ln 2.$$

b) Đặt $t=x-1$, suy ra $x=t+1$, $dx=dt$. Đổi cận $\begin{cases} x=2\Rightarrow t=1 \\ x=3\Rightarrow t=2 \end{cases}$.

Do đó $\int\limits_2^3 \frac{x^2}{(x-1)^2(x+2)}dx = \int\limits_1^2 \frac{(t+1)^2}{t^2(t+3)}dt = \int\limits_1^2 \frac{t^2+2t+1}{t^2(t+3)}dt$

Cách 1. *Phương pháp đồng nhất thức*

Ta có $\frac{t^2+2t+1}{t^2(t+3)} = \frac{At+B}{t^2}+\frac{C}{t+3} = \frac{(At+B)(t+3)+Ct^2}{t^2(t+3)} = \frac{(A+C)t^2+(3A+B)t+3B}{t^2(t+3)}$

Đồng nhất hệ số hai tử số $\begin{cases} A+C=1 \\ 3A+B=2 \\ 3B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=\frac{1}{3} \\ A=\frac{5}{9} \\ C=\frac{4}{9} \end{cases} \Rightarrow \frac{t^2+2t+1}{t^2(t+3)}=\frac{1}{9}\frac{t+3}{t^2}+\frac{4}{9}\frac{1}{t+3}$

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{t^2+2t+1}{t^2(t+3)}dt=\int_1^2\left(\frac{1}{9}\left(\frac{1}{t}+\frac{3}{t^2}\right)+\frac{4}{9}\left(\frac{1}{t+3}\right)\right)dt$$

$$=\left(\frac{1}{9}\left(\ln|t|-\frac{3}{t}\right)+\frac{4}{9}\ln|t+3|\right)\Bigg|_1^2=\frac{17}{6}+\frac{4}{9}\ln 5-\frac{7}{9}\ln 2$$

Cách 2:

Ta có $\frac{t^2+2t+1}{t^2(t+3)}=\frac{1}{3}\left(\frac{3t^2+6t+3}{t^3+3t^2}\right)=\frac{1}{3}\left[\frac{3t^2+6t}{t^3+3t^2}+\frac{3}{t^2(t+3)}\right]=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{3t^2+6t}{t^3+3t^2}\right)+\frac{1}{9}\left(\frac{t^2-(t^2-9)}{t^2(t+3)}\right)\right]$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{3t^2+6t}{t^3+3t^2}\right)+\frac{1}{9}\frac{1}{t+3}-\frac{1}{9}\frac{t-3}{t^2}=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{3t^2+6t}{t^3+3t^2}\right)+\frac{1}{9}\frac{1}{t+3}-\frac{1}{9}\left(\frac{1}{t}-\frac{3}{t^2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{t^2+2t+1}{t^2(t+3)}dt=\int_1^2\left(\frac{1}{3}\left(\frac{3t^2+6t}{t^3+3t^2}\right)+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{t+3}-\frac{1}{t}+\frac{3}{t^2}\right)\right)dt=\left[\frac{1}{3}\ln\left|t^3+3t^2\right|+\frac{1}{27}\left(\ln\left|\frac{t+3}{t}\right|-\frac{3}{t}\right)\right]_1^2$$

Do đó $I=\frac{17}{6}+\frac{4}{9}\ln 5-\frac{7}{9}\ln 2$.

Câu 8.

Tính các tích phân sau

a) $I=\int_2^3 \frac{1}{x(x^2-1)}dx$ b) $I=\int_3^4 \frac{x+1}{x(x^2-4)}dx$ c) $\int_2^3 \frac{x^2}{(x^2-1)(x+2)}dx$

Lời giải

a) ***Cách 1.*** *Phương pháp đồng nhất thức*

Ta có $f(x)=\frac{1}{x(x^2-1)}=\frac{1}{x(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}=\frac{A(x^2-1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$

Đồng nhất hệ số hai tử số bằng cách thay các nghiệm: $x=0;x=1$ và $x=-1$ vào hai tử ta có

$$\begin{cases} x=0\to 1=-A \\ x=-1\to 1=2C \\ x=1\to 1=2B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=\frac{1}{2} \\ C=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow f(x)=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

Vậy $\int_2^3 \frac{1}{x(x^2-1)}dx=\int_2^3\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)-\frac{1}{x}\right)dx=\left[\frac{1}{2}\left(\ln(x-1)(x+1)\right)-\ln|x|\right]_2^3=\frac{5}{2}\ln 2-\frac{3}{2}\ln 3$

Cách 2. *Phương pháp nhảy lầu*

Ta có $\dfrac{1}{x\left(x^2-1\right)}=\dfrac{x^2-\left(x^2-1\right)}{x\left(x^2-1\right)}=\dfrac{x}{x^2-1}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{x^2-1}-\dfrac{1}{x}$

Do đó $\int_2^3\dfrac{1}{x\left(x^2-1\right)}dx=\dfrac{1}{2}\int_2^3\dfrac{2xdx}{x^2-1}-\int_2^3\dfrac{1}{x}dx=\left(\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2-1\right)-\ln x\right)\Big|_2^3=\dfrac{5}{2}\ln 2-\dfrac{3}{2}\ln 3$.

b) ***Cách 1**. Phương pháp đồng nhất thức*

Ta có $\dfrac{x+1}{x\left(x^2-4\right)}=\dfrac{x+1}{x(x-2)(x+2)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{x+2}=\dfrac{A\left(x^2-4\right)+Bx(x+2)+Cx(x-2)}{x\left(x^2-4\right)}$

Thay các nghiệm của mẫu số vào hai tử số:

- Khi $x=0\Rightarrow A=-\dfrac{1}{4}$
- Khi $x=-2\Rightarrow C=-\dfrac{1}{8}$
- Khi $x=2\Rightarrow B=\dfrac{3}{8}$

Do đó $f(x)=-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{x-2}\right)+\dfrac{3}{8}\left(\dfrac{1}{x+2}\right)$

$$\Rightarrow\int_3^4\frac{x+1}{x\left(x^2-4\right)}dx=-\frac{1}{4}\int_2^3\frac{1}{x}dx-\frac{1}{8}\int_2^3\frac{1}{x-2}dx+\frac{3}{8}\int_2^3\frac{1}{x+2}dx$$

$$=\left(-\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{8}\ln|x-2|+\frac{3}{8}\ln|x+2|\right)\Bigg|_2^3=\frac{5}{8}\ln 3-\frac{3}{8}\ln 5-\frac{1}{4}\ln 2$$

***Cách 2.** Phương pháp nhảy lầu*

Ta có $\dfrac{x+1}{x\left(x^2-4\right)}=\dfrac{1}{\left(x^2-4\right)}+\dfrac{1}{x\left(x^2-4\right)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}\right)+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{x^2-\left(x^2-4\right)}{x\left(x^2-4\right)}\right)$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2-4}-\frac{1}{x}\right)$$

Do đó: $\int_3^4\dfrac{x+1}{x\left(x^2-4\right)}=\dfrac{1}{4}\int_3^4\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{x^2-4}-\dfrac{1}{x}\right)dx=\left[\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|+\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2-4\right)-\ln|x|\right]\Bigg|_3^4$

c) ***Cách 1.** Phương pháp đồng nhất thức*

Ta có $\dfrac{x^2}{\left(x^2-1\right)(x+2)}=\dfrac{x^2}{(x-1)(x+1)(x+2)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{x+2}$

$$=\frac{A(x+1)(x+2)+B(x-1)(x+2)+C\left(x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)(x+2)}$$

Thay lần lượt các nghiệm mẫu số vào hai tử số:

Thay $x=1$ ta có $1=2A$, suy ra $A=\dfrac{1}{2}$

TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC

Thay $x=-1$ ta có $1=-2B$, suy ra $B=-\frac{1}{2}$

Thay $x=-2$ ta có $4=-5C$, suy ra $C=-\frac{5}{4}$

Do đó

$$I=\int_2^3\frac{x^2}{\left(x^2-1\right)\left(x+2\right)}dx=\int_2^3\left(\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}-\frac{5}{4}\frac{1}{x+2}\right)dx=\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{5}{4}\ln\left|x+2\right|\right]\Big|_2^3=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

Cách 2. *Nhảy tầng lầu*

$$\frac{x^2}{\left(x^2-1\right)\left(x+2\right)}=\frac{x^2-1+1}{\left(x^2-1\right)\left(x+2\right)}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x+2\right)}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{2}\frac{x\left(x+1\right)-\left(x-1\right)\left(x+2\right)}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x+2\right)}$$

$$=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{2}\left[\frac{x}{\left(x-1\right)\left(x+2\right)}-\frac{1}{x+1}\right]=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)-\frac{1}{x+1}\right].$$

Từ đó suy ra kết quả.

Câu 9.

Tìm các nguyên hàm, tính các tích phân sau:

1. $\int\frac{x^4-2}{x^3-x}dx$
2. $\int\frac{dx}{x\left(1+x^8\right)}$
3. $\int\frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}dx$
4. $K=\int_0^2\frac{x^4-x+1}{x^2+4}dx$
5. $L=\int_0^1\frac{x^4+x^2+1}{x^6+1}dx$
6. $N=\int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{3}}}\frac{xdx}{x^8-1}$
7. $Q=\int_1^2\frac{8x^7+2}{x\left(1+x^7\right)}dx$
8. $J=\int\frac{x^4+2}{x^6+1}dx$
9. $\int_4^3\frac{x^{10}}{x^3+1}dx$
10. $\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{x^2-1}{x^4+1}dx$

Lời giải

1. Ta có $\frac{x^4-2}{x^3-x}=x+\frac{x^2-2}{x^3-x}=x+\frac{x^2-2}{x\left(x-1\right)\left(x+1\right)}$.

Đặt $\frac{x^2-2}{x\left(x-1\right)\left(x+1\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}\Rightarrow x^2-2=\left(A+B+C\right)x^2+\left(B-C\right)x-A$

Đồng nhất hệ số thì được $A=2,B=-\frac{1}{2},C=-\frac{1}{2}$, do đó:

$$\int f\left(x\right)dx=\int\left(x+\frac{2}{x}-\frac{1}{2}.\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}.\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{1}{2}x^2+2\ln\left|x\right|-\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|+C$$

2. Ta có $\int \frac{dx}{x\left(1+x^8\right)}=\int \frac{x^7dx}{x^8\left(1+x^8\right)}=\frac{1}{8}\int \frac{d\left(x^8\right)}{x^8\left(1+x^8\right)}=\frac{1}{8}\ln\frac{x^8}{1+x^8}+C$

3. Ta có $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}dx=\int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right|+C$

4. Đặt $x=2\tan t, x\in[0;2]\Leftrightarrow t\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

$$\Rightarrow K=\int_0^{\pi/4}\frac{16\tan^4 t-2\tan t+1}{4\left(\tan^2 t+1\right)}.\frac{2dt}{\cos^2 t}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\left(16\tan^4 t-2\tan t+1\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\left(16\tan^2 t\left(1+\tan^2 t\right)-16\tan^2 t-2\tan t+1\right)dt$$

Từ đó tính được $K=-\frac{16}{3}+\frac{17\pi}{8}-\ln\sqrt{2}$

5. Ta có $L=\int_0^1\left(\frac{1}{x^2+1}+\frac{2x^2}{x^6+1}\right)dx=\int_0^1\frac{dx}{x^2+1}+\frac{2}{3}\int_0^1\frac{d\left(x^3\right)}{\left(x^3\right)^2+1}$

Lần lượt đặt $x=\tan t, x^3=\tan u$ thì $L=\frac{5\pi}{12}$

6. Đặt $t=x^2$ thì $xdx=\frac{1}{2}dt$ .Khi $x=0$ thì $t=0, x=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ thì $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow N=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{dt}{t^4-1}=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left(\frac{1}{t^2-1}-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=\left(\frac{1}{8}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-\frac{1}{4}\arctan t\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{1}{8}\ln\left(2-\sqrt{3}\right)-\frac{\pi}{24}$$

7. Ta có $Q=\int_1^2\frac{8x^7+1+1}{x\left(1+x^7\right)}dx=\int_1^2\frac{8x^7+1}{x^8+x}dx+\int_1^2\frac{1}{x\left(1+x^7\right)}dx$

$$=\ln\left(x^8+x\right)\Big|_1^2+\int_1^2\frac{x^6}{x^7\left(1+x^7\right)}dx=\ln 129+\frac{1}{7}\int_1^2\frac{d\left(x^7\right)}{x^7\left(1+x^7\right)}$$

$$=\ln 129+\frac{1}{7}\ln\frac{x^7}{1+x^7}\Bigg|_1^2=\ln 129+\frac{1}{7}\ln\frac{256}{129}$$

8. Ta có $J=\int\left(\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{x^4-x^2+1}\right)dx=C+\arctan x+\int\frac{dx}{x^4-x^2+1}$

Như vậy ta chỉ cần tính $K=\int\frac{dx}{x^4-x^2+1}$

Với trường hợp $x=0$ làm dễ dàng, xét trường hợp $x\neq 0$ ta có

$$K=\int\frac{\frac{dx}{x^2}}{x^2-1+\frac{1}{x^2}}=-\int\frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+1}$$

Đặt $t=\frac{1}{x}\Rightarrow K=\int\frac{t^2dt}{t^4-t^2+1}=\frac{1}{2}\left(\int\left[\frac{1}{t^2+1-\sqrt{3}t}+\frac{1}{t^2+1+\sqrt{3}t}\right]dt-\int\frac{dt}{t^4-t^2+1}\right)$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t^2+1-\sqrt{3}t}+\frac{1}{t^2+1+\sqrt{3}t}\right)dt-\frac{1}{2}K\Rightarrow K=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{t^2+1-\sqrt{3}t}+\frac{1}{t^2+1+\sqrt{3}t}\right)dt$$

Phần còn lại xin nhường lại cho bạn đọc!

9. Biến đổi tích phân cần tính ta được

$$\int_4^3\frac{x^{10}}{x^3+1}dx=\int_4^3\left(x^7-x^4+x-\frac{1}{x^2-x+1}+\frac{1}{x^3+1}\right)dx$$

$$=\int_4^3\left[x^7-x^4+x-\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{1}{x^3+1}\right]dx$$

Tính $I=\int_4^3\frac{1}{x^3+1}dx=\int_4^3\frac{d(x+1)}{(x+1)\left[x^2-x+1\right]}=\int_4^3\frac{d(x+1)}{(x+1)\left[(x+1)^2-3(x+1)+3\right]}$

Đặt $t=x+1\Rightarrow dt=dx\Rightarrow I=\frac{1}{3}\int_5^4\frac{\left(t^2-3t+3\right)-\left(t^2-3t\right)}{t\left(t^2-3t+3\right)}dt=\frac{1}{3}\int_5^4\frac{dt}{t}-\frac{1}{3}\int_5^4\frac{t-3}{t^2-3t+3}dt$

$$=\frac{1}{3}\int_5^4\frac{dt}{t}-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\int_5^4\frac{2t-3}{t^2-3t+3}dt-\frac{3}{2}\int_5^4\frac{dt}{t^2-3t+3}\right]$$

Đến đây xin nhường lại cho bạn đọc!

10. Ta có $I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{x^2-1}{x^4+1}dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx}{x^2+\frac{1}{x^2}}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}$

Đặt $x+\frac{1}{x}=t$ khi đó ta được:

$$I=\int_{\frac{5}{2}}^{2}\frac{dt}{t^2-2}=\int_{\frac{5}{2}}^{2}\frac{dt}{\left(t+\sqrt{2}\right)\left(t-\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{\frac{5}{2}}^{2}\left(\frac{1}{t-\sqrt{2}}-\frac{1}{t+\sqrt{2}}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{\frac{5}{2}}^{2}\frac{d\left(t-\sqrt{2}\right)}{t-\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{\frac{5}{2}}^{2}\frac{d\left(t+\sqrt{2}\right)}{t+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|\Bigg|_{\frac{5}{2}}^{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(\frac{19-6\sqrt{2}}{17}\right)$$

KỸ THUẬT NHẢY TẦNG LẦU

Khi gặp các bài toán nguyên hàm phân thức hữu tỷ thì các bạn thường giải quyết như thế nào? Biến đổi đưa về các dạng cơ bản, đặt ẩn, hay lượng giác hóa…? Trong chủ đề này mình sẽ giới thiệu cho các bạn một kỹ thuật rất hay để giải quyết các bài toán phân thức hữu tỷ mà ta gọi là *kỹ thuật nhảy tầng lầu* – đây là phương pháp tách tích phân hữu tỉ ra thành nhiều tích phân con có khoảng cách giữa bậc tử và mẫu không lớn, hạ bậc mẫu của tích phân ban đầu xuống mức tối giản nhất có thể, từ đó tính toán dễ dàng hơn. Kỹ thuật này được mình trích từ cuốn " TUYỂN TẬP CÁC CHUYÊN ĐỀ & KỸ THUẬT TÍNH TÍCH PHÂN" của thầy Trần Phương và các phương pháp xử lý khác trên mạng.

Sau đây là các ví dụ minh họa trích từ cuốn tích phân của thầy Trần Phương

Câu 1.

Tính các tích phân sau

1. $I=\int\frac{dx}{x^3-3x}$
2. $I=\int\frac{dx}{x^7-10x^3}$
3. $I=\int\frac{dx}{x^4-1}$
4. $I=\int\frac{xdx}{x^4-1}$
5. $I=\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx$
6. $I=\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$
7. $I=\int\frac{dx}{x^4+1}$
8. $I=\int\frac{x^2dx}{x^4+1}$
9. $I=\int\frac{x^4dx}{x^4+1}$
10. $\int\frac{\left(x^2-1\right)dx}{x^4-5x^3-4x^2-5x+1}$
11. $I=\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}$
12. $I=\int\frac{dx}{x^3-1}$
13. $I=\int\frac{dx}{x^3+1}$
14. $I=\int\frac{xdx}{x^3-1}$
15. $I=\int\frac{xdx}{x^3+1}$

Lời giải

1. Ta có $I=\int\frac{dx}{x^3-3x}=\int\frac{dx}{x\left(x^2-3\right)}=\frac{1}{3}\int\frac{x^2-\left(x^2-3\right)}{x\left(x^2-3\right)}dx=\frac{1}{3}\left(\int\frac{xdx}{x^2-3}-\int\frac{dx}{x}\right)$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2-3\right)}{x^2-3}-\int\frac{dx}{x}\right]=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\ln\left|x^2-3\right|-\ln|x|\right)+c=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^2-3}{x^2}\right|+C$$

2. Ta có $I=\int\frac{dx}{x^7-10x^3}=\int\frac{dx}{x^3\left(x^4-10\right)}=\frac{1}{10}\int\frac{x^4-\left(x^4-10\right)}{x^3\left(x^4-10\right)}dx=\frac{1}{10}\left(\int\frac{xdx}{x^4-10}-\int\frac{dx}{x^3}\right)$

$$=\frac{1}{10}\left(\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2\right)}{\left(x^2\right)^2-10}-\int\frac{dx}{x^3}\right)=\frac{1}{20}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{10}}{x^2+\sqrt{10}}\right|+\frac{1}{x^2}\right)+C$$

3. Ta có $I=\int\frac{dx}{x^4-1}=\int\frac{dx}{\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)}=\frac{1}{2}\int\frac{\left(x^2+1\right)-\left(x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)}dx=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\arctan x+C$

4. Ta có $I=\int \frac{xdx}{x^4-1}=\frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2\right)}{\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+1}\right)d\left(x^2\right)=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|+C$

5. Ta có $I=\int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx=\int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right|+C$

6. Ta có $I=\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}+C$

7. Ta có $I=\int \frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{2}\int \frac{\left(x^2+1\right)-\left(x^2-1\right)}{x^4+1}dx=\frac{1}{2}\left(\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx-\int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right|\right)+C$$

8. Ta có $I=\int \frac{x^2dx}{x^4+1}=\frac{1}{2}\int \frac{\left(x^2+1\right)+\left(x^2-1\right)}{x^4+1}dx=\frac{1}{2}\left(\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx+\int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right|\right)+C$$

9. Ta có $I=\int \frac{x^4dx}{x^4+1}=\int \frac{\left(x^4+1\right)-1}{x^4+1}dx=x-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right|\right)+C$

10. Ta có $I=\int \frac{\left(x^2-1\right)dx}{x^4-5x^3-4x^2-5x+1}=\int \frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx}{x^2+\frac{1}{x^2}-5\left(x+\frac{1}{x}\right)-4}=\int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)-6}$

$$=\int \frac{du}{u^2-5u-6}=\int \frac{du}{(u-6)(u+1)}=\frac{1}{7}\int\left(\frac{1}{u-6}-\frac{1}{u+1}\right)du=\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x^2-6x+1}{x^2+x+1}\right|+C$$

11. Ta có $I=\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{2}\int \frac{\left(x^2+1\right)-\left(x^2-1\right)}{x^4+x^2+1}dx=\frac{1}{2}\left(\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx-\int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}dx\right)$

$$=\frac{1}{2}\left[\int \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx}{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+1}-\int \frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx}{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+1}\right]=\frac{1}{4}\left[\int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+3}-\int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1}\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{3}}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-1}{x+\frac{1}{x}+1}\right|+c=\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right|+C$$

12. Ta có $I=\int\frac{dx}{x^3-1}=\int\frac{dx}{(x-1)(x^2+x+1)}=\int\frac{d(x-1)}{(x-1)\left[(x-1)^2+3(x-1)+3\right]}$

$$=\int\frac{dt}{t(t^2+3t+3)}=\frac{1}{3}\int\frac{(t^2+3t+3)-(t^2+3t)}{t(t^2+3t+3)}dt=\frac{1}{3}\left(\int\frac{dt}{t}-\int\frac{(t+3)dt}{t^2+3t+3}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\int\frac{dt}{t}-\frac{1}{2}\int\frac{(2t+3)dt}{t^2+3t+3}-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^2+3t+3}\right)=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}\right|-\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

13. Ta có $I=\int\frac{dx}{x^3+1}=\int\frac{dx}{(x+1)(x^2-x+1)}=\int\frac{d(x+1)}{(x+1)\left[(x+1)^2-3(x+1)+3\right]}$

$$=\int\frac{dt}{t(t^2-3t+3)}=\frac{1}{3}\int\frac{(t^2-3t+3)-(t^2-3t)}{t(t^2-3t+3)}dt=\frac{1}{3}\left(\int\frac{dt}{t}-\int\frac{(t-3)dt}{t^2-3t+3}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\int\frac{dt}{t}-\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2-3t+3)}{t^2-3t+3}+\frac{3}{2}\int\frac{dt}{\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right)$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t^2}{t^2-3t+3}\right|+\sqrt{3}\arctan\frac{2t-3}{\sqrt{3}}\right)+C=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^2+2x+1}{x^2-x+1}\right|+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$$

14. Ta có $I=\int\frac{xdx}{x^3-1}=\int\frac{xdx}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{1}{3}\int\frac{(x^2+x+1)-(x-1)^2}{(x-1)(x^2+x+1)}dx$

$$=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x-1}{x^2+x+1}\right)dx=\frac{1}{3}\left[\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1}+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right|+\sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]+C$$

15. Ta có $I=\int\frac{xdx}{x^3+1}=\int\frac{xdx}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{-1}{3}\int\frac{(x^2-x+1)-(x+1)^2}{(x+1)(x^2-x+1)}dx$

$$=-\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x+1}{x^2-x+1}\right)dx=\frac{-1}{3}\left[\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1}-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right]$$

$$=\frac{-1}{6}\ln\left|\frac{x^2+2x+1}{x^2-x+1}\right|-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$$

Câu 2.

Tính các nguyên hàm sau

1. $I=\int\frac{dx}{x^6-1}$ 2. $I=\int\frac{xdx}{x^6-1}$ 3. $I=\int\frac{x^2dx}{x^6-1}$

4. $I=\int\frac{x^3dx}{x^6-1}$ 5. $I=\int\frac{x^4dx}{x^6-1}$ 6. $I=\int\frac{x^5dx}{x^6-1}$

7. $I=\int\frac{x^6dx}{x^6-1}$ 8. $I=\int\frac{x^4-1}{x^6+1}dx$ 9. $I=\int\frac{x^4+1}{x^6+1}dx$

10. $I=\int\frac{dx}{x^6+1}$ 11. $I=\int\frac{x^2+x}{x^6+1}dx$ 12. $I=\int\frac{dx}{3x^{100}+5x}$

13. $I=\int\frac{dx}{x\left(2x^{50}+7\right)^2}$ 14. $I=\int\frac{dx}{x\left(ax^n+b\right)^k}$ 15. $I=\int\frac{\left(1-x^{2000}\right)dx}{x\left(1+x^{2000}\right)}$

16. $I=\int\frac{x^{19}dx}{\left(3+x^{10}\right)^2}$ 17. $I=\int\frac{x^{99}dx}{\left(2x^{50}-3\right)^7}$ 18. $I=\int\frac{x^{2n-1}dx}{\left(ax^n+b\right)^k}$

Lời giải

1. Ta có $I=\int\frac{dx}{x^6-1}=\int\frac{dx}{\left(x^3-1\right)\left(x^3+1\right)}=\frac{1}{2}\left[\int\frac{dx}{x^3-1}-\int\frac{dx}{x^3+1}\right]$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}\right|-\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)-\left(\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^2+2x+1}{x^2-x+1}\right|+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{12}\ln\left|\frac{\left(x^2-2x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}{\left(x^2+2x+1\right)\left(x^2+x+1\right)}\right|-\frac{1}{4\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

2. Ta có $I=\int\frac{xdx}{x^6-1}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2\right)}{\left(x^2\right)^3-1}=\frac{1}{12}\ln\left|\frac{x^4-2x^2+1}{x^4+x^2+1}\right|-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}}+C$

3. Ta có $I=\int\frac{x^2dx}{x^6-1}=\frac{1}{3}\int\frac{d\left(x^3\right)}{x^6-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^3-1}{x^3+1}\right|+C=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^3-1}{x^3+1}\right|+C$

4. Ta có $I=\int\frac{x^3dx}{x^6-1}=\frac{1}{2}\int\frac{x^2d\left(x^2\right)}{x^6-1}=\frac{1}{2}\int\frac{udu}{u^3-1}=\frac{1}{2}\int\frac{udu}{(u-1)\left(u^2+u+1\right)}$

$$=\frac{1}{12}\ln\left|\frac{(u-1)^2}{u^2+u+1}\right|+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2u+1}{\sqrt{3}}+C=\frac{1}{12}\ln\left|\frac{x^4-2x^2+1}{x^4+x^2+1}\right|+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}}+C$$

5. Ta có $I=\int\frac{x^4dx}{x^6-1}=\int\frac{\left(x^4+x^2+1\right)-\left(x^2-1\right)-2}{\left(x^2-1\right)\left(x^4+x^2+1\right)}dx=\int\frac{dx}{x^2-1}-\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}-2\int\frac{dx}{x^6-1}$

$$=\frac{1}{12}\ln\left|\frac{\left(x^2-2x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}{\left(x^2+2x+1\right)\left(x^2+x+1\right)}\right|+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}-\arctan\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}\right)+C$$

6. Ta có $I=\int \frac{x^5dx}{x^6-1}=\frac{1}{6}\int \frac{d\left(x^6\right)}{x^6-1}=\frac{1}{6}\ln\left|x^6-1\right|+C$

7. Ta có $I=\int \frac{x^6dx}{x^6-1}=\int \frac{\left(x^6-1\right)+1}{x^6-1}dx=\int dx+\int \frac{dx}{x^6-1}$

$$=x+\frac{1}{12}\ln\left|\frac{\left(x^2-2x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}{\left(x^2+2x+1\right)\left(x^2+x+1\right)}\right|-\frac{1}{4\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

8. Ta có $I=\int \frac{x^4-1}{x^6+1}dx=\int \frac{\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)}=\int \frac{\left(x^2-1\right)dx}{x^4-x^2+1}=\int \frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx}{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-1}$

$$=\int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{3}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{3}}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x^2-x\sqrt{3}+1}{x^2+x\sqrt{3}+1}\right|+C$$

9. Ta có $I=\int \frac{x^4+1}{x^6+1}dx=\int \frac{\left(x^4-x^2+1\right)+x^2}{\left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)}dx=\int \frac{dx}{x^2+1}+\int \frac{x^2dx}{x^6+1}$

$$=\int \frac{dx}{x^2+1}+\frac{1}{3}\int \frac{d\left(x^3\right)}{x^6+1}=\arctan x+\frac{1}{3}\arctan\left(x^3\right)+C$$

10. Ta có $I=\int \frac{dx}{x^6+1}=\frac{1}{2}\int \frac{\left(x^4+1\right)-\left(x^4-1\right)}{x^6+1}dx$

$$=\frac{1}{2}\left(\arctan x+\frac{1}{3}\arctan\left(x^3\right)-\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x^2-x\sqrt{3}+1}{x^2+x\sqrt{3}+1}\right|\right)+C$$

11. Ta có $I=\int \frac{x^2+x}{x^6+1}dx=\frac{1}{3}\int \frac{d\left(x^3\right)}{x^6+1}+\frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2\right)}{x^6+1}$

$$=\frac{1}{3}\arctan\left(x^3\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^4+2x^2+1}{x^4-x^2+1}\right|+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

12. Ta có $I=\int \frac{dx}{3x^{100}+5x}=\int \frac{dx}{x\left(3x^{99}+5\right)}=\frac{1}{5}\int \frac{\left(3x^{99}+5\right)-3x^{99}}{x\left(3x^{99}+5\right)}dx=\frac{1}{5}\left[\int \frac{dx}{x}-\int \frac{3x^{98}dx}{3x^{99}+5}\right]$

$$=\frac{1}{5}\left[\int \frac{dx}{x}-\frac{1}{99}\int \frac{d\left(3x^{99}+5\right)}{3x^{99}+5}\right]=\frac{1}{5}\left[\ln|x|-\frac{1}{99}\ln\left|3x^{99}+5\right|\right]+C=\frac{1}{495}\ln\left|\frac{x^{99}}{3x^{99}+5}\right|+C$$

13. Ta có $I=\int \frac{dx}{x\left(2x^{50}+7\right)^2}=\frac{1}{7}\int \frac{\left(2x^{50}+7\right)-2x^{50}}{x\left(2x^{50}+7\right)^2}dx=\frac{1}{7}\left[\int \frac{dx}{x\left(2x^{50}+7\right)}-\int \frac{2x^{49}dx}{\left(2x^{50}+7\right)^2}\right]$

$$=\frac{1}{7}\left[\frac{1}{7}\int \frac{\left(2x^{50}+7\right)-2x^{50}}{x\left(2x^{50}+7\right)}dx-\int \frac{2x^{49}dx}{\left(2x^{50}+7\right)^2}\right]=\frac{1}{49}\left[\int \frac{dx}{x}-\int \frac{2x^{49}dx}{2x^{50}+7}\right]-\frac{1}{7}\int \frac{2x^{49}dx}{\left(2x^{50}+7\right)^2}$$

$$=\frac{1}{49}\left[\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{50}\int\frac{d\left(2x^{50}+7\right)}{2x^{50}+7}\right]-\frac{1}{350}\int\frac{d\left(2x^{50}+7\right)}{\left(2x^{50}+7\right)^{2}}$$

$$=\frac{1}{49}\ln|x|-\frac{1}{49.50}\ln\left|2x^{50}+7\right|+\frac{1}{350\left(2x^{50}+7\right)}=\frac{1}{49.50}\ln\left|\frac{x^{50}}{2x^{50}+7}\right|+\frac{1}{350\left(2x^{50}+7\right)}+C$$

14. Ta có $I=\int\frac{dx}{x\left(ax^{n}+b\right)^{k}}=\frac{1}{b}\int\frac{\left(ax^{n}+b\right)-ax^{n}}{x\left(ax^{n}+b\right)^{k}}dx=\frac{1}{b}\int\frac{dx}{x\left(ax^{n}+b\right)^{k-1}}-\frac{1}{nb}\int\frac{d\left(ax^{n}+b\right)}{\left(ax^{n}+b\right)^{k}}$

$$=\frac{1}{b^{2}}\int\frac{dx}{x\left(ax^{n}+b\right)^{k-2}}-\frac{1}{nb^{2}}\int\frac{d\left(ax^{n}+b\right)}{\left(ax^{n}+b\right)^{k-1}}-\frac{1}{nb}\int\frac{d\left(ax^{n}+b\right)}{\left(ax^{n}+b\right)^{k}}=\cdots$$

$$=\frac{1}{b^{k}}\ln|x|+\frac{1}{n}\left[\frac{1}{b(k-1)\left(ax^{n}+b\right)^{k-1}}+\cdots+\frac{1}{b^{k-1}\left(ax^{n}+b\right)}-\frac{1}{b^{k}}\ln\left|ax^{n}+b\right|\right]+C$$

$$=\frac{1}{nb^{k}}\ln\left|\frac{x^{n}}{ax^{n}+b}\right|+\frac{1}{n}\left[\frac{1}{b(k-1)\left(ax^{n}+b\right)^{k-1}}+\cdots+\frac{1}{b^{k-1}\left(ax^{n}+b\right)}\right]+C$$

15. Ta có $I=\int\frac{\left(1-x^{2000}\right)dx}{x\left(1+x^{2000}\right)}=\int\frac{\left(1+x^{2000}\right)-2x^{2000}}{x\left(1+x^{2000}\right)}dx=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{2x^{1999}dx}{1+x^{2000}}$

$$=\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{1000}\int\frac{d\left(1+x^{2000}\right)}{\left(1+x^{2000}\right)}=\ln|x|-\frac{1}{1000}\ln\left|1+x^{2000}\right|+C=\ln\left|\frac{x^{1000}}{1+x^{2000}}\right|+C$$

16. Ta có $I=\int\frac{x^{19}dx}{\left(3+x^{10}\right)^{2}}=\frac{1}{10}\int\frac{x^{10}\cdot 10x^{9}dx}{\left(3+x^{10}\right)^{2}}=\frac{1}{10}\int\frac{x^{10}d\left(x^{10}\right)}{\left(3+x^{10}\right)^{2}}=\frac{1}{10}\int\frac{\left(x^{10}+3\right)-3}{\left(3+x^{10}\right)^{2}}d\left(x^{10}+3\right)$

$$=\frac{1}{10}\left[\int\frac{d\left(x^{10}+3\right)}{3+x^{10}}-3\int\frac{d\left(x^{10}+3\right)}{\left(3+x^{10}\right)^{2}}\right]=\frac{1}{10}\ln\left|3+x^{10}\right|+\frac{3}{10\left(3+x^{10}\right)}+C$$

17. Ta có $I=\int\frac{x^{99}dx}{\left(2x^{50}-3\right)^{7}}=\int\frac{x^{50}\cdot x^{49}dx}{\left(2x^{50}-3\right)^{7}}=\frac{1}{200}\int\frac{\left(2x^{50}-3\right)+3}{\left(2x^{50}-3\right)^{7}}d\left(2x^{50}-3\right)$

$$=\frac{1}{200}\left[\int\frac{d\left(2x^{50}-3\right)}{\left(2x^{50}-3\right)^{6}}+3\int\frac{d\left(2x^{50}-3\right)}{\left(2x^{50}-3\right)^{7}}\right]=-\frac{1}{200}\left[\frac{1}{5\left(2x^{50}-3\right)^{5}}+\frac{1}{2\left(2x^{50}-3\right)^{6}}\right]+C$$

$$=-\frac{1}{200}\cdot\frac{2\left(2x^{50}-3\right)+5}{10\left(2x^{50}-3\right)^{6}}+C=\frac{1-4x^{50}}{2000\left(2x^{50}-3\right)^{6}}+C$$

18. Ta có $I=\int\frac{x^{2n-1}dx}{\left(ax^{n}+b\right)^{k}}=\int\frac{x^{n}x^{n-1}dx}{\left(ax^{n}+b\right)^{k}}=\frac{1}{na^{2}}\int\frac{\left(ax^{n}+b\right)-b}{\left(ax^{n}+b\right)^{k}}d\left(ax^{n}+b\right)$

$$=\frac{1}{na^{2}}\left[\int\frac{d\left(ax^{n}+b\right)}{\left(ax^{n}+b\right)^{k-1}}-b\int\frac{d\left(ax^{n}+b\right)}{\left(ax^{n}+b\right)^{k}}\right]=\frac{1}{na^{2}}\left[\frac{-1}{(k-2)\left(ax^{n}+b\right)^{k-2}}+\frac{b}{(k-1)\left(ax^{n}+b\right)^{k-1}}\right]+C$$

$$= \frac{1}{na^2} \cdot \frac{b(k-2)-(k-1)(ax^n+b)}{(k-1)(ax^n+b)^{k-1}} + C = \frac{-kax^n - b}{na^2(k-1)(kx^n+b)^{k-1}} + C$$

Dạng toán $I = \int_{\alpha}^{\beta} f(e^x)\,dx$

CÁCH GIẢI CHUNG. Đặt $\left[\begin{array}{l} t = e^x \\ t = e^{kx} \\ t = ae^x + b \\ t = \sqrt[n]{ae^x+b} \\ t = (ae^x+b)^m \end{array}\right.$ Sau đó đưa tích phân trên về tích phân cơ bản

Sau đây chúng ta sẽ đi vào các ví dụ cụ thể!

Câu 1.

Tính các tích phân sau:

1. $I_1 = \int_1^3 \frac{dx}{e^x - 1}$ 2. $I_2 = \int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3}$ 3. $I_3 = \int_0^1 \frac{dx}{e^{2x}+5}$

4. $I_4 = \int_0^1 \frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}}dx$ 5. $I_5 = \int_0^1 \frac{e^x dx}{e^x + e^{-x}}$ 7. $I_6 = \int_0^1 \frac{(1+e^x)^3}{e^x}dx$

7. $I_7 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}+3e^x}{e^{2x}+3e^x+2}dx$

Lời giải

1. Đặt $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$

$$\Rightarrow I_1 = \int_1^3 \frac{e^x dx}{e^x(e^x-1)} = \int_e^{e^3} \frac{dt}{t(t-1)} = \int_e^{e^3}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\right)dt = \ln\left|\frac{t-1}{t}\right|\Bigg|_e^{e^3} = \ln\frac{e^2+e+1}{e^2}$$

2. Đặt $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$

$$\Rightarrow I_2 = \int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{e^x dx}{e^{2x}+2-3e^x} = \int_3^5 \frac{dt}{t^2-3t+2} = \int_3^5 \frac{dt}{(t-1)(t-2)} = \int_3^5\left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t-1}\right)dt = \ln\left|\frac{t-2}{t-1}\right|\Bigg|_3^5 = \ln\frac{3}{2}$$

3. Đặt $t = e^{2x} \Rightarrow dt = 2e^{2x}dx$

$$\Rightarrow I_3 = \int_0^1 \frac{e^{2x}dx}{e^{2x}(e^{2x}+5)} = \frac{1}{2}\int_1^{e^2} \frac{dt}{t(t+5)} = \frac{1}{10}\int_1^{e^2}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+5}\right)dt = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{t}{t+5}\right|\Bigg|_1^{e^2} = \frac{1}{10}\ln\frac{6e^2}{e^2+5}$$

4. Đặt $t = e^{-x} \Rightarrow dt = -e^{-x}dx$

$$\Rightarrow I_4 = \int_0^1 \frac{e^{-x}\cdot e^{-x}dx}{1+e^{-x}} = -\int_1^{\frac{1}{e}} \frac{t}{t+1}dt = \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{t}{t+1}dt = \int_{\frac{1}{e}}^1\left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = \left(t - \ln|t+1|\right)\Big|_{\frac{1}{e}}^1 = \ln\frac{e+1}{2} - \frac{1}{e}$$

5. Ta có $I_5=\int\limits_0^1 \frac{e^x dx}{e^x+e^{-x}}=\int\limits_0^1 \frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+1}$. Đặt $t=e^{2x}\Rightarrow dt=2e^{2x}dx$

$$\Rightarrow I_5=\frac{1}{2}\int\limits_1^{e^2}\frac{dt}{t+1}=\frac{1}{2}\ln|t+1|\Big|_1^{e^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{e^2+1}{2}$$

6. $I_6=\int_0^1 \frac{\left(1+e^x\right)^3}{e^x}dx$. Đặt $t=1+e^x\Rightarrow\begin{cases}dt=e^x dx\\ e^x=t-1\end{cases}$

$$\Rightarrow I_6=\int_0^1\frac{\left(1+e^x\right)^3e^x}{e^{2x}}dx=\int_2^{4e}\frac{t^3}{(t-1)^2}dt=\int_2^{1+e}\left[t+2+\frac{3t-2}{(t-1)^2}\right]dt$$

$$=\int_2^{1+e}\left[t+2+\frac{3(t-1)+1}{(t-1)^2}\right]dt=\int_2^{1+e}\left[t+2+\frac{3}{t-1}+\frac{1}{(t-1)^2}\right]dt$$

$$=\left(\frac{t^2}{2}+2t+3\ln|t-1|-\frac{1}{t-1}\right)\Bigg|_2^{1+e}=\frac{e^3+6e^2+e-2}{2e}$$

7. $I_7=\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}+3e^x}{e^{2x}+3e^x+2}dx$. Đặt $t=e^x\Rightarrow dt=e^x dx$

$$\Rightarrow I_7=\int_0^{\ln 2}\frac{\left(e^x+3\right)e^x}{e^{2x}+3e^x+2}dx=\int_1^2\frac{t+3}{t^2+3t+2}dt$$

$$=\int_1^2\frac{\frac{1}{2}(2t+3)+\frac{3}{2}}{t^2+3t+2}dt=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{d\left(t^2+3t+2\right)}{t^2+3t+2}+\frac{3}{2}\int_1^2\frac{dt}{(t+1)(t+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{d\left(t^2+3t+2\right)}{t^2+3t+2}+\frac{3}{2}\int_1^2\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+2}\right)dt$$

$$=\left(\frac{1}{2}\ln\left(t^2+3t+2\right)+\frac{3}{2}\ln\frac{t+1}{t+2}\right)\Bigg|_1^2=3\ln 3-4\ln 2$$

Từ $(*)$ các em có thể dùng phương pháp đồng nhất hệ số

$$\frac{t+3}{t^2+3t+2}=\frac{t+3}{(t+1)(t+2)}=\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t+2}\Rightarrow t+3=A(t+2)+B(t+1)\ \left(2^*\right)$$

Ta tìm A,B theo 2 cách

Cách 1. Chọn $t=-1\Rightarrow A=2$ và chọn $t=-2\Rightarrow B=-1$

Cách 2. $\left(2^*\right)\Leftrightarrow t+3=(A+B)t+2A+B\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=1\\2A+B=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=2\\B=-1\end{cases}$

$$\Rightarrow I_8=\int_1^2\left(\frac{2}{t+1}-\frac{1}{t+2}\right)dt=\left(2\ln|t+1|-\ln|t+2|\right)\Big|_1^2=3\ln 3-4\ln 2$$

Ví dụ 2. Tính các tích phân sau:

1. $I_1=\int_0^1\frac{x^2+e^x+2x^2e^x}{1+2e^x}dx$ 2. $I_2=\int_{\ln 2}^{\ln 5}\frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^x-1}}$ 3. $I_3=\int_0^{\ln 2}\frac{e^{3x}+2e^{2x}+e^x}{2+\left(1+e^x\right)^3}dx$

4. $I_4 = \int_0^{\ln 3} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$ 5. $I_5 = \int_0^{\ln 3} \frac{e^x dx}{\sqrt{(e^x+1)^3}}$ 6. $I_6 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2e^{2x}+2e^x+1}}$

Lời giải

1. $I_1 = \int_0^1 \frac{x^2+e^x+2x^2e^x}{1+2e^x}dx$

Nhận xét. *Vì biểu thức dưới dấu tích phân có cả phần đa thức liên hệ bởi phép toán cộng nên ta sẽ nghĩ tới việc "triệt tiêu" nó bằng cách cô lập (tách) thành hai tích phân để tính.*

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x^2(1+2e^x)+e^x}{1+2e^x}dx = \int_0^1 x^2dx + \int_0^1 \frac{e^x dx}{1+2e^x} = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + I = \frac{1}{3} + I$$

Tính $I = \int_0^1 \frac{e^x dx}{1+2e^x}$. Đặt $t = 1+2e^x \Rightarrow dt = 2e^x dx \Leftrightarrow e^x dx = \frac{dt}{2}$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_3^{1+2e} \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t|\Big\|_3^{1+2e} = \frac{1}{2}\ln\frac{2e+1}{3} \Rightarrow I_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\ln\frac{2e+1}{3}$$

Các bạn có thể tính *I* theo kĩ thuật vi phân

$$I = \int_0^1 \frac{e^x dx}{11+2e^x} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(1+2e^x)}{1+2e^x} = \frac{1}{2}\ln\left|1+2e^x\right|_0^1 = \frac{1}{2}\ln\frac{2e+1}{3}$$

2. $I_2 = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^x-1}}$

Đặt $t = \sqrt{e^x-1} \Rightarrow t^2 = e^x - 1 \Rightarrow \begin{cases} 2tdt = e^x dx \\ e^x = t^2+1 \end{cases}$

$$\Rightarrow I_2 = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}} \cdot e^x dx = \int_1^2 \frac{t^2+1}{t} \cdot 2tdt = 2\int_1^2 (t^2+t)dt = 2\left.\left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}\right)\right|_1^2 = \frac{23}{3}$$

3. $I_3 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{3x}+2e^{2x}+e^x}{2+(1+e^x)^3}dx$

Đặt $t = (1+e^x)^3 \Rightarrow dt = 3(1+e^x)^2 e^x dx \Leftrightarrow e^x(1+e^x)^2 dx = \frac{dt}{3}$

$$\Rightarrow I_3 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x(e^{2x}+2e^x+1)}{2+(1+e^x)^3}dx = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x(1+e^x)^2 dx}{2+(1+e^x)^3} = \frac{1}{3}\int_8^{27} \frac{dt}{2+t} = \frac{1}{3}\ln|t+2|\Big\|_8^{27} = \frac{1}{3}\ln\frac{29}{10}$$

4. $I_4 = \int_0^{\ln 3} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$

Đặt $t = \sqrt{e^x+1} \Rightarrow t^2 = e^x + 1 \Rightarrow \begin{cases} 2tdt = e^x dx \\ e^x = t^2-1 \end{cases}$

$$\Rightarrow I_4 = \int_0^{h3} \frac{e^x dx}{e^x\sqrt{e^x+1}} = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{2tdt}{(t^2-1)t} = 2\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dt}{t^2-1} = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Big\|_{\sqrt{2}}^2 = 2\ln(\sqrt{2}+1) - \ln 3$$

5. $I_5=\int_0^{\ln 3}\frac{e^x dx}{\sqrt{\left(e^x+1\right)^3}}$. Đặt $t=e^x+1\Rightarrow dt=e^x dx\ \Rightarrow I_5=\int_2^4\frac{dt}{\sqrt{t^3}}=\int_2^4 t^{-\frac{3}{2}}.dt=\left.\frac{-2}{\sqrt{t}}\right|_2^4=\sqrt{2}-2$

6. $I_6=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{2e^{2x}+2e^x+1}}$

Nhận xét.

Nếu bài toán này ta đặt $t=\sqrt{2e^{2x}+2e^x+1}\Rightarrow t^2=2e^{2x}+2e^x+1\Rightarrow tdt=\left(2e^{2x}+e^x\right)dx$ khi đó chúng ta phải chỉnh lại tích phân (để rút được theo tdt) bằng cách biến đổi

$$I_6=\int_0^1\frac{\left(2e^{2x}+e^x\right)dx}{\left(2e^{2x}+e^x\right)\sqrt{2e^{2x}+2e^x+1}}$$

Nhưng ta không rút được biểu thức $\left(2e^{2x}+e^x\right)$ dưới mẫu số theo t được . Như vậy hướng đi này không khả thi. Nếu ta chuyển sang hướng khác bằng cách đặt $t=e^x$ thì $I_6=\int\limits_0^1\frac{e^x dx}{e^x\sqrt{2e^{2x}+2e^x+1}}=\int\limits_1^e\frac{dt}{t\sqrt{2t^2+2t+1}}$ nếu làm tiếp thì sẽ khá dài và phức tạp. Nhưng chúng ta hãy quan sát kĩ lại biểu thức: $2e^{2x}+2e^x+1=\left(1+e^x\right)^2+e^x$ giá như nó có dạng u^2+a^2. Điều giá như này gợi ý chúng ta nhận thêm

$$e^{-2x}:e^{-2x}\left(2e^{2x}+2e^x+1\right)=2+2e^{-x}+e^{-2x}=\left(1+e^{-x}\right)^2+1\,.$$

Và khi đó ta có lời giải của bài toán như sau:

Đặt $t=\left(1+e^{-x}\right)\Rightarrow dt=-e^{-x}dx$

$$\Rightarrow I_6=\int\limits_0^1\frac{e^{-x}dx}{\sqrt{e^{-2x}\left(2e^{2x}+2e^x+1\right)}}=\int\limits_0^1\frac{e^{-x}dx}{\sqrt{\left(1+e^{-x}\right)^2+1}}=\int\limits_{1+e^{-1}}^2\frac{dt}{\sqrt{t^2+1+1}}=\int\limits_{1+e^{-1}}^2\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}.\frac{\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)dt}{\sqrt{t^2+1}}$$

$$=\int\limits_{1+e^{-1}}^2\frac{d\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)}{\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)}=\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|\Bigg|_{1+e^{-1}}^2=\ln\frac{\left(2+\sqrt{5}\right)e}{e+1+\sqrt{2e^2+2e+1}}$$

PHƯƠNG PHÁP OXTROGRATXKY

Khi đứng trước các bài toán nguyên hàm tích phân hàm phân thức hữu tỷ ta thường có rất nhiều phương pháp giải khác nhau từ đưa về dạng cơ bản bằng cách đặt ẩn phụ, đặt ẩn lượng giác, phân tích nhân tử hoặc hệ số bất định và một số phương pháp khác. Trong bài viết này mình sẽ giới thiệu cho các bạn một phương pháp khá là hay để xử lý nguyên hàm phân thức hữu tỷ mà được các thầy gọi là OXTROGRATXKY.

GIỚI THIỆU VỀ PHƯƠNG PHÁP OXTROGRATXKY.

Trước hết ta xét các bài toán có dạng $I=\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, trong đó $P(x),Q(x)$ là 2 đa thức thỏa mãn $\deg P<\deg Q$. Trong đó nếu đa thức $Q(x)$ có nghiệm bội trên tập số phức thì ta sẽ biểu diễn nguyên hàm ban đầu dưới dạng $I=\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx=\frac{F(x)}{Q_1(x)}+\int \frac{H(x)}{Q_2(x)}dx\,(*)$. Trong đó

- Đa thức $Q_1(x)=UCLN\{Q(x);Q'(x)\}$
- Đa thức $Q_2(x)=\frac{Q(x)}{Q_1(x)}$
- $F(x),K(x)$ là các đa thức với hệ số chưa xác định thỏa mãn $\begin{cases}\deg F=\deg Q_1-1\\ \deg K=\deg Q_2-1\end{cases}$

Bước tiếp theo để giải quyết bài toán này là ta sẽ đi lấy đạo hàm 2 vế của biểu thức $(*)$ rồi đồng nhất hệ số tìm các đa thức đó. Nhìn chung cũng khá là phức tạp trong việc giải hệ phương trình ☺. Sau đây mình và các bạn sẽ đi qua các bài toán để hiểu rõ hơn phương pháp này nhé!

CÁC BÀI TOÁN MINH HỌA.

Câu 1.

Tìm nguyên hàm của hàm số sau $I=\int \frac{x^2dx}{\left(x^2+2x+2\right)^2}$

Lời giải

Đầu tiên ta nhận thấy rằng đây là một bài toán khá khủng đó, chú ý $Q(x)=\left(x^2+2x+2\right)^2$ có nghiệm bội là nghiệm phức nên ta có thể dùng phương pháp này được.

Đến đây ta sẽ làm từng bước 1, đầu tiên ta có $Q'(x)=4(x+1)\left(x^2+2x+2\right)$, tiếp theo ta sẽ đi tìm $Q_1(x)$, chú ý là $Q(x)$ và $Q'(x)$ đều có đại lượng $\left(x^2+2x+2\right)$ có nghĩa đa thức này chính là ước chung lớn nhất của 2 đa thức $Q(x),Q'(x)\Rightarrow Q_2(x)=Q_1(x)=x^2+2x+2$

Áp dụng công thức tổng quát vào ta giả sử

$$I=\int \frac{x^2dx}{\left(x^2+2x+2\right)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+2}+\int \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}dx$$

Lấy đạo hàm 2 vế ta được

$$\frac{x^2}{\left(x^2+2x+2\right)^2}=\frac{A\left(x^2+2x+2\right)+(Ax+B)(2x+2)}{\left(x^2+2x+2\right)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$$

$$\Leftrightarrow x^2=Cx^3+(-A+2C+D)x^2+(-2B+2C+2D)x+(2A-2B+2D)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C=0 \\ -A+2C+D=1 \\ -2B+2C+2D=0 \\ 2A-2B+2D=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=1 \\ C=0 \\ D=1 \end{cases}$$

Đến đây tích phân ban đầu trở thành dạng vô cùng đơn giản

$$I=\int \frac{x^2dx}{\left(x^2+2x+2\right)^2}=\frac{1}{x^2+2x+2}+\int \frac{dx}{x^2+2x+2}=\frac{1}{x^2+2x+2}+\arctan\left(x+1\right)+C$$

Nhận xét. *Qua ví dụ đầu ta có thể thấy rằng đây là một phương pháp cũng tương đối mạnh trong việc giải quyết các bài toán hàm phân thức hữu tỷ, tuy nhiên thì cái gì cũng có 2 mặt cả, khó khăn của phương pháp này chính là nằm ở việc giải hệ phương trình, với bài này thì có vẻ giải nhanh, nhưng với một số bài khác thì nó sẽ không đơn giản như thế, sau đây ta cùng tìm hiểu một ví dụ để thấy nhược điểm của nó nhé!*

Câu 2.

Tìm nguyên hàm của hàm số sau $I=\int \frac{x^2+1}{\left(x^4+x^2+1\right)^2}dx$

Lời giải

Như bài trước, đầu tiên ta sẽ đi tìm các đa thức $Q_1\left(x\right),Q_2\left(x\right)$.

Ta có $Q'\left(x\right)=4\left(2x^3+x\right)\left(x^4+x^2+1\right)\Rightarrow Q_1\left(x\right)=Q_2\left(x\right)=x^4+x^2+1$

Ta giả sử $I=\int \frac{x^2+1}{\left(x^4+x^2+1\right)^2}dx=\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^4+x^2+1}+\int \frac{Ex^3+Fx^2+Gx+H}{x^4+x^2+1}dx$

Lấy đạo hàm 2 vế ta có

$$\frac{x^2+1}{\left(x^4+x^2+1\right)^2}=\frac{\left(3Ax^2+2Bx+C\right)\left(x^4+x^2+1\right)}{\left(x^4+x^2+1\right)^2}-\frac{\left(4x^3+2x\right)\left(Ax^3+Bx^2+Cx+D\right)}{\left(x^4+x^2+1\right)^2}+\frac{Ex^3+Fx^2+Gx+H}{x^4+x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow x^2+1=Ex^7+\left(-A+F\right)x^6+\left(-2B+G+E\right)x^5+\left(A-3C+F+H\right)x^4+\left(-4D+G+E\right)x^3+\left(3A-C+F+H\right)x^2+\left(2B-2D+G\right)x+\left(C+H\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E=0 \\ E=-A+F \\ -A+F=-2B+G+E \\ A-3C+F+H=0 \\ -4D+G+E=2B-2D+G \\ =2B-2D+G=0 \\ C+H=3A-C+F+H \\ 3A-C+F+H=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=D=E=G=0 \\ A=F=\dfrac{1}{6} \\ C=\dfrac{1}{3} \\ H=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Quá khủng phải không nào? Đến đây nguyên hàm ban đầu trở thành

$$I=\int\frac{x^2+1}{\left(x^4+x^2+1\right)^2}dx=\frac{x^3+2x}{6\left(x^4+x^2+1\right)}+\frac{1}{6}\int\frac{x^2+4}{x^4+x^2+1}dx$$

Ta hãy để ý rằng $\int\frac{x^2+4}{x^4+x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int\left(\frac{3x+4}{x^2+x+1}-\frac{3x-4}{x^2-x+1}\right)dx$

$$=\frac{3}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{5}{2\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

Từ đó nguyên hàm ban đầu ta tính được bằng

$$I=\frac{x^3+2x}{6\left(x^4+x^2+1\right)}+\frac{1}{8}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{5}{12\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

Nhận xét. *Quả thật lời giải tự luận của bài này rất khủng phải không nào? Nhìn chung mỗi phương pháp có một cái hay của nó, như phương pháp nhảy tầng lầu sẽ có một cái hay, cái này cũng thế. Và các bạn chú ý là trong đề thi THPT Quốc Gia họ không cho tới mức này đâu nên nếu gặp thì các bạn có thể sử dụng cách này hoặc cách nào khác các bạn cảm thấy nhanh là được, bài viết này chỉ mang tính giới thiệu thêm cho các bạn một phương pháp khác để làm nguyên hàm thôi.*

BÀI TẬP TỔNG HỢP

ĐỀ BÀI

Bài 1. Cho $I=\int_2^3 \frac{x^3+1}{3x-5}dx=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\ln 4$ với a,b,c,d là các số nguyên dương và $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Biết $a+c-2(b+d)=m^2, m>0$. m là số nào sau đây

A. 10 **B.** 11 **C.** 12 **D.** 13

Bài 2 . Tính nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{\ln x}{(x-2)^3}$

A. $-\frac{\ln x}{2(x-2)^2}-\frac{1}{4(x-2)}-\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|+C$

B. $\frac{\ln x}{2(x-2)^2}+\frac{1}{4(x-2)}+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|+C$

C. $\frac{\ln x}{2(x-2)^2}+\frac{1}{4(x-2)}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|+C$

D. $\frac{\ln x}{2(x-2)^2}-\frac{1}{4(x-2)}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|+C$

Bài 3. Cho $I=\int_{\frac{\sqrt{2}-3}{2}}^{\frac{\sqrt{6}-3}{2}} \frac{2x+1}{4x^2+12x+11}dx=\frac{\ln 2}{a}-\frac{\pi\sqrt{2}}{b}$. Biết a,b là các số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức ab

A. 12 **B.** 24 **C.** 48 **D.** 96

Bài 4. Cho $\int_{-1}^{1} \frac{x^2-3}{(x^2+5x+3)(2x^2+9x+6)}dx=\ln a-\ln b$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $a+b$ là

A. 23 **B.** 24 **C.** 25 **D.** 26

Bài 5. Cho $\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx=\frac{\pi\sqrt{a}}{b}$ với a là số nguyên tố. Tính a^2b

A. 75 **B.** 54 **C.** 108 **D.** 45

Bài 6. Cho $\int_{-1}^{1} \frac{25}{(x-2)^2(x^2+1)}dx=\frac{a\ln 3+b\pi+c}{6}$. Tính $a+b+c$.

A. 53 **B.** 54 **C.** 55 **D.** 56

Bài 7. Đặt $F_n=\int_1^2 \frac{x^{2n-1}}{(x^n+1)^2}dx$. Tính $\lim F_n=\int_1^2 \frac{x^{2n-1}}{(x^n+1)^2}dx$

A. 0 **B.** 1 **C.** $\ln 2$ **D.** $+\infty$

Bài 8. Cho $\int_0^1 \frac{(x^3+1)^2}{(x^2+1)^3}dx=\frac{a-b\pi}{8}$. Tính $a-b$

A. 3 **B.** 6 **C.** 12 **D.** 15

Bài 9. Cho $F_n=\int_0^1 \frac{x^{2n-3}}{(x^2+1)^n}dx$. Giá trị của F_{2001} và F_{2019} lần lượt là

A. $\frac{1}{2001.2^{2001}};\frac{1}{2019.2^{2019}}$ **B.** $\frac{1}{2002.2^{2001}};\frac{1}{2020.2^{2019}}$

C. $\frac{1}{4000.2^{2000}};\frac{1}{4036.2^{2018}}$ **D.** $\frac{1}{4002.2^{2001}};\frac{1}{4038.2^{2019}}$

Bài 10. Cho $\int_1^2 \frac{x^4-13x^3+13x-1}{x\left(x^4-11x^3+12x^2-11x+1\right)}dx=\frac{\ln 3}{a}-\frac{\ln 5}{b}$, với a,b là cá số nguyên dương. Tính a^2b^3

A. 3 **B.** 27 **C.** 108 **D.** 72

Bài 11. Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}/\{0;2\}$ thỏa mãn $f(x)+f\left(\frac{4}{2-x}\right)=x$. Tính $\int_3^5 f(x)dx$

A. $3-\ln 5+2\ln 3$ **B.** $9-3\ln 5+6\ln 3$ **C.** $6-2\ln 5+4\ln 3$ **D.** $12-4\ln 5+8\ln 3$

Bài 12. Đâu là một họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{5x^2+1}{x^4+1}$

A. $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln\left|\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right|+3\arctan\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right)\right)+C$

B. $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln\left|\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right|-3\arctan\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right)\right)+C$

C. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln\left|\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right|-3\arctan\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right)\right)+C$

D. $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln\left|\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right|+3\arctan\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right)\right)+C$

Bài 13. Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}/\left\{-\frac{1}{2};1\right\}$ thỏa mãn $f\left(\frac{3x-1}{2x+1}\right)=\frac{(x-3)^2}{(x-2)^2}$. Tính $\int_2^4 f(x)dx$

A. $\frac{148}{75}-\frac{7\ln 3}{25}$ **B.** $\frac{296}{75}-\frac{14\ln 3}{25}$ **C.** $\frac{148}{25}-\frac{7\ln 3}{75}$ **D.** $\frac{296}{25}-\frac{14\ln 3}{75}$

Bài 14. Cho đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn $(x-1)P(x+1)-(x+2)P(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $P(2)=6$. Tính $I=\int_{-1}^0 \frac{P(x)}{x^2+x+1}dx$

A. $-\frac{2}{3}+\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ **B.** $-\frac{3}{2}-\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ **C.** $-\frac{2}{3}-\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ **D.** $-\frac{3}{2}+\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$

Bài 15. Cho $f(x)$ thỏa mãn $(x-y)f(x+y)-(x+y)f(x-y)=4xy\left(x^2-y^2\right)$. Biết $f(2)=16$, tính $I=\int_0^1 \frac{f(x)-4x+4}{x^2+3x+2}dx$

A. $4\ln 2-\ln 3+\frac{3}{2}$ **B.** $4\ln 3-\ln 2+\frac{5}{2}$ **C.** $4\ln 3-\ln 2-\frac{5}{2}$ **D.** $4\ln 3-\ln 2-\frac{3}{2}$

Bài 16. Cho $f(x)$ và $g(x)$ xác định $\forall x$ thỏa mãn $\begin{cases} f(2x-1)+g(1-x)=x+1 & (1) \\ f\left(\dfrac{x}{x+1}\right)+2g\left(\dfrac{1}{2x+2}\right)=3 & (2) \end{cases}$.

Tính giá trị của tích phân $\int_5^{10}\dfrac{g(x)}{f(x)}dx$

A. $5+\ln 2$ **B.** $5-\ln 2$ **C.** $2+\ln 5$ **D.** $2-\ln 5$

Bài 17. Cho $f(x)$ và $g(x)$ thỏa mãn $\dfrac{2}{(x+1)^2}f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=\dfrac{4}{(x+2)^2}g\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)+\dfrac{x-3}{x+3}$. Biết rằng $\int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{3}}g(x)dx=1;\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{9}}g(x)dx=2$. Tính $P=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{5}}f(x)dx+2\int_{\frac{5}{7}}^{\frac{3}{4}}f(x)dx$

A. $8+6\ln\dfrac{7}{6}-12\ln\dfrac{10}{9}$ **B.** $8+6\ln\dfrac{7}{6}+12\ln\dfrac{10}{9}$

C. $8-6\ln\dfrac{7}{6}+12\ln\dfrac{10}{9}$ **D.** $8-6\ln\dfrac{7}{6}-12\ln\dfrac{10}{9}$

Bài 18. Cho $f(x)$ thỏa mãn $f(x)+f(y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2+1}$. Tính $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}f(x)dx$

A. $\dfrac{1}{4\sqrt{2}}-\dfrac{\pi}{16\sqrt{2}}$ **B.** $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}-\dfrac{\pi}{8\sqrt{2}}$ **C.** $\dfrac{1}{4\sqrt{2}}-\dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}$ **D.** $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}-\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$

Bài 19. Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên dương k thỏa mãn bất phương trình $\int_1^2 e^{kx}dx<\dfrac{2018.e^k-2018}{k}$. Số phần tử của tập hợp S bằng.

A. 7 **B.** 8 **C.** Vô số. **D.** 6

Bài 20. Cho $\int_0^1\dfrac{(x^2+x)e^x}{x+e^{-x}}dx=a.e+b\ln(e+c)$ với a, b, $c\in\mathbb{Z}$. Tính $P=a+2b-c$?

A. $P=1$ **B.** $P=-1$ **C.** $P=0$ **D.** $P=-2$

Bài 21. Biết tích phân $\int_0^1\dfrac{x^3+2x^2+3}{x+2}dx=\dfrac{1}{a}+b\ln\dfrac{3}{2}\ (a,b>0)$ tìm các giá trị thực của tham số k để $\int_8^{ab}dx<\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(k^2+1)x+2017}{x+2018}$.

A. $k<0$ **B.** $k\neq 0$ **C.** $k>0$ **D.** $k\in\mathbb{R}$

Bài 22. Biết luôn có hai số a và b để $F(x)=\dfrac{ax+b}{x+4}\ (4a-b\neq 0)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn điều kiện $2f^2(x)=[F(x)-1]f'(x)$. Khẳng định nào dưới đây đúng và đầy đủ nhất?

A. $a=1, b=4$ **B.** $a=1, b=-1$ **C.** $a=1, b\in\mathbb{R}\setminus\{4\}$ **D.** $a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

Cho $I=\int_2^3 \frac{x^3+1}{3x-5}dx=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\ln 4$ với a,b,c,d là các số nguyên dương và $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Biết $a+c-2(b+d)=m^2, m>0$. m là số nào sau đây

A. 10 **B.** 11 **C.** 12 **D.** 13

Lời giải

Phân tích. *Bài này là một dạng rất cơ bản của hàm phân thức hữu tỉ. Ta sẽ dùng phép chia đa thức.* $(x^3+1):(3x-5)$ được kết quả $x^3+1=(3x-5)\left(\frac{x^2}{3}+\frac{5}{9}x+\frac{25}{27}\right)+\frac{152}{27}$

$$\Rightarrow I=\int_2^3\left(\frac{x^2}{3}+\frac{5}{9}x+\frac{25}{27}+\frac{\frac{152}{27}}{3x-5}\right)dx=\left.\left(\frac{x^3}{9}+\frac{5x^2}{18}+\frac{25}{27}x+\frac{152}{27}.\frac{1}{3}\ln|3x-5|\right)\right|_2^3$$

$$\Rightarrow I=\left(\frac{149}{18}+\frac{152}{81}\ln 4\right)-\left(\frac{104}{27}+\frac{152}{81}\ln 1\right)=\frac{239}{54}+\frac{152}{81}\ln 4$$

$$\Rightarrow a=239, b=54, c=152, d=81 \Rightarrow a+c-2(b+d)=121=11^2 \Rightarrow m=11$$

Chọn ý **B.**

Câu 2.

Tính nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{\ln x}{(x-2)^3}$

A. $-\frac{\ln x}{2(x-2)^2}-\frac{1}{4(x-2)}-\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|+C$ **B.** $\frac{\ln x}{2(x-2)^2}+\frac{1}{4(x-2)}+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|+C$

C. $\frac{\ln x}{2(x-2)^2}+\frac{1}{4(x-2)}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|+C$ **D.** $\frac{\ln x}{2(x-2)^2}-\frac{1}{4(x-2)}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|+C$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=\frac{1}{(x-2)^3}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{dx}{x} \\ v=-\frac{1}{2(x-2)^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int\frac{\ln x}{(x-2)^3}dx=-\frac{\ln x}{2(x-2)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x(x-2)^2}dx=-\frac{\ln x}{2(x-2)^2}+\frac{1}{2}J$$

J là một hàm phân thức hưu tỉ cơ bản quen thộc.

$$J=\int\frac{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}(x-2)}{x(x-2)^2}dx=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{x(x-2)}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{1}{2-x}-\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{2(2-x)}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|$$

$$\Rightarrow I=-\frac{\ln x}{2(x-2)^2}-\frac{1}{4(x-2)}-\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|+C$$

Chọn ý **A.**

Câu 3.

Cho $I=\int_{\frac{\sqrt{2}-3}{2}}^{\frac{\sqrt{6}-3}{2}}\frac{2x+1}{4x^2+12x+11}dx=\frac{\ln 2}{a}-\frac{\pi\sqrt{2}}{b}$. Biết a,b là các số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức ab

A. 12 **B.** 24 **C.** 48 **D.** 96

Lời giải

Ta có

$$I=\frac{1}{4}\int_{\frac{\sqrt{2}-3}{2}}^{\frac{\sqrt{6}-3}{2}}\frac{8x+4}{4x^2+12x+11}dx=\frac{1}{4}\int_{\frac{\sqrt{2}-3}{2}}^{\frac{\sqrt{6}-3}{2}}\left(\frac{8x+12}{4x^2+12x+11}-\frac{8}{4x^2+12x+11}\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\int_{\frac{\sqrt{2}-3}{2}}^{\frac{\sqrt{6}-3}{2}}\frac{d\left(4x^2+12x+11\right)}{4x^2+12x+11}-\int_{\frac{\sqrt{2}-3}{2}}^{\frac{\sqrt{6}-3}{2}}\frac{2dx}{(2x+3)^2+2}=\frac{1}{4}\ln\left|4x^2+12x+11\right|\Bigg|_{\frac{\sqrt{2}-3}{2}}^{\frac{\sqrt{6}-3}{2}}-J$$

$$=\frac{1}{4}(\ln 8-\ln 4)-J=\frac{1}{4}\ln 2-J$$

Xét J. Đặt $2x+3=\sqrt{2}\tan t, t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow 2dx=\frac{dt\sqrt{2}}{\cos^2 t}$

$$\Rightarrow J=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2\tan^2 t+2}.\frac{dt\sqrt{2}}{\cos^2 t}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi\sqrt{2}}{24}\Rightarrow I=\frac{\ln 2}{4}-\frac{\pi\sqrt{2}}{24}\Rightarrow a=4, b=24\Rightarrow ab=96$$

Chọn ý **D.**

Câu 4.

Cho $\int_{-1}^{1}\frac{x^2-3}{\left(x^2+5x+3\right)\left(2x^2+9x+6\right)}dx=\ln a-\ln b$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $a+b$ là

A. 23 **B.** 24 **C.** 25 **D.** 26

Lời giải

Ta có $I=\int_{-1}^{1}\frac{x^2-3}{\left(x^2+5x+3\right)\left(2x^2+9x+6\right)}dx=\int_{-1}^{1}\frac{1-\frac{3}{x^2}}{\left(x+\frac{3}{x}+5\right)\left(2x+\frac{6}{x}+9\right)}dx$

Đặt $x+\frac{3}{x}=t\Rightarrow\left(1-\frac{3}{x^2}\right)dx=dt$

$$\Rightarrow I=\int_{-4}^{4}\frac{dt}{(t+5)(2t+9)}=\int_{-4}^{4}\left(\frac{2}{2t+9}-\frac{1}{t+5}\right)dt=\ln\left|\frac{2t+9}{t+5}\right|\Bigg|_{-4}^{4}=\ln\frac{17}{9}=\ln 17-\ln 9$$

$$\Rightarrow a=17, b=9\Rightarrow a+b=26$$

Chọn ý **D.**

Câu 5.

Cho $\int_0^1\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx=\frac{\pi\sqrt{a}}{b}$ với a là số nguyên tố. Tính a^2b

A. 75 **B.** 54 **C.** 108 **D.** 45

Lời giải

Ta có $I=\int_0^1\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx=\int_0^1\frac{x^2+x+1-x}{x^4+x^2+1}dx=\int_0^1\frac{dx}{x^2-x+1}-\int_0^1\frac{xdx}{x^4+x^2+1}=J-K$

Xét $J=\int_0^1\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$. Đặt $x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t, t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dx=\frac{\sqrt{3}}{2\cos^2 t}dt$

$$\Rightarrow J=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\frac{3}{4}(\tan^2 t+1)}.\frac{\sqrt{3}}{2\cos^2 t}dt=\frac{2\sqrt{3}}{3}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}dt=\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$$

Xét $K=\int_0^1\frac{x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$. Đặt $x^2+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan u, u\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow xdx=\frac{\sqrt{3}}{4\cos^2 u}du$

$$\Rightarrow K=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\frac{3}{4}(\tan^2 u+1)}.\frac{\sqrt{3}}{4\cos^2 u}du=\frac{\sqrt{3}}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}du=\frac{\pi\sqrt{3}}{18}$$

$$\Rightarrow I=J-K=\frac{\pi\sqrt{3}}{6}\Rightarrow a=3, b=6\Rightarrow a^2b=54$$

Chọn ý **B.**

Câu 6.

Cho $\int_{-1}^1\frac{25}{(x-2)^2(x^2+1)}dx=\frac{a\ln 3+b\pi+c}{6}$. Tính $a+b+c$.

A. 53 **B.** 54 **C.** 55 **D.** 56

Lời giải

Ta có $I=\int_{-1}^1\frac{25}{(x-2)^2(x^2+1)}dx=\int_{-1}^1\frac{25}{(x^2-4x+4)(x^2+1)}dx$

Nhận thấy $(x^2-4x+4)'=2x-4;(x^2+1)'=2x$ nên ta sẽ tách

$$25=A.2x.(x^2-4x+4)+B.(2x-4)(x^2+1)+C.(x^2-4x+4)+D.(x^2+1)$$

$\Rightarrow$ có hệ pt sau $\begin{cases} 2A+2B=0 \\ -8A-4B+C+D=0 \\ 8A+2B-4C=0 \\ -4B+4C+D=1 \end{cases}$ Giải hệ ta được $\begin{cases} A=2 \\ B=-2 \\ C=3 \\ D=5 \end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int_{-1}^{1}\frac{25=2.2x.\left(x^2-4x+4\right)-2\left(2x-4\right)\left(x^2+1\right)+3\left(x^2-4x+4\right)+5\left(x^2+1\right)}{\left(x^2-4x+4\right)\left(x^2+1\right)}dx$$

$$=2\int_{-1}^{1}\frac{2x}{x^2+1}dx-2\int_{-1}^{1}\frac{2x-4}{x^2-4x+4}dx+3\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+1}+5\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2-4x+4}$$

Ta có $\int_{-1}^{1}\frac{2x}{x^2+1}dx=\ln\left|x^2+1\right|\Big|_{-1}^{1}=0$; $\int_{-1}^{1}\frac{2x-4}{x^2-4x+4}dx=\ln\left|x^2-4x+4\right|\Big|_{-1}^{1}=-2\ln 3$

$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2-4x+4}=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\left(x-2\right)^2}=-\frac{1}{x-2}\Big|_{-1}^{1}=\frac{2}{3}$. Xét $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+1}$. Đặt $x=\tan t\Rightarrow dx=\frac{dt}{\cos^2 t}$

$$\Rightarrow\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+1}=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2 t+1}.\frac{dt}{\cos^2 t}=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}dt=\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow I=4\ln 3+\frac{10}{3}+\frac{3\pi}{2}=\frac{24\ln 3+20+9\pi}{6}\Rightarrow a=24,b=20,c=9\Rightarrow a+b+c=53$$

Chọn ý **A.**

Câu 7.

Đặt $F_n=\int_1^2\frac{x^{2n-1}}{\left(x^n+1\right)^2}dx$. Tính $\lim F_n=\int_1^2\frac{x^{2n-1}}{\left(x^n+1\right)^2}dx$

A. 0 **B.** 1 **C.** $\ln 2$ **D.** $+\infty$

Lời giải

Ta có $F_n=\int_1^2\frac{x^{2n-1}}{\left(x^n+1\right)^2}dx=\int_1^2\frac{x^n}{\left(x^n+1\right)}.x^{n-1}dx$

Đặt $u=x^n+1\Rightarrow du=nx^{n-1}dx\Rightarrow F_n=\int_2^{2^n+1}\frac{u-1}{u^2}.\frac{du}{n}=\frac{1}{n}\int_2^{2^n+1}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}\right)du$

$$=\frac{1}{n}\left(\ln u+\frac{1}{u}\right)\Bigg|_2^{2^n+1}=\frac{1}{n}\left(\ln\left(2^n+1\right)+\frac{1}{2^n+1}-\ln 2-\frac{1}{2}\right)=\frac{\ln\left(2^n+1\right)}{n}+\frac{1}{n\left(2^n+1\right)}-\frac{\ln 2+\frac{1}{2}}{n}$$

Có $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n\left(2^n+1\right)}-\frac{\ln 2+\frac{1}{2}}{n}\right)=0$ (Dễ chứng minh)

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(2^n+1\right)}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{2^n.\ln 2}{2^n+1}}{1}=\ln 2$ (Quy tắc l'**Hôpital**) $\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}F_n=\ln 2$

Chọn ý **C.**

Câu 8.

Cho $\int_0^1 \frac{\left(x^3+1\right)^2}{\left(x^2+1\right)^3}dx = \frac{a-b\pi}{8}$. Tính $a-b$?

A. 3 **B.** 6 **C.** 12 **D.** 15

Lời giải

Ta có $\int_0^1 \frac{\left(x^3+1\right)^2}{\left(x^2+1\right)^3}dx = \int_0^1 \frac{x^6+2x^3+1}{\left(x^2+1\right)^3}dx = \int_0^1 \frac{\left(x^2+1\right)^3 - 3x^2\left(x^2+1\right) + 2x\left(x^2+1\right) - 2x}{\left(x^2+1\right)^3}dx$

$$= \int_0^1 dx - 3\int_0^1 \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}dx + \int_0^1 \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx - \int_0^1 \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^3}dx$$

Có $\int_0^1 dx = 1$; $\int_0^1 \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx = \int_0^1 \frac{d\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2} = -\frac{1}{x^2+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$

$$\int_0^1 \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^3}dx = \int_0^1 \frac{d\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^3} = -\frac{1}{2\left(x^2+1\right)^2}\Bigg|_0^1 = \frac{3}{8}$$

$K = \int_0^1 \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}dx$. Đặt $x = \tan t \Rightarrow dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$

$$\Rightarrow K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 t}{\left(\tan^2 t+1\right)^2}.\frac{dt}{\cos^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-\cos 2t\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow I = 1 - 3\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{15-3\pi}{8} \Rightarrow a = 15, b = 3 \Rightarrow a - b = 12$$

Chọn ý **C.**

Câu 9.

Cho $F_n = \int_0^1 \frac{x^{2n-3}}{\left(x^2+1\right)^n}dx$. Giá trị của F_{2001} và F_{2019} lần lượt là

A. $\frac{1}{2001.2^{2001}};\frac{1}{2019.2^{2019}}$ **B.** $\frac{1}{2002.2^{2001}};\frac{1}{2020.2^{2019}}$

C. $\frac{1}{4000.2^{2000}};\frac{1}{4036.2^{2018}}$ **D.** $\frac{1}{4002.2^{2001}};\frac{1}{4038.2^{2019}}$

Lời giải

Đặt $x = \tan t \Rightarrow dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$

$$\Rightarrow F_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^{2n-3}t}{\frac{1}{\left(\cos^2 t\right)^n}}.\frac{dt}{\cos^2 t}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^{2n-3}t.\cos t dt$$

$$=\frac{\sin^{2n-2}}{2n-2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-2}}{2n-2}=\frac{1}{2(n-1).2^{n-1}}\Rightarrow F_{2001}=\frac{1}{4000.2^{2000}};F_{2019}=\frac{1}{4036.2^{2018}}$$

Chọn ý **C.**

Câu 10.

Cho $\int_1^2\frac{x^4-13x^3+13x-1}{x\left(x^4-11x^3+12x^2-11x+1\right)}dx=\frac{\ln 3}{a}-\frac{\ln 5}{b}$, với a,b là cá số nguyên dương. Tính a^2b^3

A. 3 **B.** 27 **C.** 108 **D.** 72

Lời giải

Xét thấy cả tử và mẫu đều chứa đa thức bậc 4 đối xứng nên chia cả tử và mẫu cho x^2 được

$$I=\int_1^2\frac{x^2-13x+\frac{13}{x}-1}{x\left(x^2-11x+12-\frac{11}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}dx=\int_1^2\frac{\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}-13\right)}{x\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-11\left(x+\frac{1}{x}\right)+10\right)}dx$$

Đến đây, ta đã nhìn ra ẩn phụ. Đặt $u=x+\frac{1}{x}\Rightarrow du=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx=\frac{x-\frac{1}{x}}{x}dx$

$$I=\int_2^{\frac{5}{2}}\frac{u-13}{u^2-11u+10}du=\int_2^{\frac{5}{2}}\left(\frac{4}{3}.\frac{1}{u-1}-\frac{1}{3}.\frac{1}{u-10}\right)du=\left(\frac{4}{3}\ln|u-1|-\frac{1}{3}\ln|u-10|\right)\Bigg|_2^{\frac{5}{2}}=\ln 3-\frac{1}{3}\ln 5$$

$$\Rightarrow a=1,b=3\Rightarrow a^2b^3=27$$

Chọn ý **B.**

Câu 11.

Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}/\{0;2\}$ thỏa mãn $f(x)+f\left(\frac{4}{2-x}\right)=x$. Tính $\int_3^5 f(x)dx$

A. $3-\ln 5+2\ln 3$ **B.** $9-3\ln 5+6\ln 3$ **C.** $6-2\ln 5+4\ln 3$ **D.** $12-4\ln 5+8\ln 3$

Lời giải

Có $f(x)+f\left(\frac{4}{2-x}\right)=x\ \ (1)$

Thay x bởi $\frac{4}{2-x}$ vào (1), ta được

$$f\left(\frac{4}{2-x}\right)+f\left(\frac{4}{2-\frac{4}{2-x}}\right)=\frac{4}{2-x}\Rightarrow f\left(\frac{4}{2-x}\right)+f\left(\frac{2(x-2)}{x}\right)=\frac{4}{2-x}\quad (2)$$

Thay x bởi $\frac{4}{2-x}$ vào (2), ta được $f\left(\frac{2(x-2)}{x}\right)+f(x)=\frac{2(x-2)}{x}\quad (3)$

Lấy (1) cộng (3) rồi trừ đi (2), được

$$2f(x)=x+\frac{2(x-2)}{x}-\frac{2}{2-x}\Rightarrow f(x)=\frac{x}{2}+1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x-2}$$

$$\Rightarrow \int_3^5 f(x)dx=\left(\frac{x^2}{4}+x-2\ln|x|+2|x-2|\right)\Bigg|_3^5=6-2\ln 5+4\ln 3$$

Chọn ý **C.**

Câu 12.

Đâu là một họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{5x^2+1}{x^4+1}$

A. $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln\left|\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right|+3\arctan\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right)\right)+C$

B. $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln\left|\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right|-3\arctan\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right)\right)+C$

C. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln\left|\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right|-3\arctan\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right)\right)+C$

D. $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln\left|\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right|+3\arctan\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right)\right)+C$

Lời giải

Đặt $F(x)=\int f(x)dx=\int\frac{5x^2+1}{x^4+1}dx=2\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx+3\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=2G(x)+3H(x)$

Xét $G(x)=\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx=\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}$

$$=\int\frac{dt}{t^2-2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+C=\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right|+C=\ln\left|\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right|+C$$

Xét $H(x)=\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\int \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}$

Đặt $x-\frac{1}{x}=\sqrt{2}\tan u\Rightarrow\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx=\sqrt{2}\frac{du}{\cos^2 u}$

$$\Rightarrow H(x)=\int \frac{1}{2\left(\tan^2 u+1\right)}.\frac{du\sqrt{2}}{\cos^2 u}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int du=\frac{u}{\sqrt{2}}+C=\frac{\arctan\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}}+C$$

$$\Rightarrow F(x)=2G(x)+3H(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln\left|\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right|+3\arctan\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right)\right)+C$$

Chọn ý **D.**

Câu 13.

Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}/\left\{-\frac{1}{2};1\right\}$ thỏa mãn $f\left(\frac{3x-1}{2x+1}\right)=\frac{(x-3)^2}{(x-2)^2}$. Tính $\int_2^4 f(x)dx$

A. $\frac{148}{75}-\frac{7\ln 3}{25}$ **B.** $\frac{296}{75}-\frac{14\ln 3}{25}$ **C.** $\frac{148}{25}-\frac{7\ln 3}{75}$ **D.** $\frac{296}{25}-\frac{14\ln 3}{75}$

Lời giải

Đặt $u=\frac{3x-1}{2x+1}\Rightarrow 2xu+u=3x-1\Rightarrow x=\frac{u+1}{3-2u}$

$$\Rightarrow f(u)=\frac{\left(\frac{u+1}{3-2u}-3\right)^2}{\left(\frac{u+1}{3-2u}-2\right)^2}=\frac{(7u-8)^2}{(5u-5)^2}\Rightarrow\int_2^4 f(x)dx=\frac{1}{25}\int_2^4\frac{\left(7(x-1)-1\right)^2}{(x-1)^2}dx$$

$$=\frac{1}{25}\int_2^4\frac{49(x-1)^2-14(x-1)+1}{(x-1)^2}dx=\frac{1}{25}\int_2^4\left(49-\frac{14}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{25}\left(49x-14\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}\right)\Bigg|_2^4=\frac{296}{75}-\frac{14\ln 3}{25}$$

Chọn ý **B.**

Câu 14.

Cho đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn $(x-1)P(x+1)-(x+2)P(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $P(2)=6$. Tính $I=\int_{-1}^0\frac{P(x)}{x^2+x+1}dx$

A. $-\frac{2}{3}+\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ **B.** $-\frac{3}{2}-\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ **C.** $-\frac{2}{3}-\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ **D.** $-\frac{3}{2}+\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

Có $(x-1)P(x+1)-(x+2)P(x)=0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ (*)

Thay $x=1$ và (*) $\Rightarrow P(1)=0$

Thay $x=-2$ và (*) $\Rightarrow P(-1)=0$

Thay $x=0$ và (*) $\Rightarrow P(0)=0$

$\Rightarrow P(x)$ nhận $x=0;x=\pm1$ là nghiệm $\Rightarrow P(x)=(x^3-x)Q(x)$

Thay $P(x)$ và (*) được $(x-1)(x^3+3x^2+2)Q(x+1)-(x+2)(x^3-x)Q(x)=0$

$\Rightarrow Q(x+1)=Q(x)\ \forall x\Rightarrow Q(x)$ là đa thức hằng

$\Rightarrow P(x)=a(x^3-x)$. Mà $P(2)=6\Rightarrow a=1\Rightarrow P(x)=x^3-x$

$$\Rightarrow I=\int_{-1}^{0}\frac{x^3-x}{x^2+x+1}dx=\int_{-1}^{0}\frac{x^3-1+1-x}{x^2+x+1}dx=\int_{-1}^{0}(x-1)dx+\int_{-1}^{0}\frac{1-x}{x^2+x+1}dx$$
$$=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0}\frac{3}{x^2+x+1}dx-\int_{-1}^{0}\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx\right)$$

Có $\int_{-1}^{0}\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx=\ln\left|x^2+x+1\right|\Big|_{-1}^{0}=0$

Xét $\int_{-1}^{0}\frac{3}{x^2+x+1}dx=\int_{-1}^{0}\frac{3}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{3}{\frac{3}{4}(\tan^2u+1)}.\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{du}{\cos^2u}$

$$=2\sqrt{3}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}du=\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}\Rightarrow I=-\frac{3}{2}+\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$$

Chọn ý **D.**

Câu 15.

Cho $f(x)$ thỏa mãn $(x-y)f(x+y)-(x+y)f(x-y)=4xy(x^2-y^2)$. Biết $f(2)=16$, tính $I=\int_0^1\frac{f(x)-4x+4}{x^2+3x+2}dx$

A. $4\ln2-\ln3+\frac{3}{2}$ **B.** $4\ln3-\ln2+\frac{5}{2}$ **C.** $4\ln3-\ln2-\frac{5}{2}$ **D.** $4\ln3-\ln2-\frac{3}{2}$

Lời giải

Đặt $\begin{cases}u=x+y\\ v=x-y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{u+v}{2}\\ y=\frac{u-v}{2}\end{cases}$. Đẳng thức đề bài $\Leftrightarrow vf(u)-uf(v)=(u^2-v^2)uv$

Thay $v=2\Rightarrow 2f(u)-uf(2)=(u^2-4).u.2\Rightarrow f(u)=u^3+4u$

$$\Rightarrow I=\int_0^1\frac{x^3+4}{x^2+3x+2}dx=\int_0^1\left(x-3+\frac{7x+10}{(x+1)(x+2)}\right)dx=-\frac{5}{2}+\int_0^1\left(\frac{4}{x+2}+\frac{3}{x+1}\right)dx$$
$$=-\frac{5}{2}+\left(4\ln|x+2|+3\ln|x+1|\right)\Big|_0^1=-\frac{5}{2}+4\ln3-\ln2$$

Chọn ý **C.**

Câu 16.

Cho $f(x)$ và $g(x)$ xác định $\forall x$ thỏa mãn $\begin{cases} f(2x-1)+g(1-x)=x+1 & (1) \\ f\left(\dfrac{x}{x+1}\right)+2g\left(\dfrac{1}{2x+2}\right)=3 & (2) \end{cases}$.

Tính giá trị của tích phân $\int_5^{10}\dfrac{g(x)}{f(x)}dx$

A. $5+\ln 2$ **B.** $5-\ln 2$ **C.** $2+\ln 5$ **D.** $2-\ln 5$

Lời giải

Đặt $\dfrac{x}{x+1}=2u-1\Rightarrow x=\dfrac{2u-1}{2-2u}$, thay vào (2) được

$$f(2u-1)+2g\left(\frac{1}{2.\dfrac{2u-1}{2-2u}+2}\right)=3\Leftrightarrow f(2x-1)+2f(1-x)=3 \quad (3)$$

Lấy (3) trừ đi (1), được $g(1-x)=2-x\Rightarrow g(x)=x+1$

Thay vào (1) được $f(2x-1)+2-x=x=1\Rightarrow f(2x-1)=2x-1\Rightarrow f(x)=x$

$$\Rightarrow\int_5^{10}\frac{g(x)}{f(x)}dx=\int_5^{10}\frac{x+1}{x}dx=\left|\left(x+\ln|x|\right)\right|_5^{10}=5+\ln 2$$

Chọn ý **A.**

Câu 17.

Cho $f(x)$ và $g(x)$ thỏa mãn $\dfrac{2}{(x+1)^2}f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=\dfrac{4}{(x+2)^2}g\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)+\dfrac{x-3}{x+3}$.

Biết rằng $\int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{3}}g(x)dx=1;\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{9}}g(x)dx=2$. Tính $P=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{5}}f(x)dx+2\int_{\frac{5}{7}}^{\frac{3}{4}}f(x)dx$

A. $8+6\ln\dfrac{7}{6}-12\ln\dfrac{10}{9}$ **B.** $8+6\ln\dfrac{7}{6}+12\ln\dfrac{10}{9}$

C. $8-6\ln\dfrac{7}{6}+12\ln\dfrac{10}{9}$ **D.** $8-6\ln\dfrac{7}{6}-12\ln\dfrac{10}{9}$

Lời giải

Có $\dfrac{2}{(x+1)^2}f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=\dfrac{4}{(x+2)^2}g\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)+\dfrac{x-3}{x+3}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\int_3^4 f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right).\dfrac{2dx}{(x-1)^2}=\int_3^4 g\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right).\dfrac{4dx}{(x+2)^2}+\int_3^4\dfrac{x-3}{x+3}dx \\ \int_6^7 f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right).\dfrac{2dx}{(x-1)^2}=\int_6^7 g\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right).\dfrac{4dx}{(x+2)^2}+\int_6^7\dfrac{x-3}{x+3}dx\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{5}} f(x)dx = \int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{3}} g(x)dx + \int_3^4 \frac{x-3}{x+3}dx = 1 + \int_3^4 \frac{x-3}{x+3}dx \\ \int_{\frac{5}{7}}^{\frac{3}{4}} f(x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{9}} g(x)dx + \int_6^7 \frac{x-3}{x+3}dx = 2 + \int_6^7 \frac{x-3}{x+3}dx \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = 1 + \int_3^4 \frac{x-3}{x+3}dx + 2\left(2 + \int_6^7 \frac{x-3}{x+3}dx\right)$$

$$= 5 + \left(x - 6\ln|x+3|\right)\Big|_3^4 + 2\left(x - 6\ln|x+3|\right)\Big|_6^7 = 8 - 6\ln\frac{7}{6} - 12\ln\frac{10}{9}$$

Chọn ý **D.**

Câu 18.

Cho $f(x)$ thỏa mãn $f(x)+f(y) = \frac{xy}{x^2+y^2+1}$. Tính $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} f(x)dx$

A. $\frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{\pi}{16\sqrt{2}}$ **B.** $\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8\sqrt{2}}$ **C.** $\frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$ **D.** $\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

Lời giải

Cho $x = y \Rightarrow 2f(x) = \frac{x^2}{2x^2+1} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}.\frac{x^2}{2x^2+1}$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^2}{2x^2+1}dx = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{2x^2}{2x^2+1}dx = \frac{1}{4}\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dx - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{2x^2+1}dx\right) = \frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4}J$$

Xét J. Đặt $x\sqrt{2} = \tan t \Rightarrow J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 t+1}.\frac{dt}{\sqrt{2}\cos^2 t} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \Rightarrow I = \frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{\pi}{16\sqrt{2}}$

Chọn ý **A.**

Câu 19.

Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên dương k thỏa mãn bất phương trình $\int_1^2 e^{kx}dx < \frac{2018.e^k - 2018}{k}$. Số phần tử của tập hợp S bằng.

A. 7 **B.** 8 **C.** Vô số. **D.** 6

Lời giải

Ta có: $\int_1^2 e^{kx}dx = \left(\frac{1}{k}e^{kx}\right)\Big|_1^2 = \frac{e^{2k}-e^k}{k}$

$$\int_1^2 e^{kx}dx < \frac{2018.e^k - 2018}{k} \Leftrightarrow \frac{e^{2k}-e^k}{k} < \frac{2018.e^k - 2018}{k}$$

$$\Leftrightarrow e^k\left(e^k - 1\right) < 2018\left(e^k - 1\right)(k > 0)$$

$$\Leftrightarrow \left(e^k - 1\right)\left(e^k - 2018\right) < 0 \Leftrightarrow 1 < e^k < 2018 \Leftrightarrow 0 < k < \ln 2018 \approx 7.6$$

Do k nguyên dương nên ta chọn được $k \in S$ (với $S = \{1;2;3;4;5;6;7\}$).

Suy ra số phần tử của S là 7.

Chọn ý **A.**

Câu 20.

Cho $\int_0^1 \frac{(x^2+x)e^x}{x+e^{-x}}dx = a.e + b\ln(e+c)$ với a, b, $c \in \mathbb{Z}$. Tính $P = a+2b-c$?

A. $P=1$ **B.** $P=-1$ **C.** $P=0$ **D.** $P=-2$

Lời giải

Ta có $I = \int_0^1 \frac{(x^2+x)e^x}{x+e^{-x}}dx = \int_0^1 \frac{(x+1)e^x xe^x}{xe^x+1}dx$.

Đặt $t = xe^x+1 \Rightarrow dt = (1+x)e^x dx$.

Đổi cận $x=0 \Rightarrow t=1$; $x=1 \Rightarrow t=e+1$.

Khi đó: $I = \int_1^{e+1} \frac{t-1}{t}dt = \int_1^{e+1}\left(1-\frac{1}{t}\right)dt = (t-\ln|t|)\Big|_1^{e+1} = e-\ln(e+1)$.

Suy ra: $a=1$, $b=-1$, $c=1$. Vậy $P = a+2b-c = -2$.

Chọn ý **D.**

Câu 21.

Biết tích phân $\int_0^1 \frac{x^3+2x^2+3}{x+2}dx = \frac{1}{a}+b\ln\frac{3}{2}\ (a,b>0)$ tìm các giá trị thực của tham số k để $\int_8^{ab} dx < \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(k^2+1)x+2017}{x+2018}$.

A. $k<0$ **B.** $k \neq 0$ **C.** $k>0$ **D.** $k \in \mathbb{R}$

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có:

$$\int_0^1 \frac{x^3+2x^2+3}{x+2}dx = \int_0^1\left(x^2+\frac{3}{x+2}\right)dx = \frac{1}{3}x^3+3\ln|x+2|\Big|_0^1 = \frac{1}{3}+3\ln\frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow \int_8^{ab}dx = \int_8^9 dx = 1$$

Mặt khác ta lại có $\int_8^{ab}dx < \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(k^2+1)x+2017}{x+2018} \Rightarrow 1 < \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(k^2+1)x+2017}{x+2018}$

Mà $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(k^2+1)x+2017}{x+2018} = k^2+1$.

Vậy để $\int_8^{ab}dx < \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(k^2+1)x+2017}{x+2018}$ thì $1<k^2+1 \Rightarrow k^2>0 \Rightarrow k\neq 0$.

Chọn ý **B.**

Câu 22.

Biết luôn có hai số a và b để $F(x)=\dfrac{ax+b}{x+4}$ $(4a-b\neq 0)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn điều kiện $2f^2(x)=\left[F(x)-1\right]f'(x)$. Khẳng định nào dưới đây đúng và đầy đủ nhất?

A. $a=1, b=4$ **B.** $a=1, b=-1$ **C.** $a=1, b\in\mathbb{R}\setminus\{4\}$ **D.** $a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}$

Lời giải

Ta có $F(x)=\dfrac{ax+b}{x+4}$ là nguyên hàm của $f(x)$ nên $f(x)=F'(x)=\dfrac{4a-b}{(x+4)^2}$ và $f'(x)=\dfrac{2b-8a}{(x+4)^3}$.

Do đó $2f^2(x)=\left(F(x)-1\right)f'(x) \Leftrightarrow \dfrac{2(4a-b)^2}{(x+4)^4}=\left(\dfrac{ax+b}{x+4}-1\right)\dfrac{2b-8a}{(x+4)^3}$

$$\Leftrightarrow 4a-b=-(ax+b-x-4) \Leftrightarrow (x+4)(1-a)=0 \Leftrightarrow a=1 \text{ (do } x+4\neq 0)$$

Với $a=1$ mà $4a-b\neq 0$ nên $b\neq 4$.

Vậy $a=1$, $b\in\mathbb{R}\setminus\{4\}$.

Chọn ý **C.**

CHƯƠNG 2 NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

Kỹ thuật từng phần là một kỹ thuật khá cơ bản nhưng rất hiệu quả trong các bài toán tính tích phân, ở trong phần này ta sẽ không nhắc lại các bài toán cơ bản nữa mà chỉ đề cập tới một số bài toán nâng cao. Trước tiên ta sẽ nhắc lại và chứng minh công thức tính nguyên hàm – tích phân từng phần.

Giả sử $u(x), v(x)$ *là các hàm liên tục trên miền D khi đó ta có:*

$$d(uv) = udv + vdu \Rightarrow \int d(uv) = \int udv + \int vdu$$
$$\Leftrightarrow uv = \int udv + \int vdu \Leftrightarrow \int udv = uv - \int vdu$$

Chú ý. Cần phải lựa chọn u và dv hợp lí sao cho ta dễ dàng tìm được v và nguyên hàm $\int vdu$ dễ tính hơn $\int udv$. Ngoài ra ta còn chú ý tới thứ tự đặt của u *Nhất – Log, Nhì – Đa, Tam – Lượng, Tứ - Mũ* . Nghĩa là nếu có $\ln$ hay $\log_a x$ thì chọn $u = \ln$ hay $u = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ và $dv =$ còn lại. Nếu không có $\ln;\ \log$ thì chọn $u =$ đa thức và $dv =$ còn lại. Nếu không có log, đa thức, ta chọn $u =$ lượng giác,….cuối cùng là mũ.

Ta thường gặp các dạng sau ,với $P(x)$ ***là đa thức***

Dạng đặt	$I = \int P(x)\begin{bmatrix}\sin x\\ \cos x\end{bmatrix}dx$	$I = \int P(x)e^{ax+b}dx$	$I = \int P(x)\ln(mx+n)dx$	$I = \int \begin{bmatrix}\sin x\\ \cos x\end{bmatrix}e^x dx$
u	$P(x)$	$P(x)$	$\ln(mx+n)$	$\begin{bmatrix}\sin x\\ \cos x\end{bmatrix}$
dv	$\begin{bmatrix}\sin x\\ \cos x\end{bmatrix}dx$	$e^{ax+b}dx$	$P(x)dx$	$e^x dx$

- *Lưu ý rằng bậc của đa thức và bậc của ln tương ứng với số lần lấy nguyên hàm.*
- *Dạng mũ nhân lượng giác là dạng nguyên hàm từng phần luân hồi.*

MỘT SỐ BÀI TOÁN CƠ BẢN

Câu 1.

Tìm các họ nguyên hàm sau đây

a) $\int (x+2)e^{2x}dx$ b) $\int (2x-1)\cos x\,dx$

c) $\int (3x^2-1)\ln x\,dx$ d) $\int (4x-1)\ln(x+1)dx$

Lời giải

a) Xét $\int (x+2)e^{2x}dx$. Đặt $\begin{cases} u = x+2 \\ dv = e^{2x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

Khi đó $\int (x+2)e^{2x}dx = \frac{1}{2}(x+2)e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx = \frac{1}{2}(x+2)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$

Vậy $\int (x+2)e^{2x}dx = \frac{1}{4}(2x+3)e^{2x} + C$.

b) Xét $\int (2x-1)\cos x\,dx$. Đặt $\begin{cases} u = 2x-1 \\ dv = \cos x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = \sin x \end{cases}$

Khi đó $\int (2x-1)\cos x\,dx = (2x-1)\sin x - \int 2\sin x\,dx = (2x-1)\sin x + 2\cos x + C$

Vậy $\int (2x-1)\cos x dx = (2x-1)\sin x + 2\cos x + C$

c) Xét $\int (3x^2-1)\ln x\,dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = (3x^2-1)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = x^3 - x \end{cases}$

Khi đó $\int (3x^2-1)\ln x\,dx = (x^3-x)\ln x - \int (x^2-1)dx = (x^3-x)\ln x - \left(\frac{1}{3}x^3 - x\right) + C$.

d) Xét $\int (4x-1)\ln(x+1)dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = (4x-1)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x+1}dx \\ v = 2x^2 - x \end{cases}$

Khi đó $\int (4x-1)\ln(x+1)dx = (2x^2-x)\ln(x+1) - \int \frac{2x^2-x}{x+1}dx$

$$= (2x^2-x)\ln(x+1) - \int \left(2x - 3 + \frac{3}{x+1}\right)dx = (2x^2-x)\ln(x+1) - \left(x^2 - 3x + 3\ln(x+1)\right) + C$$

$$= (2x^2 - x - 3)\ln(x+1) - x^2 + 3x + C.$$

Câu 2.

Hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $\int f(x)\sin x dx = -f(x)\cos x + \int \pi^x \cos x dx$. Tìm $y = f(x)$?

Lời giải

Áp dụng công thức nguyên hàm từng phần ta có:

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = -\cos x \end{cases} \Rightarrow \int f(x)\sin x dx = -f(x)\cos x + \int f'(x)\cos x dx$

Mà theo giả thiết $\int f(x)\sin x dx = -f(x)\cos x + \int \pi^x \cos x dx$.

Suy ra $f'(x) = \pi^x \Rightarrow f(x) = \int \pi^x dx = \frac{\pi^x}{\ln \pi} + C$.

Câu 3.

Tìm nguyên hàm $I = \int x\ln(2+x^2)dx$

Lời giải

Cách giải thông thường. Đặt $\begin{cases} u = \ln(2+x^2) \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{2x}{2+x^2}dx \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

Khi đó: $I = \frac{x^2}{2}\ln(2+x^2) - \int \frac{x^3}{2+x^2}dx = \frac{x^2}{2}\ln(2+x^2) - I_1$.

+ Tìm $I_1 = \int \frac{x^3}{2+x^2}dx$. Đặt $t = 2+x^2 \Rightarrow dt = 2xdx \Leftrightarrow xdx = \frac{dt}{2}$

$$\Rightarrow I_1 = \int \frac{t-2}{t}.\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{2}{t}\right)dt = \frac{1}{2}(t-2\ln|t|)+C = \frac{1}{2}\left[(2+x^2)-2\ln(2+x^2)\right]+C.$$

$$\Rightarrow I = \frac{x^2}{2}\ln(2+x^2) - I_1 = \frac{x^2}{2}\ln(2+x^2) - \frac{1}{2}\left[(2+x^2)-2\ln(2+x^2)\right]+C$$

$$= \frac{2+x^2}{2}\ln(2+x^2) - \frac{2+x^2}{2} + C = \frac{2+x^2}{2}\ln(2+x^2) - \frac{x^2}{2} + C.$$

Cách giải theo "kĩ thuật chọn hệ số".

Đặt $\begin{cases} u = \ln(2+x^2) \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{2x}{2+x^2}dx \\ v = \dfrac{x^2}{2}+1 = \dfrac{2+x^2}{2} \end{cases}$. Vì $v = \int xdx = \frac{x^2}{2} + C$ và ta chọn $C = 1$ nên $v = \frac{x^2}{2}+1$. Khi đó: $I = \frac{2+x^2}{2}\ln(2+x^2) - \int xdx = \frac{2+x^2}{2}\ln(2+x^2) - \frac{x^2}{2} + C.$

Nhận xét. *Qua bài toán trên chúng ta được làm quen thêm một kĩ thuật chọn hệ số cho phương pháp tích phân từng phân. Kĩ thuật này được trình bày sau đây.*

Kĩ thuật chọn hệ số.

Khi đi tính tích phân từng phần, ở khâu đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = g(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = G(x) + C \end{cases}$ với C là hằng số bất kỳ (chọn số nào cũng được). Và theo một "thói quen" thì chúng ta thường chọn $C = 0$. Nhưng việc chọn $C = 0$ lại làm cho việc tìm nguyên hàm (tích phân) $\int vdu$ không được "đẹp" cho lắm. Vì ta có quyền chọn C là số thực bất kì nên ta sẽ chọn hệ số C thích hợp mà ở đó biểu thức vdu là đơn giản nhất. Cách làm như thế được gọi là **"kĩ thuật chọn hệ số"**.

Sau đây ta sẽ cùng tìm hiểu một số ví dụ để hiểu rõ hơn về phương pháp này!

Câu 4.

Tìm nguyên hàm $\int \frac{\ln(\sin x + 2\cos x)}{\cos^2 x}dx$

Lời giải

Cách giải thông thường.

Đặt $\begin{cases} u = \ln(\sin x + 2\cos x) \\ dv = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{\cos x - 2\sin x}{\sin x + 2\cos x}dx \\ v = \tan x \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \tan x \ln(\sin x + 2\cos x) - \int \frac{\tan x(\cos x - 2\sin x)}{\sin x + 2\cos x}dx.$$

Khi đó việc đi tìm $\int \frac{\tan x(\cos x - 2\sin x)}{\sin x + 2\cos x}dx$ sẽ trở nên rất khó khăn. Lúc này cần sự "lên tiếng" của *"kĩ thuật chọn hệ số"*.

Cách giải theo "kĩ thuật chọn hệ số".

Đặt $\begin{cases} u = \ln(\sin x + 2\cos x) \\ dv = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{\cos x - 2\sin x}{\sin x + 2\cos x}dx \\ v = \tan x + C = \dfrac{\sin x + C\cos x}{\cos x} \end{cases}$

Khi đó: $\int vdu = \int \frac{\sin x + C\cos x}{\cos x}.\frac{\cos x - 2\sin x}{\sin x + 2\cos x}dx$. Để nguyên hàm này đơn giản ta "Chọn $C = 2$" lúc này ta được $\int vdu = \int \frac{\cos x - 2\sin x}{\cos x}dx$.

$$\Rightarrow I = \tan x \ln(\sin x + 2\cos x) - \int \frac{\cos x - 2\sin x}{\cos x}dx = \tan x \ln(\sin x + 2\cos x) - x - 2\ln|\cos x| + C.$$

Câu 5.

Tìm nguyên hàm $\int x^2 \sin(1 - 3x)dx$

Lời giải

+ Xét $I=\int x^2\sin(1-3x)dx$. Đặt $\begin{cases}u=x^2\\ dv=\sin(1-3x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2xdx\\ v=\dfrac{1}{3}\cos(1-3x)\end{cases}$.

Khi đó thì $I=\int x^2\sin(1-3x)dx=\frac{1}{3}x^2\cos(1-3x)-\int\frac{2}{3}x\cos(1-3x)dx$

+ Xét $J=\int\frac{2}{3}x\cos(1-3x)dx$. Đặt lại $\begin{cases}u=\dfrac{2}{3}x\\ dv=\cos(1-3x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{2}{3}dx\\ v=-\dfrac{1}{3}\sin(1-3x)\end{cases}$.

$$J=\int\frac{2}{3}x\cos(1-3x)dx=-\frac{2}{9}x\sin(1-3x)+\int\frac{2}{9}\sin(1-3x)dx$$
$$=-\frac{2}{9}x\sin(1-3x)+\frac{2}{27}\cos(1-3x)+C$$

Vậy, $I=\int x^2\sin(1-3x)dx=\frac{1}{3}x^2\cos(1-3x)+\frac{2}{9}x\sin(1-3x)-\frac{2}{27}\cos(1-3x)+C$.

Lưu ý. *Trên đây là bài giải chuẩn, tuy nhiên, nếu chỉ cần tìm đáp số cuối cùng ta có thể thực hiện theo phương pháp từng phân theo sơ đồ đường chéo.*

Phương pháp từng phần bằng sơ đồ đường chéo.

- ***Bước 1:*** Chia thành 2 cột:
  + ***Cột 1:*** Cột u luôn lấy đạo hàm đến 0 .
  + ***Cột 2:*** Cột dv luôn lấy nguyên hàm cho đến khi tương ứng với cột 1.
- ***Bước 2:*** Nhân chéo kết quả của 2 cột với nhau. Dấu của phép nhân đầu tiên sẽ có dấu $(+)$, sau đó đan dấu $(-),(+),(-),...$
- ***Bước 3:*** Kết quả bài toán là tổng các phép nhân vừa tìm được.

Áp dụng cho bài toán ở trên

Lấy đạo hàm	**Dấu**	**Lấy nguyên hàm**
$u=x^2$	$+$	$dv=\sin(1-3x)$
$2x$	$-$	$\frac{1}{3}\cos(1-3x)$
2	$+$	$-\frac{1}{9}\sin(1-3x)$
0		$-\frac{1}{27}\cos(1-3x)$

Kết quả $I=\int x^2\sin(1-3x)dx=\frac{1}{3}x^2\cos(1-3x)+\frac{2}{9}x\sin(1-3x)-\frac{2}{27}\cos(1-3x)+C$.

Tiếp theo là một bài toán sử dụng phương pháp từng phần bằng sơ đồ đường chéo.

Câu 6.

Tìm nguyên hàm $\int x^5e^xdx$

Lời giải

Nhận xét: Về mặt lý thuyết bài này ta hoàn toàn có thể giải bằng phương pháp tích phân từng phần. Song ta phải sử dụng tới 5 lần tích phân từng phần (vì bậc của đa thức x^5 là 5 khá dài). Lúc này ta sẽ làm theo sơ đồ tích phân đường chéo.

Đạo hàm	**Dấu**	**Nguyên hàm**
$u=x^5$		$dv=e^x$
$5x^4$	+	e^x
$20x^3$	–	e^x
$60x^2$	+	e^x
$120x$	–	e^x
120	+	e^x
0	–	e^x

Kết quả tìm được: $\int x^5e^xdx=x^5e^x-5x^4e^x+20x^3e^x-60x^2e^x+120xe^x-120e^x+C$

$$=\left(x^5-5x^4+20x^3-60x^2+120x-120\right)e^x+C.$$

Cách 2. Ta sử dụng công thức: $\int\left[f(x)+f'(x)\right]e^xdx=f(x)e^x+C\quad(*)$

Thật vậy $\left[f(x)e^x+C\right]'=f'(x)e^x+f(x)e^x=\left[f(x)+f'(x)\right]e^x$ (đpcm)

Áp dụng công thức $(*)$ ta được:

$$I=\int x^5e^xdx=\int\left[\left(x^5+5x^4\right)-\left(5x^4+20x^3\right)+\left(20x^3+60x^2\right)-\left(60x^2+120x\right)+(120x+120)-120\right]e^xdx$$

$$=\int\left(x^5+5x^4\right)e^xdx-5\int\left(x^4+4x^3\right)e^xdx+20\int\left(x^3+3x^2\right)e^xdx$$

$$-60\int\left(x^2+2x\right)e^xdx+120\int(x+1)e^xdx-120\int xdx$$

$$=\left(x^5-5x^4+20x^3-60x^2+120x-120\right)e^x+C$$

Tích phân đường chéo nguyên hàm lặp

Nếu ta tính tích phân theo sơ đồ đường chéo mà lặp lại nguyên hàm ban đầu cần tính (không kể dấu và hệ số) thì dừng lại luôn tại dòng đó, không chia dòng nữa.

Cách tính. Các dòng vẫn nhân chéo như các trường hợp trên, nhưng thêm $\int$(tích phân của 2 phần tử dòng cuối cùng) vẫn sử dụng quy tắc đan dấu.

Sau đây là ví dụ minh họa.

Câu 7.

Tìm nguyên hàm $I=\int e^{2x}\cos 3x dx$

Lời giải

Sử dụng sơ đồ đường chéo ta có!

Đạo hàm	**Dấu**	**Nguyên hàm**
$u=\cos 3x$	$+$	$dv=e^{2x}$
$-3\sin 3x$	$-$	$\frac{1}{2}e^{2x}$
$-9\cos 3x$	$+$	$\frac{1}{4}e^{2x}$

Ta có $I=\frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x-(-3\sin 3x)\frac{1}{4}e^{2x}+\int(-9\cos 3x)\frac{1}{4}e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x+\frac{3}{4}e^{2x}\sin 3x-\frac{9}{4}I$

$$\Rightarrow \frac{13}{4}I=\frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x+\frac{3}{4}e^{2x}\sin 3x+C\Rightarrow I=\frac{2}{13}e^{2x}\cos 3x+\frac{3}{13}e^{2x}\sin 3x+C$$

Câu 8.

Tìm nguyên hàm $\int e^{x}\sin x dx$

Lời giải

Cách 1. Cách giải từng phần thông thường

- Xét $F(x)=\int e^{x}\sin x dx$. Đặt $\begin{cases}u=\sin x\\ dv=e^{x}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\cos x dx\\ v=e^{x}\end{cases}$.

  Khi đó: $F(x)=e^{x}\sin x-\int e^{x}\cos x dx=e^{x}\sin x-G(x)$ (1)

- Với $G(x)=\int e^{x}\cos x dx$. Đặt $\begin{cases}u=\cos x\\ dv=e^{x}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=-\sin x dx\\ v=e^{x}\end{cases}$.

  Khi đó: $G(x)=e^{x}\cos x+\int e^{x}\sin x dx+C'=e^{x}\cos x+F(x)+C'$ (2)

Từ $(1),(2)$ ta có $F(x)=e^{x}\sin x-e^{x}\cos x-F(x)-C'\Rightarrow F(x)=\frac{e^{x}(\sin x-\cos x)}{2}-\frac{C'}{2}$

Vậy $F(x)=\int e^{x}\sin x dx=\frac{e^{x}(\sin x-\cos x)}{2}+C$.

Ghi nhớ. Gặp $\int e^{mx+n}.\sin(ax+b)dx$ hoặc $\int e^{mx+n}.\cos(ax+b)dx$ ta luôn thực hiện phương pháp nguyên hàm từng phần 2 lần liên tiếp.

Cách 2. (Phương pháp tích phân đường chéo)

Đạo hàm (u)	**Dấu**	**Nguyên hàm** (dv)
$\sin x$	+	e^x
$\cos x$	−	e^x
$-\sin x$	+	e^x

$$\Rightarrow I = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx \Leftrightarrow I = e^x\left(\sin x - \cos x\right) - I \Leftrightarrow I = \frac{e^x\left(\sin x - \cos x\right)}{2} + C.$$

Câu 9.

Tìm nguyên hàm $I = \int e^{x+1}.\cos\left(2x+1\right)dx$

Lời giải

Cách 1. Cách giải từng phần thông thường

Đặt: $\begin{cases} u = \cos\left(2x+1\right) \\ dv = e^{x+1}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -2\sin\left(2x+1\right)dx \\ v = e^{x+1} \end{cases}$

Khi đó $I = e^{x+1}\cos\left(2x+1\right) + 2\int e^{x+1}\sin\left(2x+1\right)dx = e^{x+1}\cos\left(2x+1\right) + 2J$

Xét tích phân $J = \int e^{x+1}.\sin(2x+1).dx$

Đặt $\begin{cases} u = \sin(2x+1) \\ dv = e^{x+1}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2\cos\left(2x+1\right)dx \\ v = e^{x+1} \end{cases}$

Khi đó $J = e^{x+1}\sin\left(2x+1\right) - 2\int e^{x+1}\cos\left(2x+1\right)dx = e^{x+1}\sin\left(2x+1\right) - 2I + C$

Suy ra $I = e^{x+1}\cos\left(2x+1\right) + 2J = e^{x+1}\cos\left(2x+1\right) + 2\left[e^{x+1}\sin\left(2x+1\right) - 2I\right] + C$

$$\Rightarrow 5I = e^{x+1}\cos\left(2x+1\right) + 2e^{x+1}\sin\left(2x+1\right) \Leftrightarrow I = \frac{1}{5}e^{x+1}\left(\cos\left(2x+1\right) + 2\sin\left(2x+1\right)\right) + C.$$

Cách 2. (Phương pháp đường chéo)

Đạo hàm (u)	**Dấu**	**Nguyên hàm** (dv)
$\cos\left(2x+1\right)$	+	e^{x+1}
$-2\sin\left(2x+1\right)$	−	e^{x+1}
$-4\cos\left(2x+1\right)$	+	e^{x+1}

$$\Rightarrow I = e^{x+1}\cos\left(2x+1\right) + 2e^{x+1}\sin\left(2x+1\right) - 4\int e^{x+1}\cos\left(2x+1\right)$$

$$=e^{x+1}\left[\cos(2x+1)+2\sin(2x+1)\right]-4I\Rightarrow I=\frac{e^{x+1}\left[\cos(2x+1)+2\sin(2x+1)\right]}{5}+C.$$

Tính các nguyên hàm sau.

1. $I=\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\left(\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}\right)dx$

Đặt $\begin{cases}u=\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}\\ dv=\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{2(1-x)}\right]dx\\ v=-\sqrt{1-x^2}\end{cases}$

$$\Rightarrow I=-\sqrt{1-x^2}\ln\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\int\sqrt{1-x^2}\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{2(1-x)}\right]dx=-\sqrt{1-x^2}\ln\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+J$$

Ta có $J=\int\sqrt{1-x^2}\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{2(1-x)}\right]dx=\int\frac{1-x^2}{x\sqrt{1-x^2}}dx+\int\frac{(1-x)(1+x)}{2(1-x)\sqrt{1-x^2}}dx$

$$=\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{2}\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=L+\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}$$

Xét tích phân $L=\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$, đặt $x=\sin t;t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow dx=\cos tdt;\sqrt{1-x^2}=\cos t$

$$\Rightarrow L=\int\frac{\cos tdt}{\sin t\cos t}=\int\frac{dt}{\sin t}=\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right|+C=\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+C$$

$$\Rightarrow J=\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}+\frac{1}{2}\arcsin x+C$$

$$\Rightarrow I=-\sqrt{1-x^2}\ln\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}+\frac{1}{2}\arcsin x+C$$

2. $I=\int x^2\sin(\ln x)dx$

Ta có $I=\int x^2\sin(\ln x)dx=\frac{1}{3}\int\sin(\ln x)d\left(x^3\right)=\frac{1}{3}x^3\sin(\ln x)-\frac{1}{3}\int x^3d\left(\sin(\ln x)\right)$

$$=\frac{1}{3}x^3\sin(\ln x)-\frac{1}{3}\int x^3\cos(\ln x)\frac{dx}{x}=\frac{1}{3}x^3\sin(\ln x)-\frac{1}{3}\int x^2\cos(\ln x)dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3\sin(\ln x)-\frac{1}{9}\int\cos(\ln x)d\left(x^3\right)=\frac{1}{3}x^3\sin(\ln x)-\frac{1}{9}x^3\cos(\ln x)+\frac{1}{9}\int x^3d\left(\cos(\ln x)\right)$$

$$=\frac{1}{3}x^3\sin(\ln x)-\frac{1}{9}x^3\cos(\ln x)-\frac{1}{9}\int x^2\sin(\ln x)dx=\frac{1}{3}x^3\sin(\ln x)-\frac{1}{9}x^3\cos(\ln x)-\frac{1}{9}I$$

$$\Rightarrow\frac{10}{9}I=\frac{1}{3}x^3\sin(\ln x)-\frac{1}{9}x^3\cos(\ln x)\Rightarrow I=\frac{1}{10}\left[3x^3\sin(\ln x)-x^3\cos(\ln x)\right]+C$$

3. $I=\int e^{-2x}\cos 3xdx$

Ta có $I=\int e^{-2x}\cos 3xdx=\frac{1}{3}\int e^{-2x}d(\sin 3x)=\frac{e^{-2x}\sin 3x}{3}-\frac{1}{3}\int\sin 3xd\left(e^{-2x}\right)$

$$=\frac{e^{-2x}\sin 3x}{3}+\frac{2}{3}\int e^{-2x}\sin 3xdx=\frac{e^{-2x}\sin 3x}{3}-\frac{2}{9}\int e^{-2x}d\left(\cos 3x\right)$$

$$=\frac{e^{-2x}\sin 3x}{3}-\frac{2e^{-2x}\cos 3x}{9}+\frac{2}{9}\int \cos 3xd\left(e^{-2x}\right)$$

$$=\frac{e^{-2x}\left(3\sin 3x-2\cos 3x\right)}{9}-\frac{4}{9}\int e^{-2x}\cos 3xdx=\frac{e^{-2x}\left(3\sin 3x-2\cos 3x\right)}{9}-\frac{4}{9}I$$

$$\Rightarrow \frac{13}{9}I=\frac{e^{-2x}\left(3\sin 3x-2\cos 3x\right)}{9}\Rightarrow I=\frac{e^{-2x}\left(3\sin 3x-2\cos 3x\right)}{13}+C$$

4. $I=\int e^{x}\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx$

Ta có $I=\int e^{x}\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx=\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}d\left(e^{x}\right)=e^{x}\frac{1+\sin x}{1+\cos x}-\int e^{x}d\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)$

$$=e^{x}\frac{1+\sin x}{1+\cos x}-\int e^{x}\frac{1+\cos x+\sin x}{\left(1+\cos x\right)^{2}}dx=e^{x}\frac{1+\sin x}{1+\cos x}-\int \frac{e^{x}dx}{1+\cos x}-\int \frac{e^{x}\sin xdx}{\left(1+\cos x\right)^{2}}$$

$$=e^{x}\frac{1+\sin x}{1+\cos x}-K-J\left(1\right);K=\int \frac{e^{x}dx}{1+\cos x};J=\int \frac{e^{x}\sin xdx}{\left(1+\cos x\right)^{2}}$$

Xét tích phân $J=\int \frac{e^{x}\sin xdx}{\left(1+\cos x\right)^{2}}$, đặt $\begin{cases} u=e^{x} \\ dv=\dfrac{\sin xdx}{\left(1+\cos x\right)^{2}} \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} du=e^{x}dx \\ v=\displaystyle\int \frac{-d\left(1+\cos x\right)}{\left(1+\cos x\right)^{2}}=\frac{1}{1+\cos x} \end{cases}$

$$\Rightarrow J=\frac{e^{x}}{1+\cos x}-\int \frac{e^{x}dx}{1+\cos x}=\frac{e^{x}}{1+\cos x}-K\left(2\right)$$

Thay $\left(2\right)$ vào $\left(1\right)$ ta có $I=e^{x}\frac{1+\sin x}{1+\cos x}-K-\left(\frac{e^{x}}{1+\cos x}-K\right)+C=e^{x}\frac{1+\sin x}{1+\cos x}-\frac{e^{x}}{1+\cos x}+C$

Phương pháp đường chéo dạng $\int f\left(x\right)\ln^{n}\left(ax+b\right)dx$

Đối với dạng bài tìm nguyên hàm $\int f\left(x\right)\ln^{n}\left(ax+b\right)dx$ vì vậy ưu tiên đặt $u=\ln^{n}\left(ax+b\right)$ nhưng khi đó đạo hàm "u" sẽ không bằng 0 được, vì vậy phải chuyển một lượng $t\left(x\right)$ từ cột đạo hàm sang cột nguyên hàm để giảm mũ của $\ln$ đi 1 bậc ở cột đạo hàm. Tiếp tục làm tương tự cho đến khi cột đạo hàm bằng 0 thì dừng lại. Nhân chéo từ hàng đạo hàm đã thực hiện chuyển $t\left(x\right)$ sang hàng kề dưới của cột nguyên hàm, vẫn sử dụng quy tắc đan dấu bình thường.

Sau đây ta sẽ cùng tìm hiểu một số ví dụ liên quan tới dạng này

Câu 10.

Tìm nguyên hàm $I=\int x\ln^{2}xdx$

Lời giải

Cách 1. Phương pháp từng phần thông thường

Đặt $\begin{cases} u = \ln^2 x \\ dv = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{2\ln x}{x}dx \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$. Khi đó: $I = \dfrac{x^2}{2}\ln^2 x - \int x\ln x dx = \dfrac{x^2}{2}\ln^2 x - I_1$.

+ Tìm $I_1 = \int x\ln x dx$ Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$. Khi đó $I_1 = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \int \dfrac{x}{2}dx = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4} + C$.

$$\Rightarrow I = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C\right) = \frac{x^2}{2}\left(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2}\right) + C.$$

Cách 2.

Chuyển	**Đạo hàm**	**Dấu**	**Nguyên hàm**	**Nhận**
	$\ln^2 x$	$+$	x	
$\dfrac{2}{x}$	$\dfrac{2\ln x}{x}$		$\dfrac{x^2}{2}$	$\dfrac{2}{x}$
	$\ln x$	$-$	x	
$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{x}$		$\dfrac{x^2}{2}$	$\dfrac{1}{x}$
	1	$+$	$\dfrac{x}{2}$	
	0		$\dfrac{x^2}{4}$	

Kết quả $I = \dfrac{x^2}{2}\ln^2 x - \dfrac{x^2}{2}\ln x + \dfrac{x^2}{4} + C = \dfrac{x^2}{2}\left(\ln^2 x - \ln x + \dfrac{1}{2}\right) + C.$

Câu 11.

Tìm nguyên hàm $I = \int (x^2 + 4x + 3)\ln^2(x+1)dx$

Lời giải

Đặt $t = x + 1 \Rightarrow dt = dx$; $x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3) = t(t+2) = t^2 + 2t$

$$\Rightarrow I = \int (x^2 + 4x + 3)\ln^2(x+1)dx = \int (t^2 + 2t)\ln^2 t dt$$

Cách 1. Phương pháp từng phần thông thường

Đặt $\begin{cases} u = \ln^2 t \\ dv = (t^2 + 2t)dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{2\ln t}{t}dt \\ v = \dfrac{t^3}{3} + t^2 \end{cases}$. Khi đó:

$$I=\left(\frac{t^3}{3}+t^2\right)\ln^2 t-2\int\left(\frac{t^3}{3}+t^2\right)\frac{\ln t}{t}dt=\left(\frac{t^3}{3}+t^2\right)\ln^2 t-2\int\left(\frac{t^2}{3}+t\right)\ln t dt=\left(\frac{t^3}{3}+t^2\right)\ln^2 t-2I_1\ (*)$$

+ Tính $I_1=\int\left(\frac{t^2}{3}+t\right)\ln t dt$. Đặt $\begin{cases}u=\ln t\\ dv=\left(\frac{t^2}{3}+t\right)dt\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{dt}{t}\\ v=\frac{t^3}{9}+\frac{t^2}{2}\end{cases}$.

Khi đó: $I_1=\left(\frac{t^3}{9}+\frac{t^2}{2}\right)\ln t-\int\left(\frac{t^2}{9}+\frac{t}{2}\right)dt=\left(\frac{t^3}{9}+\frac{t^2}{2}\right)\ln t-\frac{t^3}{27}-\frac{t^2}{4}+C.$

Thay I_1 vào $(*)$, ta được: $I=\left(\frac{t^3}{3}+t^2\right)\ln^2 t-\left(\frac{2t^3}{9}+t^2\right)\ln t+\frac{2t^3}{27}+\frac{t^2}{2}+C\quad(**)$

Thay $t=x+1$ vào $(**)$ ta được nguyên hàm $\int\left(x^2+4x+3\right)\ln^2(x+1)dx$.

Cách 2.

Chuyển	**Đạo hàm(u)**	**Dấu**	**Nguyên hàm(dv)**	**Nhận**
	$\ln^2 t$	+	t^2+2t	
$\frac{2}{t}$	$\frac{2\ln t}{t}$		$\frac{t^3}{3}+t^2$	$\frac{2}{t}$
	$\ln t$	−	$\frac{2t^2}{3}+2t$	
$\frac{1}{t}$	$\frac{1}{t}$		$\frac{2t^3}{9}+t^2$	$\frac{1}{t}$
	1	+	$\frac{2t^2}{9}+t$	
	0		$\frac{2t^3}{27}+\frac{t^2}{2}$	

Kết quả $I=\left(\frac{t^3}{3}+t^2\right)\ln^2 t-\left(\frac{2t^3}{9}+t^2\right)\ln t+\frac{2t^3}{27}+\frac{t^2}{2}+C\quad(**)$.

Thay $t=x+1$ vào $(**)$ ta được nguyên hàm $\int\left(x^2+4x+3\right)\ln^2(x+1)dx$.

Câu 12.

Tính các tích phân sau

a) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin xdx.$ b) $I=\int_0^{e-1}x\ln(x+1)dx$ c) $\int_0^1 x\ln\left(1+x^2\right)dx$ d) $I=\int_0^1 x\tan^2 x.dx$

Lời giải

a) Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

Do đó $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = \left(-x\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 0 + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$

b) Đặt $\begin{cases} u = \ln\left(x+1\right) \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x+1}dx \\ v = \dfrac{x^2-1}{2} \end{cases}.$

Khi đó $I = \int\limits_0^{e-1} x\ln\left(x+1\right)dx = \left[\ln(x+1)\dfrac{x^2-1}{2}\right]\Bigg|_0^{e-1} - \dfrac{1}{2}\int\limits_0^{e-1}\left(x-1\right)dx$

$$= \frac{e^2-2e+2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Bigg|_0^{e-1} = \frac{e^2-2e+2}{2} - \frac{1}{2}\frac{e^2-4e+3}{2} = \frac{e^2+1}{4}.$$

c) Đặt: $\begin{cases} u = \ln\left(1+x^2\right) \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{2xdx}{1+x^2} \\ v = \dfrac{1}{2}x^2 \end{cases}.$

Khi đó $I = \dfrac{1}{2}x^2\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \dfrac{x^3}{1+x^2}dx = \dfrac{\ln 2}{2} - \int\limits_0^1 \dfrac{\left[x\left(x^2+1\right)-x\right]}{1+x^2}dx$

$$= \frac{\ln 2}{2} - \int\limits_0^1\left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)dx = \frac{\ln}{2} - \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]\Bigg|_0^1 = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

d) Biến đổi I về dạng $I = \int\limits_0^1 x\left(\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \underbrace{\int\limits_0^1 \dfrac{xdx}{\cos^2 x}}_{I_1} - \int\limits_0^1 xdx = I_1 - \dfrac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 = I_1 - \dfrac{1}{2}.$

Tính I_1. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x \end{cases}.$

Khi đó: $I_1 = x\tan x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \tan x dx = \left(x\tan x + \ln\left|\cos x\right|\right)\Big|_0^1 = \tan 1 + \ln\left(\cos 1\right).$

Suy ra $I = \tan 1 + \ln\left(\cos 1\right) - \dfrac{1}{2}.$

Câu 13.

Biết $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x^2dx}{(x\sin x+\cos x)^2}=\frac{a-b\pi}{c-d\pi}$ trong đó $a,b,c,d<5$ và là các số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức $\frac{a^2-2b^2}{c^2+2d^2}$

A. $\frac{1}{4}$ **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** $\frac{3}{4}$

Lời giải

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x^2dx}{(x\sin x+\cos x)^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}.\frac{x}{\cos x}dx$

Đặt $\begin{cases}u=\dfrac{x}{\cos x}\\ dv=\dfrac{x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}dx=\dfrac{d(x\sin x+\cos x)}{(x\sin x+\cos x)^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{\cos x+x\sin x}{\cos^2 x}dx\\ v=\int\dfrac{d(x\sin x+\cos x)}{(x\sin x+\cos^2 x)}=-\dfrac{1}{x\sin x+\cos x}\end{cases}$

Khi đó $I=-\frac{x}{(x\sin x+\cos x)\cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}=-\frac{2\pi}{4+\pi}+\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{2\pi}{4+\pi}+1=\frac{4-\pi}{4+\pi}$.

Chọn ý **C.**

Câu 14.

Biết $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\sin x+\cos x)}{\cos^2 x}dx=-\frac{a\pi}{b}+\frac{c}{d}\ln e$ trong đó c,d,e là các số nguyên tố và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $\frac{a^2-2b^2}{c^2+2d^2+3e^3}$

A. $-\frac{31}{41}$ **B.** $-\frac{32}{41}$ **C.** $-\frac{17}{23}$ **D.** $-\frac{18}{23}$

Lời giải

Ta thấy rằng $(x\sin x+\cos x)'=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$ nên ta tách

$$\frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}=\frac{x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}.\frac{x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\sin x+\cos x)}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\cos x.(1+\tan x))}{\cos^2 x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}+\frac{\ln(1+\tan x)}{\cos^2 x}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(1+\tan x)}{\cos^2 x}dx=I+J.$$

Đặt $\begin{cases} u = \ln\cos x \Rightarrow du = -\dfrac{\sin x}{\cos x}dx \\ dv = \dfrac{1}{\cos^2 x}dx, v = \tan x \end{cases}$, khi đó tích phân cần tính trở thành

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}dx = \tan x.\ln(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx$$

$$= \tan x.\ln\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + (-x + \tan x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4} + 1$$

Tính $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(1+\tan x)}{\cos^2 x}dx$. Đặt $t = 1 + \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x}dx \Rightarrow J = \int_1^2 \ln t\, dt$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln t \;\; \Rightarrow du = \dfrac{1}{t}dt \\ dv = dt \;,\quad v = t \end{cases} \Rightarrow J = \int_1^2 \ln t\,dt = t\ln t\Big|_1^2 - \int_1^1 dt = (t\ln t - t)\Big|_1^2 = 2\ln 2 - 1$

Vậy $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin x + \cos x)}{\cos^2 x}dx = -\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\ln 2$

Chọn ý **A.**

Lời giải

Cách 1. Đặt $\begin{cases} u = \ln(4x^2+8x+3) \\ dv = \dfrac{dx}{(x+1)^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{8x+8}{4x^2+8x+3}dx \\ v = -\dfrac{1}{2(x+1)^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \frac{-\ln(4x^2+8x+3)}{2(x+1)^2}\Bigg|_0^1 + 4\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(4x^2+8x+3)} = -\frac{\ln 15}{8} + \frac{\ln 3}{2} + 4I_1 \quad (*)$$

Tính $I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(4x^2+8x+3)}$

Ta phân tích $\frac{1}{(x+1)(4x^2+8x+3)} = \frac{1}{(x+1)(2x+1)(2x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x+1} + \frac{C}{2x+3}$.

$$\Leftrightarrow A(2x+1)(2x+3) + B(x+1)(2x+3) + C(x+1)(2x+1) = 1 \quad (2^*)$$

Chọn x lần lượt là các giá trị $-1; -\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}$ thay vào (2^*) ta được: $\begin{cases} A = -1 \\ B = C = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow I_1 = \int_0^1 \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2x+3}\right)dx = \left(-\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|4x^2+8x+3|\right)\Bigg|_0^1 = -\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{15}{3} (**)$$

Thay $(**)$ vào $(*)$ ta được: $I = \frac{15}{8}\ln 15 - \frac{3}{2}\ln 3 - 4\ln 2$.

Cách giải theo "kĩ thuật chọn hệ số".

Đặt $\begin{cases} u=\ln\left(4x^2+8x+3\right) \\ dv=\dfrac{dx}{(x+1)^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{8x+8}{4x^2+8x+3}dx \\ v=-\dfrac{1}{2(x+1)^2}+2=\dfrac{4x^2+8x+3}{2(x+1)^2} \end{cases}$

Trong đó $v=\int\dfrac{dx}{(x+1)^3}=-\dfrac{1}{2(x+1)^2}+C$ và chọn $C=2$

$$\Rightarrow I=\frac{4x^2+8x+3}{2(x+1)^3}\ln\left(4x^2+8x+3\right)\Bigg|_0^1-4\int_0^1\frac{dx}{x+1}$$

$$=\frac{15}{8}\ln 15-\frac{3}{2}\ln 3-4\ln|x+1|\Big|_0^1=\frac{15}{8}\ln 15-\frac{3}{2}\ln 3-4\ln 2.$$

Chọn ý **B.**

Câu 15.

Biết $I=\int_0^1\dfrac{\ln\left(4x^2+8x+3\right)}{(x+1)^3}dx=\dfrac{a}{b}\ln 15-\dfrac{c}{d}\ln 3-\dfrac{e}{f}\ln 2$ trong đó $\dfrac{a}{b},\dfrac{c}{d},\dfrac{e}{f}$ là các phân số tối giản. Tính $\dfrac{a^2-2b^2+4e^3}{c^2+2d^2+3e^4}$

A. $\dfrac{353}{758}$ **B.** $\dfrac{353}{785}$ **C.** $\dfrac{335}{758}$ **D.** $\dfrac{353}{875}$

Lời giải

Cách 1. Đặt $\begin{cases} u=\ln\left(4x^2+8x+3\right) \\ dv=\dfrac{dx}{(x+1)^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{8x+8}{4x^2+8x+3}dx \\ v=-\dfrac{1}{2(x+1)^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow I=\frac{-\ln\left(4x^2+8x+3\right)}{2(x+1)^2}\Bigg|_0^1+4\int_0^1\frac{dx}{(x+1)\left(4x^2+8x+3\right)}=-\frac{\ln 15}{8}+\frac{\ln 3}{2}+4I_1 \quad (*)$$

Tính $I_1=\int_0^1\dfrac{dx}{(x+1)\left(4x^2+8x+3\right)}$

Ta phân tích $\dfrac{1}{(x+1)\left(4x^2+8x+3\right)}=\dfrac{1}{(x+1)(2x+1)(2x+3)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{2x+1}+\dfrac{C}{2x+3}$.

$$\Leftrightarrow A(2x+1)(2x+3)+B(x+1)(2x+3)+C(x+1)(2x+1)=1 \quad \left(2^*\right)$$

Chọn x lần lượt là các giá trị $-1;-\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2}$ thay vào $\left(2^*\right)$ ta được: $\begin{cases} A=-1 \\ B=C=1 \end{cases}$

$$\Rightarrow I_1=\int_0^1\left(\frac{-1}{x+1}+\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{2x+3}\right)dx=\left(-\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln\left|4x^2+8x+3\right|\right)\Bigg|_0^1=-\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{15}{3}(**)$$

Thay $(**)$ vào $(*)$ ta được: $I=\frac{15}{8}\ln 15-\frac{3}{2}\ln 3-4\ln 2.$

Cách giải theo "kĩ thuật chọn hệ số".

Đặt $\begin{cases} u=\ln\left(4x^2+8x+3\right) \\ dv=\dfrac{dx}{(x+1)^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{8x+8}{4x^2+8x+3}dx \\ v=-\dfrac{1}{2(x+1)^2}+2=\dfrac{4x^2+8x+3}{2(x+1)^2} \end{cases}$

Trong đó $v=\int\frac{dx}{(x+1)^3}=-\frac{1}{2(x+1)^2}+C$ và chọn $C=2$

$$\Rightarrow I=\frac{4x^2+8x+3}{2(x+1)^3}\ln\left(4x^2+8x+3\right)\Big|_0^1-4\int_0^1\frac{dx}{x+1}$$

$$=\frac{15}{8}\ln 15-\frac{3}{2}\ln 3-4\ln|x+1|\Big|_0^1=\frac{15}{8}\ln 15-\frac{3}{2}\ln 3-4\ln 2.$$

Chọn ý **B.**

Câu 16.

Biết $I=\int_0^1 e^x\sin^2(\pi x)dx=\frac{a\pi^2(e-b)}{2\left(c\pi^2+d\right)}$ trong đó a,b,c,d là các số nguyên dương. Tính $P=a^c+b^d$

A. 246 **B.** 266 **C.** 257 **D.** 176

Lời giải

Cách 1. *Cách giải tích phân từng phần thông thường*

Ta có $I=\frac{1}{2}\int_0^1 e^x\left[1-\cos(2\pi x)\right]dx=\frac{1}{2}\int_0^1 e^x dx-\frac{1}{2}\underbrace{\int_0^1 e^x\cos(2\pi x)dx}_{I_1}=\frac{1}{2}e^x\Big|_0^1-\frac{1}{2}I_1=\frac{e-1}{2}-\frac{I_1}{2}$ $(*)$

Tính I_1 bằng phương pháp từng phần. Đặt $\begin{cases} u=\cos(2\pi x) \\ dv=e^x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du=-2\pi\sin(2\pi x).dx \\ v=e^x \end{cases}$

$$\Rightarrow I_1=e^x\cos(2\pi x)\Big|_0^1+2\pi\underbrace{\int_0^1 e^x\sin(2\pi x)dx}_{I_2}=e-1+2\pi I_2 \quad (1)$$

Tính I_2 bằng phương pháp từng phần. Đặt $\begin{cases} u=\sin(2\pi x) \\ dv=e^x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du=2\pi\cos(2\pi x)dx \\ v=e^x \end{cases}$

$$\Rightarrow I_2=e^x\sin(2\pi x)\Big|_0^1-2\pi\underbrace{\int_0^1 e^x\cos(2\pi x)dx}_{I_1}=-2\pi I_1 \quad (2)$$

Từ $(1),(2)\Rightarrow I_1=e-1-4\pi^2 I_1\Rightarrow I_1=\frac{e-1}{4\pi^2+1}$

Thay I_1 vào $(*)$ ta được $I = \dfrac{e-1}{2} - \dfrac{e-1}{2\left(4\pi^2+1\right)} = \dfrac{4\pi^2\left(e-1\right)}{2\left(4\pi^2+1\right)}$

Cách 2. *Cách giải tích phân từng phần theo sơ đồ đường chéo*

Ta có $I = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 e^x\left[1-\cos\left(2\pi x\right)\right]dx = \dfrac{1}{2}\left[\int\limits_0^1 e^x dx - \underbrace{\int\limits_0^1 e^x\cos\left(2\pi x\right)dx}_{I_1}\right] = \dfrac{1}{2}e^x\Big|_0^1 - \dfrac{1}{2}I_1 = \dfrac{e-1}{2} - \dfrac{I_1}{2}$

Ta có sơ đồ đường chéo

Đạo hàm	***Dấu***	***Nguyên hàm***
$u=\cos\left(2\pi x\right)$	$+$	$dv=e^x$
$-2\pi\sin\left(2\pi x\right)$	$-$	e^x
$-4\pi^2\cos\left(2\pi x\right)$	$+$	e^x

$$\Rightarrow I_1 = \left[\cos\left(2\pi x\right)e^x - \left(-2\sin\left(2\pi x\right)e^x\right)\right]\Big|_0^1 - 4\pi^2\int\limits_0^1 e^x\cos\left(2\pi x\right)dx$$

$$= \left[\cos\left(2\pi x\right)+2\sin\left(2\pi x\right)\right]e^x\Big|_0^1 - 4\pi^2 I_1 = e-1-4\pi^2 I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{e-1}{4\pi^2+1}$$

Thay vào (*) ta được $I = \dfrac{4\pi^2\left(e-1\right)}{2\left(4\pi^2+1\right)}$.

Nhận xét. *Bài toán trên dùng phương pháp sơ đồ đường chéo cho bài toán tích phân lặp.*

Chọn ý **C.**

Câu 17.

Biết $I = \int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{e}{3}}\left(2x+1\right)\ln^3\left(3x\right)dx = \dfrac{e^2}{a} - \dfrac{be}{c} + \dfrac{d}{e}$ trong đó $\dfrac{b}{c}, \dfrac{d}{e}$ là phân số tối giản và b,c,d,e là các số nguyên dương. Tính $\dfrac{a+b+c}{d^2+e^3}$?

A. $\dfrac{35}{23427}$ **B.** $\dfrac{41}{2535}$ **C.** $\dfrac{41}{2533}$ **D.** $\dfrac{41}{2353}$

Lời giải

Cách 1. Cách giải từng phần thông thường

Đặt $\begin{cases} u = \ln^3(3x) \\ dv = (2x+1)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{3\ln^2(3x)}{x}dx \\ v = x^2 + x \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \left(x^2+x\right)\ln^3(3x)\Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{e}{3}} - 3\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{e}{3}}(x+1)\ln^2(3x)dx = \frac{e^2}{9} + \frac{e}{3} - 3J$$

Tính $J = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{e}{3}}(x+1)\ln^2(3x)dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln^2(3x) \\ dv = (x+1)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{2\ln(3x)}{x}dx \\ v = \dfrac{x^2}{2} + x \end{cases}$

$$\Rightarrow J = \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln^2(3x)\Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{e}{3}} - \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{e}{3}}(x+2)\ln(3x)dx = \frac{e^2}{18} + \frac{e}{3} - K$$

Tính $K = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{e}{3}}(x+2)\ln(3x)dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln(3x) \\ dv = (x+2)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = \dfrac{x^2}{2} + 2x \end{cases}$

$$\Rightarrow K = \left[\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\ln(3x)\right]\Bigg|_{\frac{1}{3}}^{\frac{e}{3}} - \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{e}{3}}\left(\frac{x}{2}+2\right)dx = \frac{e^2}{18} + \frac{2e}{3} - \left(\frac{x^2}{4}+2x\right)\Bigg|_{\frac{1}{3}}^{\frac{e}{3}} = \frac{e^2}{36} + \frac{25}{36}$$

$$\Rightarrow I = \frac{e^2}{9} + \frac{e}{3} - 3J = \frac{e^2}{9} + \frac{e}{3} - 3\left(\frac{e^2}{18} + \frac{e}{3} - K\right) = \frac{e^2}{9} + \frac{e}{3} - 3\left(\frac{e^2}{18} + \frac{e}{3} - \frac{e^2}{36} - \frac{25}{36}\right) = \frac{e^2}{36} - \frac{2e}{3} + \frac{25}{12}.$$

Cách 2. Cách giải theo sơ đồ đường chéo

Chuyển (Chia)	***Đạo hàm*** (u)	***Dấu***	***Nguyên hàm*** (dv)	***Nhận (Nhân)***
	$\ln^3 3x$	+	$2x+1$	
$\dfrac{3}{x}$	$\dfrac{3\ln^2 3x}{x}$		x^2+x	$\dfrac{3}{x}$
	$\ln^2 3x$	–	$3x+3$	
$\dfrac{2}{x}$	$\dfrac{2\ln 3x}{x}$		$\dfrac{3x^2}{2}+3x$	$\dfrac{2}{x}$
	$\ln 3x$	+	$3x+6$	
$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{x}$		$\dfrac{3x^2}{2}+6x$	$\dfrac{1}{x}$
	1	–	$\dfrac{3}{2}x+6$	

0	$\frac{3x^2}{4}+6x$

Kết quả: $I=\left[\ln^3 3x\left(x^2+x\right)-\ln^2 3x\left(\frac{3x^2}{2}+3x\right)+\ln 3x\left(\frac{3x^2}{2}+6x\right)-\frac{3x^2}{4}-6x\right]\Bigg|_{1/3}^{e/3}$

$$=\left[\left(\frac{e^2}{9}+\frac{e}{3}\right)-\left(\frac{e^2}{6}+e\right)+\left(\frac{e^2}{6}+2e\right)-\frac{e^2}{12}-2e\right]-\left(-\frac{1}{12}-2\right)=\frac{e^2}{36}-\frac{2e}{3}+\frac{25}{12}.$$

MỘT SỐ BÀI TOÁN TỔNG HỢP.

ĐỀ BÀI

Câu 1: Biết $\int_{-1}^{1}\left(e^{x^2}\sin x+x^3e^x+x.2^x\right)dx=\frac{a}{e}-be+\frac{a\ln-c}{d(\ln b)^2}$ Với a,b,c,d là các số nguyên dương. Tính $P=a-b-c-d$

A. $P=0$ **B.** $P=1$ **C.** $P=2$ **D.** $P=3$

Câu 2: Biết $I=\int_{1}^{e}x^2(\ln x)^2dx=\frac{ae^3}{c}-\frac{b}{c}$ với a,b,c là các số nguyên dương. Tính $P=a^2+2b-c$

A. $P=0$ **B.** $P=1$ **C.** $P=2$ **D.** $P=3$

Câu 3 : Biết $I=\int_{0}^{\frac{1}{2}}x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx=\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\ln 3$ với a,b,c,d là các số nguyên dương nhỏ hơn 10 và $\frac{a}{b}$ tối giản, tính $P=2(a+b+c)-d$?

A. $P=1$ **B.** $P=2$ **C.** $P=3$ **D.** $P=4$

Câu 4: Biết $I=\int_{0}^{1}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx=\ln\left(a+\sqrt{b}\right)+a-\sqrt{b}$ với a,b là các số nguyên tố. Tính $P=a^2+b^3$

A. $P=8$ **B.** $P=9$ **C.** $P=11$ **D.** $P=14$

Câu 5: Biết $I=\int_{0}^{1}\frac{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}dx=\sqrt{a}\ln\left(b+\sqrt{c}\right)-1$ với a,c là các số nguyên tố. Tính $P=2a^2+b^3+c^4$

A. $P=23$ **B.** $P=24$ **C.** $P=25$ **D.** $P=27$

Câu 6: Biết $I=\int_{0}^{1}\frac{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x+\sqrt{1+x^2}}dx==\frac{\left(a\sqrt{2}-1\right)\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{b}-\frac{2+\sqrt{2}}{c}$ với a,b,c là các số nguyên dương. Tính $P=a^2+b^2-c$

A. $P=1$ **B.** $P=2$ **C.** $P=3$ **D.** $P=4$

Câu 7: Biết $I=\int_{0}^{1}x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx=-\frac{\sqrt{a}}{c}+\frac{b}{4}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ với a,b,c là các số nguyên dương và $c<5$. Tính $P=abc$

A. $P=18$ **B.** $P=24$ **C.** $P=25$ **D.** $P=27$

Câu 8: Biết $I=\int_{-8}^{0}x\ln\sqrt{1-x}dx=a-\frac{63}{b}\ln c$ với a,b,c là các số nguyên. Tính $P=\frac{a}{bc}$

A. $P=1$ **B.** $P=2$ **C.** $P=3$ **D.** $P=4$

Câu 9: Biết $I=\int_{-3}^{0}\frac{\ln\sqrt{1-x}}{(1-x)\sqrt{1-x}}dx=a-\ln b$ tính $P=2a-b^2+5$ với a,b là các số nguyên

A. $P=1$ **B.** $P=2$ **C.** $P=3$ **D.** $P=4$

Câu 10: Biết $I=\int_1^3 \frac{x\ln x dx}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{a}{20}\ln b-\frac{\ln c}{4}$ với a,b,c là các số nguyên, tính $P=ab-c^2$

A. $P=0$ **B.** $P=1$ **C.** $P=2$ **D.** $P=4$

Câu 11: Biết $I=\int_0^1 x\ln\left(x^3+1\right)dx=\frac{\pi\sqrt{a}}{c}-\frac{b}{d}$ với a,b,c,d là các số nguyên dương và $\frac{b}{d}$ tối giản đồng thời $c<7$. Tính $P=a^2-b^2+c^2-d$

A. $P=9$ **B.** $P=10$ **C.** $P=1$ **D.** $P=8$

Câu 12: Biết $I=\int_0^{\pi} e^{2x}\sin^2 x dx=\frac{e^{a\pi}-b}{2c}$ với a,b,c là các số nguyên dương, tính $P=a^2b-c$

A. $P=1$ **B.** $P=0$ **C.** $P=2$ **D.** $P=-1$

Câu 13: Biết $I=\int_1^{e^{\pi}}\cos\left(\ln x\right)dx=\frac{a}{2}\left(e^{\pi}+b\right)$ với a,b là các số nguyên. Tính $P=\frac{a^2}{b}$

A. $P=1$ **B.** $P=2$ **C.** $P=\frac{1}{2}$ **D.** $P=\frac{2}{3}$

Câu 14: Biết $I=\int_1^{e^{\pi}}\cos^2\left(\ln x\right)dx=\frac{a}{b}\left(e^{\pi}-c\right)$ với a,b,c là các số nguyên tố. Tính giá trị của biểu thức $P=a^2+b^2-c^3$

A. $P=31$ **B.** $P=35$ **C.** $P=33$ **D.** $P=34$

Câu 15: Biết $I=\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 x}{e^x}dx=\frac{a}{b}\left(c-e^{-\pi}\right)$ với a,b,c là các số nguyên tố. Tính $P=a^2-b+c$

A. $P=0$ **B.** $P=-1$ **C.** $P=1$ **D.** $P=2$

Câu 16: Tính $I=\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx\left(a>0\right)$

A. $I=\frac{\pi a^2}{4}$ **B.** $I=\frac{\pi a^2}{2}$ **C.** $I=\frac{\pi a^2}{8}$ **D.** $I=\frac{3\pi a^2}{4}$

Câu 17: Biết $I=\int_0^a\sqrt{a^2+x^2}dx\left(a>0\right)=\frac{\sqrt{b}+\ln\left(1+\sqrt{c}\right)}{d}a^2$ với b,c,d là các ẩn số nguyên, tính $P=\left(b-c-d\right)^2+b-cd$

A. $P=0$ **B.** $P=1$ **C.** $P=2$ **D.** $P=4$

Câu 18: Biết $I=\int_0^a x^2\sqrt{a^2+x^2}dx\left(a>0\right)=\frac{b\sqrt{2}-\ln\left(1+\sqrt{d}\right)}{2c}a^4$ với b,c,d là các ẩn số thực, tính $P=b^2+c-d^3$

A. $P=3$ **B.** $P=5$ **C.** $P=6$ **D.** $P=8$

Câu 19: Tính $I=\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx\left(a>0\right)$

A. $I=\frac{\pi a^4}{16}$ **B.** $I=\frac{\pi a^4}{8}$ **C.** $I=\frac{\pi a^4}{4}$ **D.** $I=\frac{\pi a^4}{2}$

Câu 20: Cho tích phân $I=\int_{a\sqrt{2}}^{2a}\sqrt{x^2-a^2}dx=\frac{a^2}{2}\left[\left(b\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)-\ln\frac{c+\sqrt{b}}{d+\sqrt{2}}\right]$ với b,c,d là các ẩn số thực dương, tính $P=\frac{b^2c}{d^2-1}$

A. $P=1$ **B.** $P=2$ **C.** $P=\frac{1}{2}$ **D.** $P=4$

Câu 21: Biết $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^3 x}=\frac{\sqrt{a}+\ln\left(1+\sqrt{b}\right)}{c}$ với a,b,c là các số thực dương. Tính $P=\frac{a^2-b}{c^2-a}$

A. $P=1$ **B.** $P=\frac{1}{2}$ **C.** $P=\frac{1}{4}$ **D.** $P=2$

Câu 22: Biết $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^5 x}=\frac{a\sqrt{2}}{2b}+\frac{c}{d}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ với a,b,c,d là các số thực dương, $\frac{c}{d}$ là phân số tối giản. Tính $P=3a+b-cd$

A. $P=0$ **B.** $P=1$ **C.** $P=2$ **D.** $P=-1$

Câu 23: Cho tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos^3 x}=\frac{a\sqrt{b}+\ln\left(c+\sqrt{d}\right)}{2}$ với a,b,c,d là các số thực dương, tính $P=a^2+b^2+c^2-d^2$

A. $P=11$ **B.** $P=12$ **C.** $P=8$ **D.** $P=9$

Câu 24: Biết $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos^5 x}=\frac{11\sqrt{a}}{b}+\frac{c}{2d}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$ với a,b,c,d là các số thực dương, $\frac{c}{d}$ là phân số tối giản, $a<4$. Tính $P=a+b+c+d$

A. $P=0$ **B.** $P=1$ **C.** $P=2$ **D.** $P=-1$

Câu 25: Cho tích phân $K=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^5+2x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx=\frac{a}{b}$ với a,b là các số nguyên dương, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $\frac{a}{b^2+2}$?

A. $\frac{26}{27}$ **B.** $\frac{26}{11}$ **C.** $\frac{13}{9}$ **D.** $\frac{13}{19}$

Câu 26: Tính $K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin^2 x}\sin x\cos^3 x dx$

A. $K=\frac{e}{2}-2$ **B.** $K=\frac{e}{2}-1$ **C.** $K=\frac{e}{4}-1$ **D.** $K=\frac{e}{2}+1$

Câu 27: Biết $I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\ln\left(1-\cos x\right)dx=\frac{\sqrt{a}}{2}\ln b-\frac{\pi}{2c}-1+\frac{\sqrt{3}}{2}$ với a,b,c là các số thực dương. Tính $P=3a-b+c^2$

A. $P=16$ **B.** $P=18$ **C.** $P=20$ **D.** $P=24$

Câu 28: Biết $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\sin x\ln(\tan x)dx=\ln\left(1+\sqrt{a}\right)-\frac{b}{c}\ln 3$ với a,b,c là các số thực dương, $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $P=(a+b-c)^2$

A. $P=0$ **B.** $P=1$ **C.** $P=4$ **D.** $P=9$

Câu 29: Biết $I=\int_0^{\frac{1}{2}}(x+1)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx=\frac{\pi}{3a}+\frac{\sqrt{b}}{2c}$ với a,b,c là các số thực dương và $\frac{b}{c}$ tối giản. Tính $P=a^2+b^2-c^2$

A. $P=8$ **B.** $P=9$ **C.** $P=24$ **D.** $P=13$

Câu 30: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int\limits_0^3 x.f'(x).e^{f(x)}dx=8$ và $f(3)=\ln 3$. Tính $I=\int\limits_0^3 e^{f(x)}dx$.

A. $I=1.$ **B.** $I=11.$ **C.** $I=8-\ln 3.$ **D.** $I=8+\ln 3.$

Câu 31: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, và đồng thời thỏa mãn hai điều kiện $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos^2 xdx=10$ và $f(0)=3.$ Tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2xdx$ bằng?

A. $I=-13.$ **B.** $I=-7.$ **C.** $I=7.$ **D.** $I=13.$

Câu 32: Cho $\int_1^2\ln\left(16-x^2\right)dx=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5+d$ với a,b,c,d là các số nguyên. Giá trị biểu thức $a+b+c+d$ bằng

A. 20 **B.** 28 **C.** 6 **D.** 9

Câu 33: Tính nguyên hàm của hàm số $f(x)=\ln\left(x+\frac{1}{x}\right).$

A. $x\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)-x+\arctan x+C$ **B.** $x\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)-x-\arctan x+C$

C. $x\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)+x-\arctan x+C$ **D.** $x\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)+x+\arctan x+C$

Câu 34 : Biết $\int_0^1\frac{x^2.e^x}{(x+2)^2}dx=a-\frac{b}{c}e,$ với a,b,c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $P=a+b^2+c^3$

A. $P=13$ **B.** $P=12$ **C.** $P=29$ **D.** $P=34$

Câu 35: Tính nguyên hàm của hàm số $f(x)=\left(x^3+1\right)\cos 2x.$

A. $\frac{2x^3-3x-2}{4}\sin 2x+\frac{6x^2+3}{8}\cos 2x+C$ **B.** $\frac{2x^3+3x-2}{8}\sin 2x-\frac{6x^2+3}{4}\cos 2x+C$

C. $\frac{2x^3-3x+2}{4}\sin 2x+\frac{6x^2-3}{8}\cos 2x+C$ **D.** $\frac{2x^3-3x-2}{8}\sin 2x+\frac{6x^2+3}{4}\cos 2x+C$

Câu 36: Tính $I=\int\frac{xdx}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{3}\right)}.$

TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC

A. $3x\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{3}\right)+9\ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{3}\right)\right|+C$ **B.** $3x\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{3}\right)-9\ln\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{3}\right)\right|+C$

C. $3x\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{3}\right)-9\ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{3}\right)\right|+C$ **D.** $3x\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{3}\right)+9\ln\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{3}\right)\right|+C$

Câu 37: Biết $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x(1+\sin 2x)dx=\frac{\pi^2}{a}-b\ \ (a,b\in\mathbb{R})$. Tính $P=a-2b^{-2}$.

A. $P=2$ **B.** $P=4$ **C.** $P=0$ **D.** $P=1$

Câu 38: Biết $I=\int_1^e\left(3x^2+\frac{1}{x}\right)\ln x dx=a.e^3+b\ \ (a,b\in\mathbb{R})$. Tính $P=a^2+8b^2$.

A. $P=\frac{11}{2}$ **B.** $P=\frac{29}{9}$ **C.** $P=6$ **D.** $P=5$

Câu 39: Đâu là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\ln^2 x$.

A. $x\ln^2 x+x\ln x+x+C$ **B.** $x\ln^2 x-x\ln x-x+C$

C. $x\ln^2 x+x\ln x-x+C$ **D.** $x\ln^2 x-x\ln x+x+C$

Câu 40: Cho $\int_0^1(x^2+1)e^{3x}dx=\frac{ae^3-b}{c}$ (a, b, c là các số nguyên dương). Tính $P=a+b-c$.

A. $P=5$ **B.** $P=-2$ **C.** $P=-3$ **D.** $P=6$

Câu 41: Cho tích phân $\int_{\frac{1}{12}}^{12}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx=\frac{a}{b}e^{\frac{c}{d}}$ trong đó a,b,c,d nguyên dương và $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Giá trị của biểu thức $bc-ad$ bằng

A. 24 **B.** $\frac{1}{6}$ **C.** 12 **D.** 1

Câu 42: Cho tích phân $\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x(x^2+48)}}-\frac{x}{(x^2+48)\sqrt{x^2+48}}\right)dx=\frac{e^2}{a}-\frac{e}{b}\ \ (a,b\in\mathbb{R})$. Tính ab.

A. 42 **B.** 56 **C.** 81 **D.** 45

Câu 43: Cho hai hàm số liên tục $f(x)$ và $g(x)$ có nguyên hàm lần lượt là $F(x)$ và $G(x)$ trên đoạn $[1;2]$. Biết rằng $F(1)=1$, $F(2)=4$, $G(1)=\frac{3}{2}$, $G(2)=2$ và $\int_1^2 f(x)G(x)dx=\frac{67}{12}$.

Tính $\int_1^2 F(x)g(x)dx$?

A. $\frac{11}{12}$ **B.** $-\frac{145}{12}$ **C.** $-\frac{11}{12}$ **D.** $\frac{145}{12}$

Câu 44: Biết $\int_1^3\frac{3+\ln x}{(x+1)^2}dx=\frac{a+\ln b-\ln c}{4}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Giá trị của biểu thức $P=a+b+c$ bằng?

A. 46 **B.** 35 **C.** 11 **D.** 48

Câu 45: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trong đoạn $[1;e]$, biết $\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx = 1$, $f(e)=1$. Khi đó $I=\int_1^e f'(x).\ln x dx$ bằng?

A. $I=4$ **B.** $I=3$ **C.** $I=3$ **D.** $I=0$

Câu 46: Cho $y=f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua điểm $M\left(-\frac{1}{2};4\right)$ và $\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt = 3$, tính $I=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \sin 2x.f'(\sin x)dx$.

A. $I=10$ **B.** $I=-2$ **C.** $I=1$ **D.** $I=-1$

Câu 47: Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(0).f'(2)\neq 0$ và $g(x)f'(x)=x(x-2)e^x$. Tính giá trị của tích phân $I=\int_0^2 f(x).g'(x)dx$?

A. -4 **B.** $e-2$ **C.** 4 **D.** $2-e$

Câu 48: Biết $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}dx = a+\frac{\pi^2}{b}+\frac{\sqrt{3}\pi}{c}$ với a,b,c,d là các số nguyên. Tính $M=a-b+c$.

A. $M=35$ **B.** $M=41$ **C.** $M=-37$ **D.** $M=-35$

Câu 49: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=3$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(x)}{\cos x}dx = 1$ và $\int_0^{\frac{\pi}{4}} [\sin x.\tan x.f(x)]dx = 2$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x.f'(x)dx$ bằng?

A. 4 **B.** $\frac{2+3\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\frac{1+3\sqrt{2}}{2}$ **D.** 6

Câu 50: Cho tích phân $\int_0^1 x\left[\ln(x+2)+\frac{1}{x+2}\right]dx = \frac{a^2\ln 2 - bc\ln 3 + c}{4}$,với $a,b,c\in\mathbb{N}$. Tính $T=a+b+c$.?

A. $T=13$ **B.** $T=13$ **C.** $T=17$ **D.** $T=11$

Câu 51: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm cấp hai trên $[0;1]$ thỏa $\int_0^1 x^2.f''(x)dx = 12$ và $2f(1)-f'(1)=-2$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$

A. 10 **B.** 14 **C.** 8 **D.** 5

Câu 52: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int\limits_1^2 f'(x).\ln\left[f(x)\right]dx = 1$ và $f(1) = 1$, $f(2) > 1$. Giá trị của $f(2)$ bằng?

A. $f(2) = 2$ **B.** $f(2) = 3$ **C.** $f(2) = e$ **D.** $f(2) = e^2$

Câu 53: Biết $\int\limits_e^{e^2}\left(\frac{1}{\ln^2 x} - \frac{1}{\ln x}\right)dx = \frac{ae^2 + be + c}{2}$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a^2 + b^2 + c^2$ bằng?

A. 5 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 9

Câu 54: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) - 2018f(x) = 2018.x^{2017}.e^{2018x}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2018$. Tính giá trị $f(1)$.

A. $f(1) = 2019e^{2018}$ **B.** $f(1) = 2018.e^{-2018}$ **C.** $f(1) = 2018.e^{2018}$ **D.** $f(1) = 2017.e^{2018}$

Câu 55: Cho hàm số $y = f(x)$ với $f(0) = f(1) = 1$. Biết rằng $\int\limits_0^1 e^x\left[f(x) + f'(x)\right]dx = ae + b$ Tính $Q = a^{2017} + b^{2017}$.

A. $Q = 2^{2017} + 1$ **B.** $Q = 2$ **C.** $Q = 0$ **D.** $Q = 2^{2017} - 1$

Câu 56: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$. Biết $f(0) = 1$ và $f(x)f(2-x) = e^{2x^2-4x}$ với mọi $x \in [0;2]$. Tính $I = \int\limits_0^2 \frac{(x^3 - 3x^2)f'(x)}{f(x)}dx$

A. $I = -\frac{14}{3}$. **B.** $I = -\frac{32}{5}$. **C.** $I = -\frac{16}{3}$. **D.** $I = -\frac{16}{5}$.

Câu 57: Cho biểu thức $S = \ln\left(1 + \int\limits_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}}(2 - \sin 2x)e^{2\cot x}dx\right)$ với số thực $m \neq 0$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $S = 5$.
B. $S = 9$.
C. $S = 2\cot\left(\frac{\pi}{4+m^2}\right) + 2\ln\left(\sin\frac{\pi}{4+m^2}\right)$.
D. $S = 2\tan\left(\frac{\pi}{4+m^2}\right) + 2\ln\left(\frac{\pi}{4+m^2}\right)$.

Câu 58: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $\int_0^1 e^x f(x)dx = \int_0^1 e^x f'(x)dx = \int_0^1 e^x f''(x)dx \neq 0$. Tính $\frac{ef'(1) - f'(0)}{ef(1) - f(0)}$

A. -2 **B.** -1 **C.** 2 **D.** 1

Câu 59: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $[1;e]$ và $f(e) = 1; \int_1^e \ln x.f'(x)dx = \frac{1}{2}$. Tính giá trị của biểu thức tích phân $\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx$.

A. 1. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** 2. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 60: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ có $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=a;$ và thỏa mãn đồng thời các điều kiện $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx=b\ (a;b\in\mathbb{R})$. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x.f'(x)dx=\frac{1}{2}$. Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x.f'(x)dx$ theo a và b.

A. $a-b+\frac{1}{2}$ **B.** $a+b-\frac{1}{2}$ **C.** $a-b-\frac{1}{2}$ **D.** $a+b+\frac{1}{2}$

Câu 61: Cho tích phân $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\cos x}{1+x^2}-\frac{2x\sin x}{\left(1+x^2\right)^2}\right)dx=\frac{a\sqrt{b}}{\pi^c+d}$ với a,d là các số nguyên và b,c là các số nguyên tố. Giá trị của biểu thức $a+b+c+d$ bằng

A. 28. **B.** 44. **C.** 29. **D.** 36.

Câu 62: Cho biểu thức tích phân sau

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\left(\frac{\left(x^2+2018\right)\cot x+x\ln|\sin x|}{\sqrt{x^2+2018}}\right)dx=\left(a\ln 3-\ln 2\right)\left(\sqrt{b\pi^2+2018}-\sqrt{c\pi^2+2018}\right)$$

Trong đó $(a;\ b;\ c\in\mathbb{R})$. Mệnh đề nào sau đây đúng

A. $a>b+c$ **B.** $a<b+c$ **C.** $a=b+c$ **D.** $a^2=b+c$

Câu 63: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn điều kiện $f'(x)\left(f(x)\right)^2=x\quad \forall x\in(0;+\infty)$. Biết $f(2)=a;f(4)=b;\int_1^2\left(\frac{x}{f(2x)}\right)^2dx=c$. Tính $\int_2^4 f(x)dx$ theo a,b,c.

A. $4b+2a-8c$ **B.** $8c-2b-4a$ **C.** $4b-2a-2c$ **D.** $4b-2a-8c$

Câu 64: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;+\infty]$ thỏa mãn $2x.f(x)=f'(x),\forall x\in[0;+\infty]$. Cho $\int_0^1 x.\left(f'(x)\right)^2dx=2$ và $f(0)=0$. Biết $f(1)>0$ tính $f(1)$.

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 65: Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f(0)=0;\int_1^e f(\ln x)dx=1;\int_1^e f(x)dx=\frac{1}{2};\int_0^1\left(e^x+2x\right)f'(x)dx=e$. Tính $f(1)$.

A. 1 **B.** e **C.** 0 **D.** 2

Câu 66: Cho $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=a\left(a\in\mathbb{R}\right);\ f(0)=0;$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin 2xdx=\frac{3}{2}a-\frac{5}{8};\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2 x+f(x)\right)f'(x)dx=\frac{1}{2}$. Giá trị của a là

A. -1 **B.** $-\frac{1}{2}$ **C.** 1 **D.** $\frac{1}{2}$

Câu 67: Cho $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ với n nguyên dương. Tính $\lim \frac{I_{n+2}}{I_n}$.

A. -1 **B.** 1 **C.** 2 **D.** $+\infty$

Câu 68: Với mỗi số nguyên dương n ta kí hiệu $I_n = \int\limits_0^1 x^2\left(1-x^2\right)^n dx$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n}$.

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 5

Câu 69: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx = 7$ và $\int\limits_0^1 x^2 f(x)dx = \frac{1}{3}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)dx$ bằng?

A. $\frac{7}{5}$ **B.** 1 **C.** $\frac{7}{4}$ **D.** 4

Câu 70: Cho tích phân $\int_0^2 x^3 \ln\left(x^2+1\right)dx = \frac{a}{b}\ln 5 - c$ với a,b,c là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a+b+c$?

A. 18 **B.** 19 **C.** 20 **D.** 21

Câu 71: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f'(x)=1$. Biết rằng $f(1)=1$ và $f(0)=0$, tính giá trị của tích phân $I=\int_0^1 e^{2x}f(x)dx$

A. $\frac{e^2+1}{2}$ **B.** $-e^2-1$ **C.** $\frac{e-1}{2}$ **D.** e

Câu 72: Cho $f(x)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f^2(x)=f^4(x).\left[f'(x)\right]^2-1$. Biết rằng $f(1)=2\sqrt{2}; f(0)=\sqrt{3}$. Tính $I=\int_0^1\left[f(x)\right]^2.\left[f'(x)\right]^2 dx$

A. 3 **B.** 5 **C.** $6\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\frac{1}{2}$ **D.** $6\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\frac{1}{2}$

Câu 73: Cho nguyên hàm $F(x)=\int\left(\frac{-\cos 2x}{4}-\sin 2x\right)\ln(\tan x+1)dx$. Biết giá trị của biểu thức $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\ln 2-\frac{\pi}{4}$. Tính $S=\left(F(0)-1\right)^{2016}$?

A. 1. B. 5. C. 2. D. 0.

Câu 74: Tính giá trị tích phân $I=\int\limits_0^1 xf(x)f'(x)dx$. Biết $\int\limits_1^e f(\ln x)dx = -f(0)e+f(0)+2$ và $\int\limits_0^1 f'(x)dx = e-1$?

A. 1. **B.** $\frac{-1}{2}$. **C.** -1. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 75: Biết $I=\int\limits_1^2 \frac{f(x)f'(x)}{x}dx = \frac{1}{16}$, $\int\limits_1^2 f(x)dx = -\frac{169}{48}$. Tính giá trị của $f(3)$?

A. -27. B. 25. C. -1. D. -15.

Câu 76: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)\cos x+f(x)\sin x=\sin x$. Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(f(x)+f''(x)\right)\cos x dx$?

A. 1 **B.** 2 **C.** π **D.** 2π

HƯỚNG DẪN GIẢI.

Câu 1.

Biết $\int_{-1}^{1}\left(e^{x^2}\sin x+x^3e^x+x.2^x\right)dx=\frac{a}{e}-be+\frac{a\ln -c}{d\left(\ln b\right)^2}$ Với a,b,c,d là các số nguyên dương. Tính $P=a-b-c-d$

A. $P=0$ **B.** $P=1$ **C.** $P=2$ **D.** $P=3$

Lời giải

Ta có $I=\int_{-1}^{1}\left(e^{x^2}\sin x+x^3e^x+x.2^x\right)dx=\int_{-1}^{1}e^{x^2}\sin xdx+\int_{-1}^{1}x^3e^xdx+\int_{-1}^{1}x2^xdx=I+J+K$

Xét $I=\int_{-1}^{1}e^{x^2}\sin xdx=\int_{1}^{-1}e^{(-u)^2}\sin(-u)d(-u)=-\int_{-1}^{1}e^{u^2}\sin udu=-I\Rightarrow I=0$

Xét $J=\int_{-1}^{1}x^3e^xdx=\int_{-1}^{1}x^3d\left(e^x\right)=x^3e^x\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}e^xd\left(x^3\right)=e+\frac{1}{e}-3\int_{-1}^{1}x^2e^xdx$

$$=e+\frac{1}{e}-3\int_{-1}^{1}x^2d\left(e^x\right)=e+\frac{1}{e}-3x^2e^x\Big|_{-1}^{1}+3\int_{-1}^{1}e^xd\left(x^2\right)=-2e+\frac{4}{e}+6\int_{-1}^{1}xe^xdx$$

$$=-2e+\frac{4}{e}+6\int_{-1}^{1}xd\left(e^x\right)=-2e+\frac{4}{e}+6xe^x\Big|_{-1}^{1}-6\int_{-1}^{1}e^xdx=4e+\frac{10}{e}-6e^x\Big|_{-1}^{1}=-2e+\frac{16}{e}$$

Xét $K=\int_{-1}^{1}x2^xdx=\frac{1}{\ln 2}\int_{-1}^{1}xd\left(2^x\right)=\frac{x.2^x}{\ln 2}\Big|_{-1}^{1}-\frac{1}{\ln 2}\int_{-1}^{1}2^xdx=\frac{5}{2\ln 2}-\frac{2^x}{(\ln 2)^2}\Big|_{-1}^{1}=\frac{5\ln 2-3}{2(\ln 2)^2}$

$$\Rightarrow I=1+J+K=\frac{10}{e}-2e+\frac{10\ln 2-3}{4(\ln 2)^2}.$$

Vậy $P=1$.

Chọn ý **B.**

Câu 2.

Biết $I=\int_{1}^{e}x^2(\ln x)^2dx=\frac{ae^3}{c}-\frac{b}{c}$ với a,b,c là các số nguyên dương. Tính $P=a^2+2b-c$

A. $P=0$ **B.** $P=1$ **C.** $P=2$ **D.** $P=3$

Lời giải

Ta có $I=\int_{1}^{e}x^2(\ln x)^2dx=\frac{1}{3}\int_{1}^{e}(\ln x)^2d\left(x^3\right)=\frac{1}{3}\left[x^3(\ln x)^2\Big|_{1}^{e}-\int_{1}^{e}x^3d(\ln x)^2\right]$

$$=\frac{1}{3}\left(e^3-\int_{1}^{e}2x^3\ln x\frac{dx}{x}\right)=\frac{1}{3}\left(e^3-\int_{1}^{e}2x^2\ln xdx\right)=\frac{1}{3}\left(e^3-\frac{2}{3}\int_{1}^{e}\ln xd\left(x^3\right)\right)$$

$$=\frac{e^3}{3}-\frac{2}{9}\left[\left(x^3\ln x\right)\Big|_{1}^{e}-\int_{1}^{e}x^3d(\ln x)\right]=\frac{e^3}{3}-\frac{2}{9}e^3+\frac{2}{9}\int_{1}^{e}x^2dx=\frac{e^3}{9}+\frac{2}{27}x^3\Big|_{1}^{e}=\frac{5e^3}{27}-\frac{2}{27}$$

Vậy $P=2$

Chọn ý **C.**

Câu 3.

Biết $I=\int_0^{\frac{1}{2}}x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx=\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\ln 3$ với a,b,c,d là các số nguyên dương nhỏ hơn 10 và $\frac{a}{b}$ tối giản, tính $P=2(a+b+c)-d$?

A. $P=1$ **B.** $P=2$ **C.** $P=3$ **D.** $P=4$

Lời giải

Ta có $I=\int_0^{\frac{1}{2}}x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)d\left(x^2\right)=\frac{1}{2}\left[\left(x^2\ln\frac{1+x}{1-x}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}x^2d\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)\right]$

$$=\frac{1}{8}\ln 3-\int_0^{\frac{1}{2}}x^2\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{dx}{(1-x)^2}=\frac{1}{8}\ln 3-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^2}{1-x^2}dx$$

$$=\frac{1}{8}\ln 3+\int_0^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{1-x^2}\right)dx=\frac{1}{8}\ln 3+x\Big|_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-x^2}dx$$

$$=\frac{1}{8}\ln 3+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\ln 3$$

Vậy $P=4$.

Chọn ý **D.**

Câu 4.

Biết $I=\int_0^1\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx=\ln\left(a+\sqrt{b}\right)+a-\sqrt{b}$ với a,b là các số nguyên tố. Tính $P=a^2+b^3$

A. $P=8$ **B.** $P=9$ **C.** $P=11$ **D.** $P=14$

Lời giải

Ta có $I=\int_0^1\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx=\left[x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]\Bigg|_0^1-\int_0^1 xd\left[\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]$

$$=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\int_0^1 x\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\frac{dx}{x+\sqrt{1+x^2}}=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d\left(1+x^2\right)}{\sqrt{1+x^2}}=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\sqrt{1+x^2}\Big|_0^1=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+1-\sqrt{2}$$

Vậy $P=9$.

Chọn ý **B.**

Câu 5.

Biết $I=\int_0^1\frac{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}dx=\sqrt{a}\ln\left(b+\sqrt{c}\right)-1$ với a,c là các số nguyên tố. Tính $P=2a^2+b^3+c^4$

A. $P=23$ **B.** $P=24$ **C.** $P=25$ **D.** $P=27$

Lời giải

Ta có $I=\int_0^1\frac{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int_0^1\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)d\left(\sqrt{1+x^2}\right)$

$$=\sqrt{1+x^2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^1-\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,d\left(\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)$$

$$=\sqrt{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\int_0^1\sqrt{1+x^2}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\frac{dx}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\sqrt{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\int_0^1dx=\sqrt{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-1$$

Vậy $P=25$.

Chọn ý **C.**

Câu 6.

Biết $I=\int_0^1\frac{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x+\sqrt{1+x^2}}dx==\frac{\left(a\sqrt{2}-1\right)\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{b}-\frac{2+\sqrt{2}}{c}$ với a,b,c là các số nguyên dương. Tính $P=a^2+b^2-c$

A. $P=1$ **B.** $P=2$ **C.** $P=3$ **D.** $P=4$

Lời giải

Ta có $I=\int_0^1\frac{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x+\sqrt{1+x^2}}dx$. Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\\dv=\frac{xdx}{x+\sqrt{1+x^2}}=x\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)dx\end{cases}$

$$\Rightarrow du=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}dx=\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}\text{ và }v=\frac{1}{2}\int\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(1+x^2\right)-\int x^2dx=\frac{1}{3}\left[\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}-x^3\right]$$

$$\Rightarrow I=\left(\frac{1}{3}\left[\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}-x^3\right]\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)\Bigg|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1\left[\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}-x^3\right]\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\frac{\left(2\sqrt{2}-1\right)\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{3}-\frac{1}{3}\int_0^1\left(1+x^2\right)dx+\frac{1}{3}\int_0^1\frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\frac{\left(2\sqrt{2}-1\right)\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{3}-\frac{1}{3}\left(x+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1+\frac{1}{6}\int_0^1\frac{\left(1+x^2\right)-1}{\sqrt{1+x^2}}d\left(1+x^2\right)$$

$$=\frac{\left(2\sqrt{2}-1\right)\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{3}-\frac{4}{9}+\frac{1}{6}\int_0^1\left[\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}-\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]d\left(1+x^2\right)$$

$$=\frac{\left(2\sqrt{2}-1\right)\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{3}-\frac{4}{9}+\frac{1}{6}\left[\frac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}-2\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{\left(2\sqrt{2}-1\right)\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{3}-\frac{4}{9}+\frac{1}{6}\left[\frac{4\sqrt{2}}{3}-2\sqrt{2}-\frac{2}{3}+2\right]$$

$$=\frac{\left(2\sqrt{2}-1\right)\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{3}-\frac{2+\sqrt{2}}{9}$$

Vậy $P=4$.

Chọn ý **D.**

Câu 7.

Biết $I=\int_0^1 x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx=-\frac{\sqrt{a}}{c}+\frac{b}{4}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ với a,b,c là các số nguyên dương và $c<5$. Tính $P=abc$

A. $P=18$ **B.** $P=24$ **C.** $P=25$ **D.** $P=27$

Lời giải

Ta có $I=\int_0^1 x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^1\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)d\left(x^2\right)$

$$=\left[\frac{x^2\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{2}\right]\Bigg|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 d\left[\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\frac{dx}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

Xét tích phân $J=\int_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}}$, đặt $x=\tan t; t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow J=\int_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2 t}{\sqrt{1+\tan^2 t}}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 t}{\cos^4 t}d\left(\sin t\right)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 t\, d\left(\sin t\right)}{\left(1-\sin^2 t\right)^2}=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{u^2du}{\left(1-u^2\right)^2}=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left[\frac{(1+u)-(1-u)}{(1+u)(1-u)}\right]^2du$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{1}{1-u}-\frac{1}{1+u}\right)^2du=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left[\frac{1}{(1-u)^2}+\frac{1}{(1+u)^2}-\frac{2}{1-u^2}\right]du$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-u}-\frac{1}{1+u}+\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|\right)\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\frac{1}{2}J=\frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]=-\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{3}{4}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

Vậy $P=24$

Chọn ý **B.**

Câu 8.

Biết $I=\int_{-8}^{0}x\ln\sqrt{1-x}dx=a-\frac{63}{b}\ln c$ với a,b,c là các số nguyên. Tính $P=\frac{a}{bc}$

A. $P=1$ **B.** $P=2$ **C.** $P=3$ **D.** $P=4$

Lời giải

Ta có $I=\int_{-8}^{0}x\ln\sqrt{1-x}dx=\frac{1}{2}\int_{-8}^{0}\ln\sqrt{1-x}d\left(x^2\right)=\frac{1}{2}x^2\ln\sqrt{1-x}\Big|_{-8}^{0}-\frac{1}{2}\int_{-8}^{0}x^2d\left(\ln\sqrt{1-x}\right)$

$$=-32\ln 3-\frac{1}{2}\int_{-8}^{0}x^2\cdot\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=-32\ln 3+\frac{1}{4}\int_{-8}^{0}\frac{x^2dx}{1-x}$$

$$=-32\ln 3+\frac{1}{4}\int_{-8}^{0}\frac{1-\left(1-x^2\right)}{1-x}dx=-32\ln 3+\frac{1}{4}\int_{-8}^{0}\left[\frac{1}{1-x}-\left(1+x\right)\right]dx$$

$$=-32\ln 3+\frac{1}{4}\left[-\ln\left|1-x\right|-x-\frac{1}{2}x^2\right]\Bigg|_{-8}^{0}=-32\ln 3+6+\frac{1}{2}\ln 3=6-\frac{63}{2}\ln 3$$

Vậy $P=1$

Chọn ý **A.**

Câu 9.

Biết $I=\int_{-3}^{0}\frac{\ln\sqrt{1-x}}{(1-x)\sqrt{1-x}}dx=a-\ln b$ tính $P=2a-b^2+5$ với a,b là các số nguyên.

A. $P=1$ **B.** $P=2$ **C.** $P=3$ **D.** $P=4$

Lời giải

Đặt $t=\sqrt{1-x}\Rightarrow I=\int_{2}^{1}\frac{\ln t}{t^3}(-2t)dt=2\int_{i}^{2}\ln t\frac{dt}{t^2}=2\int_{1}^{2}\ln t d\left(\frac{-1}{t}\right)$

$$=\frac{-2\ln t}{t}\Bigg|_{1}^{2}-2\int_{1}^{2}\frac{-1}{t}d(\ln t)=-\ln 2+2\int_{1}^{2}\frac{dt}{t^2}=-\ln 2-\frac{2}{t}\Bigg|_{1}^{2}=1-\ln 2$$

Vậy $P=3$.

Chọn ý **C.**

Câu 10.

Biết $I=\int_{1}^{3}\frac{x\ln x dx}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{a}{20}\ln b-\frac{\ln c}{4}$ với a,b,c là các số nguyên, tính $P=ab-c^2$

A. $P=0$ **B.** $P=1$ **C.** $P=2$ **D.** $P=4$

Lời giải

Ta có $I=\int_1^3 \frac{x\ln x dx}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{1}{2}\int_1^3 \frac{\ln x d\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{1}{2}\int_1^3 \ln x d\left(\frac{-1}{x^2+1}\right)$

$$=\frac{-\ln x}{2\left(x^2+1\right)}\Bigg|_1^3+\frac{1}{2}\int_1^3 \frac{1}{x^2+1}d\left(\ln x\right)=\frac{-\ln 3}{20}+\frac{1}{2}\int_1^3 \frac{dx}{x\left(x^2+1\right)}$$

$$=\frac{-\ln 3}{20}+\frac{1}{2}\int_1^3 \frac{\left(x^2+1\right)-x^2}{x\left(x^2+1\right)}dx=\frac{-\ln 3}{20}+\frac{1}{2}\int_1^3\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx$$

$$=-\frac{\ln 3}{20}+\frac{1}{2}\left(\ln x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right)\Bigg|_1^3=-\frac{\ln 3}{20}+\frac{1}{2}\left(\ln 3-\frac{1}{2}\ln 5\right)=\frac{9}{20}\ln 3-\frac{\ln 5}{4}$$

Vậy $P=2$

Chọn ý **C.**

Câu 11.

Biết $I=\int_0^1 x\ln\left(x^3+1\right)dx=\frac{\pi\sqrt{a}}{c}-\frac{b}{d}$ với a,b,c,d là các số nguyên dương và $\frac{b}{d}$ tối giản đồng thời $c<7$. Tính $P=a^2-b^2+c^2-d$

A. $P=9$ **B.** $P=10$ **C.** $P=11$ **D.** $P=12$

Lời giải

Ta có $I=\int_0^1 x\ln\left(x^3+1\right)dx=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\frac{3x^2}{x^3+1}dx=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{3}{2}\int_0^1 \frac{x\left[\left(x^3+1\right)-1\right]}{x^3+1}dx$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{3}{2}\int_0^1 xdx+\frac{3}{2}\int_0^1\frac{\left(x+x^2\right)-x^2}{x^3+1}dx=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{3}{4}x^2\Big|_0^1+\frac{3}{2}\left(\int_0^1\frac{xdx}{x^2-x+1}-\int_0^1\frac{x^2dx}{x^3+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\int_0^1\frac{(2x-1)+1}{x^2-x+1}dx-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d\left(x^3+1\right)}{x^3+1}$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\ln\left|x^3+1\right|\Big|_0^1+\frac{3}{4}\int_0^1\frac{d\left(x^2-x+1\right)}{x^2-x+1}+\frac{3}{4}\int_0^1\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$=-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\ln\left|x^2-x+1\right|\Big|_0^1+\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^1=\frac{\pi\sqrt{3}}{6}-\frac{3}{4}$$

Vậy $P=10$.

Chọn ý **B.**

Câu 12.

Biết $I=\int_0^{\pi}e^{2x}\sin^2 xdx=\frac{e^{a\pi}-b}{2c}$ với a,b,c là các số nguyên dương, tính $P=a^2b-c$

A. $P=1$ **B.** $P=0$ **C.** $P=2$ **D.** $P=-1$

Lời giải

Ta có $I=\int_0^{\pi}e^{2x}\sin^2 xdx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}e^{2x}(1-\cos 2x)dx=\frac{e^{2x}}{4}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}e^{2x}\cos 2xdx=\frac{e^{2\pi}-1}{4}-\frac{1}{2}J$

Xét tích phân $J=\int_0^{\pi}e^{2x}\cos 2xdx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}e^{2x}d(\sin 2x)=\frac{1}{2}e^{2x}\sin 2x\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin 2xd\left(e^{2x}\right)$

$$=-\int_0^{\pi}e^{2x}\sin 2xdx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}e^{2x}d(\cos 2x)=\frac{e^{2\pi}-1}{2}-\int_0^{\pi}e^{2x}\cos 2xdx=\frac{e^{2\pi}-1}{2}-J\Rightarrow J=\frac{e^{2\pi}-1}{4}$$

$$\Rightarrow I=\frac{e^{2\pi}-1}{4}-\frac{1}{2}J=\frac{e^{2\pi}-1}{4}-\frac{e^{2\pi}-1}{8}=\frac{e^{2\pi}-1}{8}$$

Vậy $P=0$.

Chọn ý **B.**

Câu 13.

Biết $I=\int_1^{e^{\pi}}\cos(\ln x)dx=\frac{a}{2}\left(e^{\pi}+b\right)$ với a,b là các số nguyên. Tính $P=\frac{a^2}{b}$

A. $P=1$ **B.** $P=2$ **C.** $P=\frac{1}{2}$ **D.** $P=\frac{2}{3}$

Lời giải

Ta có $I=\int_1^{e^{\pi}}\cos(\ln x)dx=x\cos(\ln x)\Big|_1^{e^{\pi}}-\int_1^{e^{\pi}}xd(\cos(\ln x))=-\left(e^{\pi}+1\right)+\int_1^{e^{\pi}}\sin(\ln x)dx$

$$=-\left(e^{\pi}+1\right)+\int_1^{e^{\pi}}\sin(\ln x)dx=-\left(e^{\pi}+1\right)+x\sin(\ln x)\Big|_1^{e^{\pi}}-\int_1^{e^{\pi}}xd(\sin(\ln x))$$

$$=-\left(e^{\pi}+1\right)-\int_1^{e^{\pi}}\cos(\ln x)dx=-\left(e^{\pi}+1\right)-I\Rightarrow 2I=-\left(e^{\pi}+1\right)\Rightarrow I=\frac{-1}{2}\left(e^{\pi}+1\right)$$

Vậy $P=1$.

Chọn ý **A.**

Câu 14.

Biết $I=\int_1^{e^{\pi}}\cos^2(\ln x)dx=\frac{a}{b}\left(e^{\pi}-c\right)$ với a,b,c là các số nguyên tố. Tính giá trị của biểu thức $P=a^2+b^2-c^3$

A. $P=31$ **B.** $P=35$ **C.** $P=33$ **D.** $P=34$

Lời giải

Có $I=\int_1^{e^{\pi}}\cos^2(\ln x)dx=\frac{1}{2}\int_1^{e^{\pi}}\left[1+\cos(2\ln x)\right]dx=\frac{1}{2}x\Big|_1^{e^{\pi}}+\frac{1}{2}\int_1^{e^{\pi}}\cos(2\ln x)dx=\frac{e^{\pi}-1}{2}+\frac{1}{2}J$

Xét $J=\int_1^{e^\pi}\cos(2\ln x)dx=x\cos(2\ln x)\Big|_1^{e^\pi}-\int_1^{e^\pi}xd(\cos(2\ln x))=e^\pi-1+\int_1^{e^\pi}x\frac{2\sin(2\ln x)}{x}dx$

$$=e^\pi-1+2\int_1^{e^\pi}\sin(2\ln x)dx=e^\pi-1+2x\sin(2\ln x)\Big|_1^{e^\pi}-2\int_1^{e^\pi}xd(\sin(2\ln x))$$

$$=e^\pi-1-2\int_1^{e^\pi}x\frac{2\cos(2\ln x)}{x}dx=e^\pi-1-4\int_1^{e^\pi}\cos(2\ln x)dx=e^\pi-1-4J$$

$\Rightarrow 5J=e^\pi-1\Rightarrow J=\frac{e^\pi-1}{5}\Rightarrow I=\frac{e^\pi-1}{2}+\frac{e^\pi-1}{10}=\frac{3}{5}(e^\pi-1)$

Vậy $P=33$.

Chọn ý **C.**

Câu 15.

Biết $I=\int_0^\pi\frac{\sin^2 x}{e^x}dx=\frac{a}{b}(c-e^{-\pi})$ với a,b,c là các số nguyên tố. Tính $P=a^2-b+c$

A. $P=0$ **B.** $P=-1$ **C.** $P=1$ **D.** $P=2$

Lời giải

Ta có $I=\int_0^\pi\frac{\sin^2 x}{e^x}dx=\frac{1}{2}\int_0^\pi e^{-x}(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\int_0^\pi e^{-x}dx-\frac{1}{2}\int_0^\pi e^{-x}\cos 2xdx$

$$=\frac{-e^{-x}}{2}\Big|_0^\pi-\frac{1}{2}\int_0^\pi e^{-x}\cos 2xdx=\frac{1-e^{-\pi}}{2}-\frac{1}{2}\int_0^\pi e^{-x}\cos 2xdx=\frac{1-e^{-\pi}}{2}-\frac{1}{2}J$$

Xét tích phân $J=\int_0^\pi e^{-x}\cos 2xdx=\frac{1}{2}\int_0^\pi e^{-x}d(\sin 2x)=\frac{e^{-x}\sin 2x}{2}\Big|_0^\pi-\frac{1}{2}\int_0^\pi \sin 2xd(e^{-x})$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\pi e^{-x}\sin 2xdx=\frac{-1}{4}\int_0^\pi e^{-x}d(\cos 2x)=-\frac{e^{-x}\cos 2x}{4}\Big|_0^\pi+\frac{1}{4}\int_0^\pi\cos 2xd(e^{-x})$$

$$=\frac{1-e^{-\pi}}{4}-\frac{1}{4}\int_0^\pi e^{-x}\cos 2xdx=\frac{1-e^{-\pi}}{4}-\frac{1}{4}J\Rightarrow\frac{5}{4}J=\frac{1-e^{-\pi}}{4}\Rightarrow J=\frac{1-e^{-\pi}}{5}$$

$\Rightarrow I=\frac{1-e^{-\pi}}{2}-\frac{1}{2}J=\frac{1-e^{-\pi}}{2}-\frac{1-e^{-\pi}}{10}=\frac{2}{5}(1-e^{-\pi})$

Vậy $P=0$

Chọn ý **A.**

Câu 16.

Tính $I=\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx\ (a>0)$

A. $I=\frac{\pi a^2}{4}$ **B.** $I=\frac{\pi a^2}{2}$ **C.** $I=\frac{\pi a^2}{8}$ **D.** $I=\frac{3\pi a^2}{4}$

Lời giải

Ta có $I=\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx\ (a>0)$

$$=x\sqrt{a^2-x^2}\Big|_0^a-\int_0^a xd\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)=\int_0^a\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int_0^a\frac{a^2-\left(a^2-x^2\right)}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$=a^2\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}-\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=a^2\arcsin\frac{x}{a}\Big|_0^a-\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{\pi a^2}{2}-I\Rightarrow 2I=\frac{\pi a^2}{2}\Rightarrow I=\frac{\pi a^2}{4}$$

Chọn ý **A.**

Câu 17.

Biết $I=\int_0^a\sqrt{a^2+x^2}dx\left(a>0\right)=\frac{\sqrt{b}+\ln\left(1+\sqrt{c}\right)}{d}a^2$ với b,c,d là các ẩn số nguyên, tính $P=\left(b-c-d\right)^2+b-cd$

A. $P=0$ **B.** $P=1$ **C.** $P=2$ **D.** $P=4$

Lời giải

Ta có $I=x\sqrt{a^2+x^2}\Big|_0^a-\int_0^a xd\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)=a^2\sqrt{2}-\int_0^a\frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$

$$=a^2\sqrt{2}-\int_0^a\frac{\left(a^2+x^2\right)-a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx=a^2\sqrt{2}-\int_0^a\sqrt{a^2+x^2}dx+a^2\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$=a^2\sqrt{2}+a^2\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)\Big|_0^a-\int_0^a\sqrt{a^2+x^2}dx=a^2\sqrt{2}+a^2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-I$$

$$\Rightarrow 2I=a^2\sqrt{2}+a^2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\Rightarrow I=\frac{\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{2}a^2$$

Vậy $P=2$.

Chọn ý **C.**

Câu 18.

Biết $I=\int_0^a x^2\sqrt{a^2+x^2}dx\left(a>0\right)=\frac{b\sqrt{2}-\ln\left(1+\sqrt{d}\right)}{2c}a^4$ với b,c,d là các ẩn số thực, tính $P=b^2+c-d^3$

A. $P=3$ **B.** $P=5$ **C.** $P=6$ **D.** $P=8$

Lời giải

Ta có $I=\int_0^a x^2\sqrt{a^2+x^2}dx\left(a>0\right)$, đặt $\begin{cases}u=x\\dv=x\sqrt{a^2+x^2}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=\frac{1}{3}\left(a^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}\end{cases}$

$$\Rightarrow I=\frac{x}{3}\left(a^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a-\frac{1}{3}\int_0^a\left(a^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}a^4-\frac{a^2}{3}\int_0^a\sqrt{a^2+x^2}dx-\frac{1}{3}\int_0^a x^2\sqrt{a^2+x^2}dx=\frac{2\sqrt{2}}{3}a^4-\frac{a^2}{3}\int_0^a\sqrt{a^2+x^2}dx-\frac{1}{3}I$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}I = \frac{2\sqrt{2}}{3}a^4 - \frac{a^2}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{2}a^2 = \frac{3\sqrt{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{6}a^4 \Rightarrow I = \frac{3\sqrt{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{8}a^4$$

Vậy $P=5$

Câu 19.

Tính $I=\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx\left(a>0\right)$

A. $I=\frac{\pi a^4}{16}$ **B.** $I=\frac{\pi a^4}{8}$ **C.** $I=\frac{\pi a^4}{4}$ **D.** $I=\frac{\pi a^4}{2}$

Lời giải

Ta có $I=\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx\left(a>0\right)$, đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=x\sqrt{a^2-x^2}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=\frac{-1}{3}\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}} \end{cases}$

$$\Rightarrow I=-\frac{x}{3}\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a+\frac{1}{3}\int_0^a\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{3}\left(\int_0^a a^2\sqrt{a^2-x^2}dx-\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx\right)$$

$$=\frac{a^2}{3}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx-\frac{1}{3}I\Rightarrow\frac{4}{3}I=\frac{a^2}{3}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{\pi a^4}{12}\Rightarrow I=\frac{\pi a^4}{16}$$

Câu 20.

Cho tích phân $I=\int_{a\sqrt{2}}^{2a}\sqrt{x^2-a^2}dx=\frac{a^2}{2}\left[\left(b\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)-\ln\frac{c+\sqrt{b}}{d+\sqrt{2}}\right]$ với b,c,d là các ẩn số thực dương, tính $P=\frac{b^2c}{d^2-1}$

A. $P=1$ **B.** $P=2$ **C.** $P=\frac{1}{2}$ **D.** $P=4$

Lời giải

Ta có $I=\int_{a\sqrt{2}}^{2a}\sqrt{x^2-a^2}dx=x\sqrt{x^2-a^2}\Big|_{a\sqrt{2}}^{2a}-\int_{a\sqrt{2}}^{2a}xd\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)$

$$=\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)a^2-\int_{a\sqrt{2}}^{2a}\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)a^2-\int_{a\sqrt{2}}^{2a}\frac{a^2+\left(x^2-a^2\right)}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$$

$$=\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)a^2-a^2\int_{a\sqrt{2}}^{2a}\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}-\int_{a\sqrt{2}}^{2a}\sqrt{x^2-a^2}dx$$

$$=\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)a^2-a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\Big|_{a\sqrt{2}}^{2a}-\int_{a\sqrt{2}}^{2a}\sqrt{x^2-a^2}dx$$

$$=\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)a^2-a^2\ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}-I$$

$$\Rightarrow 2I=\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)a^2-a^2\ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}\Rightarrow I=\frac{a^2}{2}\left[\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)-\ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}\right]$$

Vậy $P=1$

Câu 21.

Biết $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^3 x}=\frac{\sqrt{a}+\ln\left(1+\sqrt{b}\right)}{c}$ với a,b,c là các số thực dương. Tính giá trị của biểu thức $P=\frac{a^2-b}{c^2-a}$

A. $P=1$ **B.** $P=\frac{1}{2}$ **C.** $P=\frac{1}{4}$ **D.** $P=2$

Lời giải

Ta có $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^3 x}=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}d(\cot x)=-\left.\frac{\cot x}{\sin x}\right|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot x d\left(\frac{1}{\sin x}\right)$

$$=\sqrt{2}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot x\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx=\sqrt{2}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx$$

$$=\sqrt{2}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^3 x}=\sqrt{2}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x dx}{1-\cos^2 x}-I$$

$$\Rightarrow 2I=\sqrt{2}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\Rightarrow I=\frac{\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{2}$$

Vậy $P=1$

Câu 22.

Biết $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^5 x}=\frac{a\sqrt{2}}{2b}+\frac{c}{d}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ với a,b,c,d là các số thực dương, $\frac{c}{d}$ là phân số tối giản. Tính $P=3a+b-cd$

A. $P=0$ **B.** $P=1$ **C.** $P=2$ **D.** $P=-1$

Lời giải

Ta có $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^5 x}=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^3 x}d(\cot x)=-\left.\frac{\cot x}{\sin^3 x}\right|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot x d\left(\frac{1}{\sin^3 x}\right)$

$$=2\sqrt{2}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot x\frac{3\cos x}{\sin^4 x}dx=2\sqrt{2}-3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^3 x}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx$$

$$=2\sqrt{2}+3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^3 x}-3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^5 x}=2\sqrt{2}+3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^3 x}-3I$$

$$\Rightarrow 4I=2\sqrt{2}+\frac{3}{2}\left[\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]\Rightarrow I=\frac{7\sqrt{2}}{8}+\frac{3}{8}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

Vậy $P=1$

Câu 23.

Cho tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos^3 x}=\frac{a\sqrt{b}+\ln\left(c+\sqrt{d}\right)}{2}$ với a,b,c,d là các số thực dương, tính $P=a^2+b^2+c^2-d^2$

A. $P=11$ **B.** $P=12$ **C.** $P=8$ **D.** $P=9$

Lời giải

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos^3 x}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos x}d\left(\tan x\right)=\left.\frac{\tan x}{\cos x}\right|_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan x d\left(\frac{1}{\cos x}\right)=2\sqrt{3}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan x\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$$

$$=2\sqrt{3}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos x}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=2\sqrt{3}+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos x}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos^3 x}=2\sqrt{3}+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x dx}{1-\sin^2 x}-I$$

$$\Rightarrow 2I=2\sqrt{3}+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\left(\sin x\right)}{1-\sin^2 x}=2\sqrt{3}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}=2\sqrt{3}+\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\Rightarrow I=\frac{2\sqrt{3}+\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}{2}$$

Vậy $P=8$

Câu 24.

Biết $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos^5 x}=\frac{11\sqrt{a}}{b}+\frac{c}{2d}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$ với a,b,c,d là các số thực dương, $\frac{c}{d}$ là phân số tối giản, $a<4$. Tính $P=a+b+c+d$

A. $P=0$ **B.** $P=1$ **C.** $P=2$ **D.** $P=-1$

Lời giải

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos^5 x}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^3 x}d\left(\tan x\right)=\left.\frac{\tan x}{\cos^3 x}\right|_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan x d\left(\frac{1}{\cos^3 x}\right)$

$$=8\sqrt{3}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan x\frac{3\sin x}{\cos^4 x}dx=8\sqrt{3}-3\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^3 x}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=8\sqrt{3}+3\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos^3 x}-3\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos^5 x}$$

$$=8\sqrt{3}+3\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos^3 x}-3I\Rightarrow 4I=8\sqrt{3}+3\cdot\frac{2\sqrt{3}+\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}{2}\Rightarrow I=\frac{11\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{8}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$$

Vậy $P=0$

Câu 25.

Cho tích phân $K=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^5+2x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx=\frac{a}{b}$ với a,b là các số nguyên dương, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $\frac{a}{b^2+2}$?

A. $\frac{26}{27}$ **B.** $\frac{26}{11}$ **C.** $\frac{13}{9}$ **D.** $\frac{13}{19}$

Lời giải

Ta có $K=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^5+2x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^3\left(x^2+2\right)}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^3\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2+1}}dx+\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$

$$=\int_0^{\sqrt{3}}x^2\cdot x\sqrt{x^2+1}dx+\int_0^{\sqrt{3}}x^2\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}=I+J$$

Xét tích phân $I=\int_0^{\sqrt{3}}x^2.x\sqrt{x^2+1}dx$, đặt $\begin{cases}u=x^2\\ dv=x\sqrt{x^2+1}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2xdx\\ v=\frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\end{cases}$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{3}x^2\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{3}}-\frac{2}{3}\int_0^{\sqrt{3}}x\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}dx=8-\frac{1}{3}\int_0^{\sqrt{3}}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}d\left(x^2+1\right)$$

$$=8-\frac{2}{15}\left(x^2+1\right)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^{\sqrt{3}}=\frac{58}{15}$$

Xét tích phân $J=\int_0^{\sqrt{3}}x^2\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$, đặt $\begin{cases}u=x^2\\ dv=\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2xdx\\ v=\sqrt{x^2+1}\end{cases}$

$$\Rightarrow J=x^2\sqrt{x^2+1}\Big|_0^{\sqrt{3}}-\int_0^{\sqrt{3}}2x\sqrt{x^2+1}dx=6-\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+1}d\left(x^2+1\right)=6-\frac{2}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{3}}=\frac{4}{3}$$

$\Rightarrow K=I+J=\frac{58}{15}+\frac{4}{3}=\frac{26}{5}$

Câu 26.

Tính $K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin^2x}\sin x\cos^3xdx$

A. $K=\frac{e}{2}-2$ **B.** $K=\frac{e}{2}-1$ **C.** $K=\frac{e}{4}-1$ **D.** $K=\frac{e}{2}+1$

Lời giải

Ta có $K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin^2x}\sin x\cos^3xdx=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2x\left(2\sin x\cos x\right)e^{\sin^2x}dx$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos2x\right)d\left(e^{\sin^2x}\right)=\frac{1}{4}(1+\cos2x)e^{\sin^2x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin^2x}d\left(1+\cos2x\right)$$

$$=\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin^2x}\sin2xdx=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\left(e^{\sin^2x}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{\sin^2x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{e}{2}-1$$

Câu 27.

Biết $I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\ln(1-\cos x)dx=\frac{\sqrt{a}}{2}\ln b-\frac{\pi}{2c}-1+\frac{\sqrt{3}}{2}$ với a,b,c là các số thực dương. Tính $P=3a-b+c^2$

A. $P=16$ **B.** $P=18$ **C.** $P=20$ **D.** $P=24$

Lời giải

$$I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\ln(1-\cos x)dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\ln(1-\cos x)d(\sin x)$$

$$=\sin x\ln(1-\cos x)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x d\left(\ln(1-\cos x)\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\ln 2-\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\frac{\sin xdx}{1-\cos x}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\ln 2-\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\ln 2-\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\ln 2-(x+\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ln 2-\frac{\pi}{6}-1+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vậy $P=16$

Câu 28.

Biết $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\sin x\ln(\tan x)dx=\ln\left(1+\sqrt{a}\right)-\frac{b}{c}\ln 3$ với a,b,c là các số thực dương, $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $P=(a+b-c)^2$

A. $P=0$ **B.** $P=1$ **C.** $P=4$ **D.** $P=9$

Lời giải

Có $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\sin x\ln(\tan x)dx=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\ln(\tan x)d(\cos x)=-\cos x\ln(\tan x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cos xd\left(\ln(\tan x)\right)$

$$=-\frac{1}{4}\ln 3+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos xdx}{\cos^2 x(\tan x)}=-\frac{1}{4}\ln 3+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin x}=-\frac{1}{4}\ln 3+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin xdx}{\sin^2 x}$$

$$=-\frac{1}{4}\ln 3-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{d(\cos x)}{1-\cos^2 x}=-\frac{1}{4}\ln 3-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\frac{3}{4}\ln 3$$

Vậy $P=1$

Câu 29.

Biết $I=\int_0^{\frac{1}{2}}(x+1)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx=\frac{\pi}{3a}+\frac{\sqrt{b}}{2c}$ với a,b,c là các số thực dương và $\frac{b}{c}$ tối giản. Tính $P=a^2+b^2-c^2$

A. $P=8$ **B.** $P=9$ **C.** $P=24$ **D.** $P=13$

Lời giải

Ta có $I=\int_0^{\frac{1}{2}}(x+1)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}d(x+1)^2=\frac{(x+1)^2}{2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}(x+1)^2d\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)=\frac{3\sqrt{3}-4}{8}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}(x+1)^2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{dx}{(x+1)^2}=\frac{3\sqrt{3}-4}{8}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$$

Đặt $u=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\Rightarrow x=\frac{u^2-1}{u^2+1}\Rightarrow dx=\frac{4udu}{(u^2+1)^2}\Rightarrow J=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{4u^2du}{(u^2+1)^2}$

Đặt $u=\tan t\Rightarrow du=\frac{dt}{\cos^2 t}$

$$\Rightarrow J=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{4u^2du}{(u^2+1)^2}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{4\tan^2 t}{(1+\tan^2 t)^2}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{4\tan^2 tdt}{1+\tan^2 t}=4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 tdt$$

$$=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos 2t)dt=(2t-\sin 2t)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{6}+1-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow I=\frac{3\sqrt{3}-4}{8}+\frac{1}{2}J=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}$$

Vậy $P=9$

Câu 30.

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^3 x.f'(x).e^{f(x)}dx=8$ và $f(3)=\ln 3$. Tính $I=\int_0^3 e^{f(x)}dx$.

A. $I=1$. **B.** $I=11$. **C.** $I=8-\ln 3$. **D.** $I=8+\ln 3$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=f'(x)e^{f(x)}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=e^{f(x)}\end{cases}$ Khi đó $\int_0^3 x.f'(x)e^{f(x)}dx=x.e^{f(x)}\Big|_0^3-\int_0^3 e^{f(x)}dx$

$$\Rightarrow 8=3.e^{f(3)}-\int_0^3 e^{f(x)}dx\Rightarrow\int_0^3 e^{f(x)}dx=9-8=1$$

Chọn ý **A.**

Câu 31.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, và đồng thời thỏa mãn hai điều kiện $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(x)\cos^2 xdx=10$ và $f(0)=3$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin 2xdx$ bằng?

A. $I=-13$. **B.** $I=-7$. **C.** $I=7$. **D.** $I=13$.

Lời giải

Xét $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(x)\cos^2 xdx=10$, đặt $\begin{cases}u=\cos^2 x\\dv=f'(x)\cos^2 xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=-\sin 2xdx\\v=f(x)\end{cases}$

$$\Rightarrow 10=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos^2 xdx=\cos^2 xf(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2xdx$$

$$\Leftrightarrow 10=-f(0)+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2xdx \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2xdx=10+f(0)=13$$

Chọn ý **D.**

Câu 32.

Cho $\int_1^2 \ln\left(16-x^2\right)dx=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5+d$ với a,b,c,d là các số nguyên. Giá trị biểu thức $a+b+c+d$ bằng

A. 20 **B.** 28 **C.** 6 **D.** 9

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u=\ln\left(16-x^2\right) \\ dv=dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{-2x}{16-x^2}dx \\ v=x \end{cases} \Rightarrow I=\int_1^2 \ln\left(16-x^2\right)=x\ln\left(16-x^2\right)\Big|_1^2+\int_1^2 \dfrac{2x^2}{16-x^2}dx$

$\Rightarrow I=2\ln 12-\ln 15+2\int_1^2 \dfrac{x^2}{16-x^2}dx=2\ln 12-\ln 15+2J$ (với $J=\int_1^2 \dfrac{x^2}{16-x^2}dx$)

Ta có $J=\int_1^2 \dfrac{x^2}{16-x^2}dx=\int_1^2 \dfrac{x^2-16+16}{16-x^2}dx=\int_1^2\left(\dfrac{16}{(4-x)(4+x)}-1\right)dx$

$$\Rightarrow J=\int_1^2\left(\frac{2}{4-x}+\frac{2}{4+x}\right)dx-\int_1^2 dx=2\int_1^2\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x-4}\right)dx-x\Big|_1^2$$

$$\Rightarrow J=2.\ln\left|\frac{x+4}{x-4}\right|\Bigg|_1^2-1=2\ln 3-2\ln\frac{5}{3}-1=4\ln 3-2\ln 5-1$$

Thay vào ta được $I=2\ln 12-\ln 15+2\left(4\ln 3-2\ln 5-1\right)=4\ln 2+9\ln 3-5\ln 5-2$

$$\Rightarrow a=4, b=9, c=-5, d=-2 \Rightarrow a+b+c+d=6$$

Chọn ý **C**.

Câu 33.

Tính nguyên hàm của hàm số $f(x)=\ln\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$.

A. $x\ln\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-x+\arctan x+C$ **B.** $x\ln\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-x-\arctan x+C$

C. $x\ln\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+x-\arctan x+C$ **D.** $x\ln\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+x+\arctan x+C$

Lời giải

$I=\int \ln\left(x+\frac{1}{x}\right)dx$. Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)\\ dv=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{x+\frac{1}{x}}dx\\ v=x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{x^2-1}{\left(x^2+1\right).x}dx\\ v=x\end{cases}$

$$\Rightarrow I=x\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)-\int\frac{x^2-1}{x^2+1}dx=x\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)-\int\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)dx$$

$$\Rightarrow I=x\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)-\int dx+2\int\frac{1}{x^2+1}dx=x\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)-x+2\int\frac{1}{x^2+1}dx$$

Ta sẽ đi tính $\int\frac{1}{x^2+1}dx$ bằng phương pháp đổi biến quen thuộc

Đặt $x=\tan t\Rightarrow\begin{cases}x^2+1=\tan^2 t+1=\dfrac{1}{\cos^2 t}\\ dx=\dfrac{dt}{\cos^2 t}\end{cases}$

$$\Rightarrow\int\frac{1}{x^2+1}dx=\int\cos^2 t.\frac{dt}{\cos^2 t}=\int dt=t+C=\arctan x+C$$

$$\Rightarrow I=x\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)-x+\arctan x+C$$

Chọn ý **A**.

Câu 34.

Biết $\int_0^1\frac{x^2.e^x}{(x+2)^2}dx=a-\frac{b}{c}e$, với a,b,c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản.

Tính $P=a+b^2+c^3$

A. $P=13$ **B.** $P=12$ **C.** $P=29$ **D.** $P=34$

Lời giải

Ta thấy, tích phân đầu tiên của đề bài khá là khó để áp dụng ngay phương pháp Nguyên hàm từng phần. Tuy nhiên, ta có bước biến đổi khá thú vị như sau

$$I=\int_0^1\frac{x^2.e^x}{(x+2)^2}dx=\int_0^1\frac{(x+2-2)^2.e^x}{(x+2)^2}dx=\int_0^1\left(1-\frac{2}{x+2}\right)^2.e^x dx$$

$$\Rightarrow I=\int_0^1\left(1-\frac{4}{x+2}+\frac{4}{(x+2)^2}\right).e^x dx=\int_0^1 e^x dx-\left(\int_0^1\frac{4}{x+2}.e^x dx-\int_0^1\frac{4}{(x+2)^2}.e^x dx\right)$$

Đặt $\begin{cases}u=\dfrac{4}{x+2}\\ dv=e^x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{-4}{(x+2)^2}dx\\ v=e^x\end{cases}\Rightarrow\int_0^1\frac{4}{x+2}.e^x dx=\left.\frac{4e^x}{x+2}\right|_0^1-\int_0^1\frac{-4}{(x+2)^2}.e^x dx$

$$\Rightarrow\int_0^1\frac{4e^x}{x+2}dx-\int_0^1\frac{4e^x}{(x+2)^2}dx=\left.\frac{4e^x}{x+2}\right|_0^1\Rightarrow I=\left.e^x\right|_0^1-\left.\frac{4e^x}{x+2}\right|_0^1=e^x-1-\left(\frac{4}{3}e^x-2\right)=1-\frac{1}{3}e^x$$

$$\Rightarrow a=1, b=1, c=3. \text{ Do vậy } P=a+b^2+c^3=29.$$

Chọn ý **C**.

Câu 35.

Tính nguyên hàm của hàm số $f(x)=(x^3+1)\cos 2x$.

A. $\dfrac{2x^3-3x-2}{4}\sin 2x+\dfrac{6x^2+3}{8}\cos 2x+C$

B. $\dfrac{2x^3+3x-2}{8}\sin 2x-\dfrac{6x^2+3}{4}\cos 2x+C$

C. $\dfrac{2x^3-3x+2}{4}\sin 2x+\dfrac{6x^2-3}{8}\cos 2x+C$

D. $\dfrac{2x^3-3x-2}{8}\sin 2x+\dfrac{6x^2+3}{4}\cos 2x+C$

Lời giải

Bài này chúng ta không còn cách nào khác ngoài cách ngồi chịu khó nguyên hàm từng phần nhiều lần.

Đặt $\begin{cases} u=x^3+1 \\ dv=\cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=3x^2dx \\ v=\dfrac{\sin 2x}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int (x^3+1)\cos 2x dx=(x^3+1)\frac{\sin 2x}{2}-\frac{3}{2}\int x^2\sin 2x dx=(x^3+1)\frac{\sin 2x}{2}-\frac{3}{2}J$$

Đặt $\begin{cases} u=x^2 \\ dv=\sin 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=2xdx \\ v=\dfrac{-\cos 2x}{2} \end{cases} \Rightarrow J=-x^2\dfrac{\cos 2x}{2}+\displaystyle\int x\cos 2x dx=-x^2\dfrac{\cos 2x}{2}+K$

Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=\cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=\dfrac{\sin 2x}{2} \end{cases} \Rightarrow K=\dfrac{x\sin 2x}{2}-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \sin 2x dx=\dfrac{x\sin 2x}{2}+\dfrac{\cos 2x}{4}$

$$\Rightarrow J=-x^2\frac{\cos 2x}{2}+\frac{x\sin 2x}{2}+\frac{\cos 2x}{4} \Rightarrow I=(x^3+1)\frac{\sin 2x}{2}-\frac{3}{2}\left(-x^2\frac{\cos 2x}{2}+\frac{x\sin 2x}{2}+\frac{\cos 2x}{4}\right)$$

$$\Rightarrow I=\frac{2x^3-3x+2}{4}\sin 2x+\frac{6x^2-3}{8}\cos 2x+C.$$

Chọn ý **C**.

Câu 36.

Tính $I=\displaystyle\int \frac{xdx}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{3}\right)}$.

A. $3x\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{3}\right)+9\ln\left|\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{3}\right)\right|+C$

B. $3x\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{3}\right)-9\ln\left|\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{3}\right)\right|+C$

C. $3x\cot\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{3}\right)-9\ln\left|\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{3}\right)\right|+C$

D. $3x\cot\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{3}\right)+9\ln\left|\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{3}\right)\right|+C$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \dfrac{dx}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{3}\right)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = 3\cot\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow I = 3x\cot\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{3}\right) - 3\int \cot\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{3}\right)dx$

$$= 3x\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{3}\right) - 3\int \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{3}\right)}dx = 3x\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{3}\right) - 3J$$

Ta sẽ tính J bằng phép đổi biến. Đặt $y = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{3}\right) \Rightarrow dy = \dfrac{-1}{3}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{3}\right)$

$$\Rightarrow J = \int \frac{-3dy}{y} = -3\int \frac{dy}{y} = -3\ln|y| = -3\ln\left|\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{3}\right)\right|$$

$$\Rightarrow I = 3x\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{3}\right) + 9\ln\left|\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{3}\right)\right| + C.$$

Chọn ý **D.**

Nhận xét. *Bài này không quá là khó trong vấn đề nghĩ ý tưởng về việc sẽ dùng Nguyên hàm từng phần và Phép đổi biến. Tuy nhiên, trong các phép biến đổi ở lời giản, chúng ta phải thực sự cẩn thận trong việc tính đạo hàm của hàm hợp cũng như dấu của chúng.*

Câu 37.

Biết $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(1 + \sin 2x)dx = \dfrac{\pi^2}{a} - b \ (a, b \in \mathbb{R})$. Tính $P = a - 2b^{-2}$.

A. $P = 2$ **B.** $P = 4$ **C.** $P = 0$ **D.** $P = 1$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = (1 + \sin 2x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = x + \sin^2 x \end{cases}$

$$\Rightarrow I = x(x + \sin^2 x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}}(x + \sin^2 x)dx = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} xdx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 xdx$$

$$I = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{8} - \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos 2x}{2}dx = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{8} - \frac{\pi^2}{32} - \frac{1}{2}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2xdx$$

$$I = \frac{\pi^2}{32} + \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}.\frac{\sin 2x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{32} + \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} a = 32 \\ b = -\dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow P = a - 2b^{-2} = 0$$

Chọn ý **C.**

Câu 38.

iết $I=\int_1^e\left(3x^2+\dfrac{1}{x}\right)\ln x dx=a.e^3+b\ (a,b\in\mathbb{R})$. Tính $P=a^2+8b^2$.

A. $P=\dfrac{11}{2}$ **B.** $P=\dfrac{29}{9}$ **C.** $P=6$ **D.** $P=5$

Lời giải

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=\left(3x^2+\dfrac{1}{x}\right)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{dx}{x}\\ v=x^3+\ln|x|\end{cases}\Rightarrow I=\left(x^3+\ln|x|\right)\ln x\Big|_1^e-\int_1^e\left(x^2+\dfrac{\ln|x|}{x}\right)dx$

$$\Rightarrow I=e^3+1-\frac{x^3}{3}\Big|_1^e-\frac{\ln^2|x|}{2}\Big|_1^e=e^3+1-\left(\frac{e^3}{3}-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}=\frac{2}{3}e^3+\frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{2}{3}\\ b=\dfrac{5}{6}\end{cases}\Rightarrow P=a^2+8b^2=6$$

Chọn ý **C**.

Câu 39.

Đâu là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\ln^2 x$.

A. $x\ln^2 x+x\ln x+x+C$ **B.** $x\ln^2 x-x\ln x-x+C$

C. $x\ln^2 x+x\ln x-x+C$ **D.** $x\ln^2 x-x\ln x+x+C$

Lời giải

Ta đi tính $I=\int\ln^2 xdx$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln^2 x\\ dv=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{2\ln x}{x}dx\\ v=x\end{cases}\Rightarrow I=x\ln^2 x-\int 2\ln xdx=x\ln^2 x-2\int\ln xdx$

Lại tiếp tục tính $\int\ln xdx$ bằng Nguyên hàm từng phần

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{dx}{x}\\ v=x\end{cases}\Rightarrow\int\ln dx=x\ln x-\int dx=x\ln x-x$

$$\Rightarrow I=x\ln^2 x-(x\ln x-x)+C=x\ln^2 x-x\ln x+x+C$$

Chọn ý **D**.

Nhận xét: Ở bài toán trên, ta phải dùng 2 lần Nguyên hàm từng phần để giải trọn vẹn bài toán.

TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC

Câu 40.

Cho $\int_0^1 \left(x^2+1\right)e^{3x}dx = \dfrac{ae^3-b}{c}$ (a, b, c là các số nguyên dương). Tính $P = a+b-c$.

A. $P = 5$ **B.** $P = -2$ **C.** $P = -3$ **D.** $P = 6$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = x^2+1 \\ dv = e^{3x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2xdx \\ v = \dfrac{e^{3x}}{3} \end{cases} \Rightarrow I = \int_0^1 \left(x^2+1\right)e^{3x}dx = \left(x^2+1\right)\dfrac{e^{3x}}{3}\Bigg|_0^1 - \dfrac{2}{3}\int_0^1 xe^{3x}dx$

$$\Rightarrow I = \frac{2}{3}e^3 - \frac{1}{3} - \frac{2}{3}J \quad \left(J = \int_0^1 xe^{3x}dx\right)$$

Ta sẽ tính J lại bằng nguyên hàm từng phần

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{3x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \dfrac{e^{3x}}{3} \end{cases} \Rightarrow J = x.\dfrac{e^{3x}}{3}\Bigg|_0^1 - \dfrac{1}{3}\int_0^1 e^{3x}dx = \dfrac{e^3}{3} - \dfrac{1}{3}.\dfrac{e^{3x}}{3}\Bigg|_0^1$

$$\Rightarrow J = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{2e^3}{9} - \frac{1}{9}$$

Do đó $I = \dfrac{2}{3}e^3 - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2e^3}{9} - \dfrac{1}{9}\right) = \dfrac{14e^3-11}{27} \Rightarrow a = 14; b = 11$ và $c = 27 \Rightarrow P = a+b-c = -2$.

Chọn ý **B**.

Câu 41.

Cho tích phân $\int_{\frac{1}{12}}^{12} \left(1+x-\dfrac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx = \dfrac{a}{b}e^{\frac{c}{d}}$ trong đó a, b, c, d nguyên dương và $\dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Giá trị của biểu thức $bc-ad$ bằng

A. 24 **B.** $\dfrac{1}{6}$ **C.** 12 **D.** 1

Lời giải

Có $I = \int_{\frac{1}{12}}^{12} \left(1+x-\dfrac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx = \int_{\frac{1}{12}}^{12} e^{x+\frac{1}{x}}dx + \int_{\frac{1}{12}}^{12} \left(x-\dfrac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$

Đặt $\begin{cases} u = e^{x+\frac{1}{x}} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx \\ v = x \end{cases} \Rightarrow \int_{\frac{1}{12}}^{12} e^{x+\frac{1}{x}}dx = xe^{x+\frac{1}{x}}\Bigg|_{\frac{1}{12}}^{12} - \int_{\frac{1}{12}}^{12} \left(x-\dfrac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$

$$\Rightarrow I = xe^{x+\frac{1}{x}}\Bigg|_{\frac{1}{12}}^{12} = 12e^{12+\frac{1}{12}} - \frac{1}{12}e^{12+\frac{1}{12}} = \frac{143}{12}e^{\frac{145}{12}} \Rightarrow a = 143, b = 12, c = 145, d = 12 \Rightarrow bc-ad = 24$$

Chọn ý **A.**

Câu 42.

Cho tích phân $\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x\left(x^2+48\right)}}-\dfrac{x}{\left(x^2+48\right)\sqrt{x^2+48}}\right)dx=\dfrac{e^2}{a}-\dfrac{e}{b}$ $\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$. Tính ab.

A. 42 **B.** 56 **C.** 81 **D.** 45

Lời giải

Phân tích: *Tương tự như những bài tích phân cồng kềnh khác, ta sẽ tách tích phân thành 2 phần.*

$$I=\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x\left(x^2+48\right)}}-\frac{x}{\left(x^2+48\right)\sqrt{x^2+48}}\right)dx=\int_1^4\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}.\sqrt{x^2+48}}dx-\int_1^4\frac{xe^{\sqrt{x}}}{\left(x^2+48\right)\sqrt{x^2+48}}dx$$

Đặt $\begin{cases}u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2018}}\\ dv=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{-x}{\left(x^2+2018\right)\sqrt{x^2+2018}}dx\\ v=e^{\sqrt{x}}\end{cases}$

$$\Rightarrow\int_1^4\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}.\sqrt{x^2+48}}dx=\left.\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x^2+48}}\right|_1^4-\int_1^4\frac{-xe^{x}}{\left(x^2+48\right)\sqrt{x^2+48}}dx$$

$$\Rightarrow I=\left.\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x^2+48}}\right|_1^4=\frac{e^2}{8}-\frac{e}{7}\Rightarrow\begin{cases}a=8\\ b=7\end{cases}\Rightarrow ab=56$$

Chọn ý **B**.

Hai ví dụ mở đầu có vẻ vẫn đang chỉ dừng ở mức dễ áp dụng công thức, từ bài thứ 3 trở đi mọi thứ sẽ nâng cao hơn nhiều yêu cầu phải biến đổi và có tư duy hơn trong việc đặt u, dv!

Câu 43.

Cho hai hàm số liên tục $f(x)$ và $g(x)$ có nguyên hàm lần lượt là $F(x)$ và $G(x)$ trên đoạn $[1;2]$. Biết rằng $F(1)=1$, $F(2)=4$, $G(1)=\dfrac{3}{2}$, $G(2)=2$ và $\int\limits_1^2 f(x)G(x)dx=\dfrac{67}{12}$. Tính $\int\limits_1^2 F(x)g(x)dx$?

A. $\dfrac{11}{12}$ **B.** $-\dfrac{145}{12}$ **C.** $-\dfrac{11}{12}$ **D.** $\dfrac{145}{12}$

Lời giải

Đặt $\begin{cases}u=F(x)\\ dv=g(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=f(x)dx\\ v=G(x)\end{cases}\Rightarrow\int\limits_1^2 F(x)g(x)dx=\left(F(x)G(x)\right)\Big|_1^2-\int\limits_1^2 f(x)G(x)dx$

$$=F(2)G(2)-F(1)G(1)-\int\limits_1^2 f(x)G(x)dx=4.2-1.\frac{3}{2}-\frac{67}{12}=\frac{11}{12}.$$

Chọn ý **A.**

Câu 44.

Biết $\int_1^3 \frac{3+\ln x}{(x+1)^2}dx = \frac{a+\ln b-\ln c}{4}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Giá trị của biểu thức $P=a+b+c$ bằng?

A. 46 **B.** 35 **C.** 11 **D.** 48

Lời giải

Ta có $\int_1^3 \frac{3+\ln x}{(x+1)^2}dx = -\int_1^3 (3+\ln x)d\left(\frac{1}{x+1}\right) = -\frac{3+\ln x}{x+1}\Big|_1^3 + \int_1^3 \frac{1}{x+1}d(3+\ln x)$

$$= -\frac{3+\ln 3}{4}+\frac{3}{2}+\int_1^3 \frac{1}{x+1}.\frac{1}{x}dx = \frac{3-\ln 3}{4}+\int_1^3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{3-\ln 3}{4}+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\Bigg|_1^3$$

$$= \frac{3-\ln 3}{4}+\ln\frac{3}{4}-\ln\frac{1}{2} = \frac{3-\ln 3}{4}+\ln 3-\ln 4+\ln 2 = \frac{3-\ln 3}{4}+\ln 3-\ln 2$$

$$= \frac{3+3\ln 3-4\ln 2}{4} = \frac{3+\ln 27-\ln 16}{4} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=27 \Rightarrow P=46. \\ c=16 \end{cases}$$

Chọn ý **A.**

Câu 45.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trong đoạn $[1;e]$, biết $\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx = 1$, $f(e)=1$. Khi đó $I=\int_1^e f'(x).\ln x dx$ bằng?

A. $I=4$ **B.** $I=3$ **C.** $I=2$ **D.** $I=0$

Lời giải

Cách 1. Ta có $I=\int_1^e f'(x).\ln x dx = f(x).\ln x\Big|_1^e - \int_1^e f(x).\frac{1}{x}dx = f(e)-1=1-1=0$.

Cách 1. Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{dx}{x} \\ v=f(x) \end{cases}$.

Suy ra $I=\int_1^e f'(x).\ln x dx = f(x)\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{f(x)}{x}dx = f(e)-1=1-1=0$.

Chọn ý **D.**

Câu 46.

Cho $y=f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua điểm $M\left(-\frac{1}{2};4\right)$ và $\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt=3$, tính $I=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\sin 2x.f'(\sin x)dx$.

A. $I=10$ **B.** $I=-2$ **C.** $I=1$ **D.** $I=-1$

Lời giải

Xét tích phân $I=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\sin 2x.f'(\sin x)dx=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}2\sin x.f'(\sin x).\cos xdx$.

Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos xdx$. Đổi cận $\begin{cases}x=-\frac{\pi}{6}\Rightarrow t=-\frac{1}{2}\\ x=0\Rightarrow t=0\end{cases}\Rightarrow I=2\int_{-\frac{1}{2}}^{0}t.f'(t)dt$.

Đặt $\begin{cases}u=2t\\ dv=f'(t)dt\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2dt\\ v=f(t)\end{cases}\Rightarrow I=2t.f(t)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0}-2\int_{-\frac{1}{2}}^{0}f(t)dt=f\left(-\frac{1}{2}\right)-2\int_{-\frac{1}{2}}^{0}f(t)dt$.

- Đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua điểm DA $\Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right)=4$.
- Hàm số $y=f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow\int_{-\frac{1}{2}}^{0}f(t)dt=\int_0^{\frac{1}{2}}f(t)dt=\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)dx=3.$$

Vậy $I=4-2.3=-2$.

Chọn ý **B.**

Câu 47.

Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(0).f'(2)\neq 0$ và $g(x)f'(x)=x(x-2)e^x$. Tính giá trị của tích phân $I=\int_0^2 f(x).g'(x)dx$?

A. -4 **B.** $e-2$ **C.** 4 **D.** $2-e$

Lời giải

Ta có $g(x)f'(x)=x(x-2)e^x\Rightarrow g(0)=g(2)=0$ (vì $f'(0).f'(2)\neq 0$)

$$I=\int_0^2 f(x).g'(x)dx=\int_0^2 f(x)dg(x)=\left(f(x).g(x)\right)\Big|_0^2-\int_0^2 g(x).f'(x)dx=-\int_0^2\left(x^2-2x\right)e^xdx=4.$$

Chọn ý **C.**

Câu 48.

Biết $\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}dx = a+\frac{\pi^2}{b}+\frac{\sqrt{3}\pi}{c}$ với a, b, c, d là các số nguyên. Tính $M = a-b+c$.

A. $M = 35$ **B.** $M = 41$ **C.** $M = -37$ **D.** $M = -35$

Lời giải

Ta có $\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}dx = \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}dx + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}dx = I + J$

Xét $I = \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}dx$. Đặt $t = -x \ (C_m)$; Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = -\frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$.

$$\Rightarrow I = \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}dx = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{-t\cos(-t)}{\sqrt{1+(-t)^2}-t}(-dt) = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{-t\cos t}{\sqrt{1+t^2}-t}dt = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{-x\cos x}{\sqrt{1+x^2}-x}dx$$

Khi đó $\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{-x\cos x}{\sqrt{1+x^2}-x}dx + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}dx$

$$= \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} x\cos x\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}\right)dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} -2x^2\cos x\,dx.$$

Đến đây sử dụng sơ đồ đường chéo ta sẽ dễ dàng suy ra đáp án của bài toán

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}dx = \left(-2x^2\sin x - 4x\cos x + 4\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = 2 + \frac{\pi^2}{-36} + \frac{\pi\sqrt{3}}{-3}$$

Khi đó $a = 2$; $b = -36$; $c = -3$. Vậy $M = a-b+c = 35$.

Chọn ý **A.**

Câu 49.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$, $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(x)}{\cos x}dx = 1$ và $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left[\sin x.\tan x.f(x)\right]dx = 2$. Tích phân $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin x.f'(x)dx$ bằng?

A. 4 **B.** $\frac{2+3\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\frac{1+3\sqrt{2}}{2}$ **D.** 6

Lời giải

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x.f'(x)dx$. Đặt $(1),(2),(3)\Rightarrow I=\sin x.f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x.f(x)dx=\frac{3\sqrt{2}}{2}-I_1$

Ta có $2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\sin x.\tan x.f(x)\right]dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\sin^2 x.\frac{f(x)}{\cos x}\right]dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\left(1-\cos^2 x\right).\frac{f(x)}{\cos x}\right]dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{f(x)}{\cos x}\right]dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x.f(x)dx=1-I_1$$

$$\Rightarrow I_1=-1\Rightarrow I=\frac{3\sqrt{2}}{2}+1=\frac{3\sqrt{2}+2}{2}$$

Chọn ý **B.**

Câu 50.

Cho tích phân $\int_0^1 x\left[\ln(x+2)+\frac{1}{x+2}\right]dx=\frac{a^2\ln 2-bc\ln 3+c}{4}$,với $a,b,c\in\mathbb{N}$. Tính $T=a+b+c$.?

A. $T=13$ **B.** $T=14$ **C.** $T=17$ **D.** $T=11$

Lời giải

Ta nhận thấy rằng biểu thức trong tích phân có tổng của hàm logarit và hàm phân thức nên ta tách thành 2 tích phân dạng thường gặp. Một là tích phân của hàm đa thức và hàm logarit ta dùng tích phân từng phần, một là tích phân của hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất cơ bản.

Ta có $I=\int_0^1 x\left[\ln(x+2)+\frac{1}{x+2}\right]dx=\int_0^1 x\ln(x+2)dx+\int_0^1\frac{x}{x+2}dx=I_1+I_2$

- Tính $I_1=\int_0^1 x\ln(x+2)dx$. Đặt $\begin{cases}u=\ln(x+2)\\ dv=xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{dx}{x+2}\\ v=\dfrac{x^2}{2}\end{cases}$

$$\Rightarrow I_1=\frac{x^2}{2}\ln(x+2)\Big|_0^2-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{x+2}dx=\frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2-4+4}{x+2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{2}\int_0^1\left(x-2+\frac{4}{x+2}\right)dx=\frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-2x+4\ln|x+2|\right)\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-2+4\ln 3\right)+2\ln 2=-\frac{3}{2}\ln 3+2\ln 2+\frac{3}{4}$$

- Tính $I_2=\int_0^1\frac{x}{x+2}dx$

$$\Rightarrow I_2=\int_0^1\frac{x}{x+2}dx=\int_0^1\frac{x+2-2}{x+2}dx=\int_0^1\left(1-\frac{2}{x+2}\right)dx=\left(x-2\ln|x+2|\right)\Big|_0^1=1-2\ln 3+2\ln 2$$

$\Rightarrow I = I_1 + I_2 = 4\ln 2 - \frac{7}{2}\ln 3 + \frac{7}{4} = \frac{4^2\ln 2 - 2.7\ln 3 + 7}{4}$

Ta có $a = 4, b = 2, c = 7$. Vậy $T = a + b + c = 4 + 2 + 7 = 13$.

Chọn ý **A.**

Câu 51.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm cấp hai trên $[0;1]$ thỏa $\int_0^1 x^2.f''(x)dx = 12$ và $2f(1) - f'(1) = -2$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$

A. 10 **B.** 14 **C.** 8 **D.** 5

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = f''(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2xdx \\ v = f'(x) \end{cases}$. Khi đó $I = x^2.f'(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 2x.f'(x)dx$.

Đặt $\begin{cases} u = 2x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = f(x) \end{cases}$. Suy ra $\int_0^1 2x.f'(x)dx = 2x.f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 2f(x)dx$

Do đó $12 = f'(1) - 2f(1) + 2\int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = 5$

Chọn ý **D.**

Câu 52.

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_1^2 f'(x).\ln[f(x)]dx = 1$ và $f(1) = 1$, $f(2) > 1$. Giá trị của $f(2)$ bằng?

A. $f(2) = 2$ **B.** $f(2) = 3$ **C.** $f(2) = e$ **D.** $f(2) = e^2$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = \ln[f(x)] \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{f'(x)}{f(x)}dx \\ v = f(x) \end{cases} \Rightarrow \int_1^2 f'(x).\ln[f(x)]dx = f(x).\ln[f(x)]\Big|_1^2 - \int_1^2 f'(x)dx$

$$\Leftrightarrow 1 = f(2).\ln[f(2)] - f(1).\ln[f(1)] - [f(2) - f(1)]$$

$$\Rightarrow f(2).\ln[f(2)] = f(2) \Rightarrow \ln[f(2)] = 1\,(f(2) > 1) \Leftrightarrow f(2) = e.$$

Chọn ý **C.**

Câu 53.

Biết $\int_{e}^{e^2}\left(\frac{1}{\ln^2 x}-\frac{1}{\ln x}\right)dx=\frac{ae^2+be+c}{2}$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a^2+b^2+c^2$ bằng?

A. 5 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 9

Lời giải

Xét tích phân $\int_{e}^{e^2}\frac{1}{\ln x}dx$. Đặt $u=\frac{1}{\ln x}\Rightarrow\begin{cases}du=-\frac{1}{x\ln^2 x}dx\\ dv=dx\end{cases}$

$$\Rightarrow\int_{e}^{e^2}\frac{1}{\ln x}dx=\left.\frac{x}{\ln x}\right|_{e}^{e^2}+\int_{e}^{e^2}\frac{1}{\ln^2 x}dx\Leftrightarrow\int_{e}^{e^2}\left(\frac{1}{\ln^2 x}-\frac{1}{\ln x}\right)dx=\frac{-e^2+2e}{2}.$$

Do đó $a=-1;b=2;c=0$. Vậy $a^2+b^2+c^2=5$

Chọn ý **A.**

Câu 54.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0)=2018$. và đồng thời điều kiện $f'(x)-2018f(x)=2018.x^{2017}.e^{2018x}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và Tính giá trị $f(1)$.

A. $f(1)=2019e^{2018}$ **B.** $f(1)=2018.e^{-2018}$ **C.** $f(1)=2018.e^{2018}$ **D.** $f(1)=2017.e^{2018}$

Lời giải

Ta có: $f'(x)-2018f(x)=2018.x^{2017}.e^{2018x}\Leftrightarrow\frac{f'(x)-2018.f(x)}{e^{2018x}}=2018.x^{2017}$

$$\Leftrightarrow\int_0^1\frac{f'(x)-2018.f(x)}{e^{2018x}}dx=\int_0^1 2018.x^{2017}dx\ (1)$$

Xét $I=\int_0^1\frac{f'(x)-2018.f(x)}{e^{2018x}}dx=\int_0^1 f'(x).e^{-2018x}dx-\int_0^1 2018.f(x).e^{-2018x}dx$

Xét $I_1=\int_0^1 2018.f(x).e^{-2018x}dx$. Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ dv=2018.e^{-2018x}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=f'(x)dx\\ v=-e^{-2018x}\end{cases}$

$$\Rightarrow I_1=f(x).\left(-e^{-2018x}\right)\Big|_0^1+\int_0^1 f'(x).e^{-2018x}dx\Rightarrow I=f(1).e^{-2018x}-2018$$

Khi đó $(1)\Leftrightarrow f(1).e^{-2018x}-2018=x^{2018}\Big|_0^1\Rightarrow f(1)=2019.e^{2018}$.

Câu 55.

Cho hàm số $y=f(x)$ với $f(0)=f(1)=1$. Biết rằng $\int_0^1 e^x\left[f(x)+f'(x)\right]dx=ae+b$. Tính $Q=a^{2017}+b^{2017}$.

A. $Q=2^{2017}+1$ **B.** $Q=2$ **C.** $Q=0$ **D.** $Q=2^{2017}-1$

Lời giải

Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\dv=e^x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=f'(x)dx\\v=e^x\end{cases}$.

$$\Rightarrow\int_0^1 e^x\left[f(x)+f'(x)\right]dx=e^x f(x)\Big|_1^2-\int_0^1 e^x f'(x)dx+\int_0^1 e^x f'(x)dx\ =ef(1)-f(0)=e-1.$$

Do đó $a=1$, $b=-1\Rightarrow Q=a^{2017}+b^{2017}=1^{2017}+(-1)^{2017}=0$. Vậy $Q=0$.

Chọn ý **C.**

Câu 56.

Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$. Biết $f(0)=1$ và $f(x)f(2-x)=e^{2x^2-4x}$ với mọi $x\in[0;2]$. Tính $I=\int_0^2\frac{(x^3-3x^2)f'(x)}{f(x)}dx$

A. $I=-\frac{14}{3}$. **B.** $I=-\frac{32}{5}$. **C.** $I=-\frac{16}{3}$. **D.** $I=-\frac{16}{5}$.

Lời giải

Một bài toán vận dung cao khá là khó, bât giờ ta sẽ đi tìm biểu thức dv, ta có thể dễ ràng thấy rằng $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|$, từ đây ta sẽ giải quyết bài tóa như sau.

Từ giả thiết $f(x)f(2-x)=e^{2x^2-4x}\Rightarrow f(2)=1$

Ta có $I=\int_0^2\frac{(x^3-3x^2)f'(x)}{f(x)}dx$ Đặt $\begin{cases}u=x^3-3x^2\\dv=\frac{f'(x)}{f(x)}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=(3x^2-6x)dx\\v=\ln|f(x)|\end{cases}$

$$\Rightarrow I=(x^3-3x^2)\ln|f(x)|\Big|_0^2-\int_0^2(3x^2-6x)\ln|f(x)|dx=-3\int_0^2(x^2-2x)\ln|f(x)|dx=-3J$$

$$\text{Ta có } J=\int_0^2(x^2-2x)\ln|f(x)|dx\overset{x=2-t}{=}\int_2^0\left[(2-t)^2-2(2-t)\right]\ln|f(2-t)|d(2-t)$$

$$=\int_2^0\left[(2-x)^2-2(2-x)\right]\ln|f(2-x)|d(2-x)=\int_0^2(x^2-2x)\ln|f(2-x)|dx$$

$$\Rightarrow 2J=\int_0^2(x^2-2x)\ln|f(x)|dx+\int_0^2(x^2-2x)\ln|f(2-x)|dx=\int_0^2(x^2-2x)\ln|f(x)f(2-x)|dx$$

$$=\int_0^2\left(x^2-2x\right)\ln e^{2x^2-4x}dx=\int_0^2\left(x^2-2x\right)\left(2x^2-4x\right)dx=\frac{32}{15}\Rightarrow J=\frac{16}{15}$$

Vậy $I=-3J=-\frac{16}{5}$.

Chọn ý **D.**

Câu 57.

Cho biểu thức $S=\ln\left(1+\int_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(2-\sin 2x\right)e^{2\cot x}dx\right)$ với số thực $m\neq 0$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $S=5$.

B. $S=9$.

C. $S=2\cot\left(\frac{\pi}{4+m^2}\right)+2\ln\left(\sin\frac{\pi}{4+m^2}\right)$.

D. $S=2\tan\left(\frac{\pi}{4+m^2}\right)+2\ln\left(\frac{\pi}{4+m^2}\right)$.

Lời giải

Ta có $\int_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(2-\sin 2x\right)e^{2\cot x}dx=2\int_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{2\cot x}dx-\int_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xe^{2\cot x}dx\ (1)$

Xét $\int_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xe^{2\cot x}dx=\int_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{2\cot x}d\left(\sin^2 x\right)=\sin^2 x.e^{2\cot x}\Big|_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\left(-\frac{2}{\sin^2 x}\right)e^{2\cot x}dx$

$$=\sin^2 x.e^{2\cot x}\Big|_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}}+2\int_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{2\cot x}dx\ \ (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra $I=\sin^2 x.e^{2\cot x}\Big|_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}}=-1+\sin^2\frac{\pi}{4+m^2}.e^{2\cot\frac{\pi}{4+m^2}}$

$$\Rightarrow S=\ln\left(\sin^2\frac{\pi}{4+m^2}.e^{2\cot\frac{\pi}{4+m^2}}\right)=2\cot\left(\frac{\pi}{4+m^2}\right)+2\ln\left(\sin\frac{\pi}{4+m^2}\right)$$

Chọn ý **C.**

Câu 58.

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $\int_0^1 e^x f\left(x\right)dx=\int_0^1 e^x f'\left(x\right)dx=\int_0^1 e^x f''\left(x\right)dx\neq 0$. Tính $\frac{ef'\left(1\right)-f'\left(0\right)}{ef\left(1\right)-f\left(0\right)}$

A. -2 **B.** -1 **C.** 2 **D.** 1

Lời giải

Ta đặt $\int_0^1 e^x f\left(x\right)dx=\int_0^1 e^x f'\left(x\right)dx=\int_0^1 e^x f''\left(x\right)dx=a$. Sử dụng tích phân từng phần ta có:

$$\begin{cases} a=\int_0^1 e^x d\left(f'(x)\right)=e.f'(1)-f'(0)-\int_0^1 e^x f'(x)dx \Rightarrow e.f'(1)-f'(0)=2a \\ a=\int_0^1 e^x d\left(f(x)\right)=e.f(1)-f(0)-\int_0^1 e^x f(x)dx \Rightarrow e.f(1)-f(0)=2a \end{cases} \Rightarrow \frac{ef'(1)-f'(0)}{ef(1)-f(0)}=1$$

Chọn ý **D.**

Câu 59.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $[1;e]$ và $f(e)=1; \int_1^e \ln x.f'(x)dx=\frac{1}{2}$. Tính giá trị của biểu thức tích phân $\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx$.

A. 1. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** 2. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Phân tích. *Nhận thấy trong tích phân của đề bài có xuất hiện* $f'(x)$, *do vậy, ta có thể nghĩ ngay đến tích phân từng phần.*

Ta có $\int_1^e \ln x.f'(x)dx=\frac{1}{2}$. Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{dx}{x} \\ v=f(x) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}=\ln x.f(x)\Big|_1^e-\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx$

$$\Rightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x}dx=\ln e.f(e)-\ln 1.f(1)-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Chọn ý **D**.

Câu 60.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ có $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=a$; và thỏa mãn đồng thời các điều kiện $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx=b\ (a;b\in\mathbb{R})$. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f'(x)dx=\frac{1}{2}$. Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x.f'(x)dx$ theo a và b.

A. $a-b+\frac{1}{2}$ **B.** $a+b-\frac{1}{2}$ **C.** $a-b-\frac{1}{2}$ **D.** $a+b+\frac{1}{2}$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u=\tan x \\ dv=f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{dx}{\cos^2 x} \\ v=f(x) \end{cases} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f'(x)dx=\tan x.f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(x)}{\cos^2 x}dx$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(x)}{\cos^2 x}dx=f\left(\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}=a-\frac{1}{2}$$

Mà $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx=b \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{f(x)}{\cos^2 x}-f(x)\right)dx=a-b-\frac{1}{2} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan^2 x.f(x)\right)dx=a-b-\frac{1}{2}$

Chọn ý **C**.

Câu 61.

Cho tích phân $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\cos x}{1+x^2}-\frac{2x\sin x}{\left(1+x^2\right)^2}\right)dx=\frac{a\sqrt{b}}{\pi^c+d}$ với a,d là các số nguyên và b,c là các số nguyên tố. Giá trị của biểu thức $a+b+c+d$ bằng

A. 28. **B.** 44. **C.** 29. **D.** 36.

Lời giải

Phân tích. *Thoạt tiên, khi nhìn tích phân trên, ta thấy nó khá là "cồng kềnh" nên thường nghĩ nó khá là khó và chấp nhận chịu bó tay khi vừa mới đọc đề! Nhưng thực chất, chúng ta chỉ cần tính một phần của tích phân "cồng kềnh" trên.*

Đặt $\begin{cases}u=\dfrac{1}{1+x^2}\\dv=\cos x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}dx\\v=\sin x\end{cases}\Rightarrow\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{1+x^2}dx=\left.\frac{\sin x}{1+x^2}\right|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sin x.\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}dx$

$$\Rightarrow\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{1+x^2}dx=\frac{\sqrt{2}}{1+\frac{\pi^2}{16}}+\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{2x\sin x}{\left(1+x^2\right)^2}dx$$

Chuyển vế biểu thức tích phân ở vế phải, ta được tích phân "cồng kềnh" như đề bài yêu cầu.

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\cos x}{1+x^2}-\frac{2x\sin x}{\left(1+x^2\right)^2}\right)dx=\frac{\sqrt{2}}{1+\frac{\pi^2}{16}}=\frac{16\sqrt{2}}{16+\pi^2}\Rightarrow a+b+c+d=36$$

Chọn ý **D**.

Câu 62.

Cho biểu thức tích phân sau

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\left(\frac{\left(x^2+2018\right)\cot x+x\ln|\sin x|}{\sqrt{x^2+2018}}\right)dx=\left(a\ln 3-\ln 2\right)\left(\sqrt{b\pi^2+2018}-\sqrt{c\pi^2+2018}\right)$$

Trong đó $\left(a;\ b;\ c\in\mathbb{R}\right)$.Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a>b+c$ **B.** $a<b+c$ **C.** $a=b+c$ **D.** $a^2=b+c$

Lời giải

Phân tích. *Tương tự bài trên, biểu thức tích phân này cũng khá "cồng kềnh". Nhưng ta có thể dễ dàng chia tích phân này thành 2 tích phân gọn hơn và Nguyên hàm từng phần.*

Ta có $A=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{\left(x^2+2018\right)\cot x}{\sqrt{x^2+2018}}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\sqrt{x^2+2018}.\cot x dx$

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{x^2+2018} \\ dv=\cot x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2018}}dx \\ dv=\dfrac{\cos x dx}{\sin x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2018}}dx \\ v=\ln|\sin x| \end{cases}$

Do đó ta có $A=\sqrt{x^2+2018}.\ln|\sin x|\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}-\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\ln|\sin x|\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2018}}dx$

$$\Rightarrow A+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{x\ln|\sin x|}{\sqrt{x^2+2018}}dx=\sqrt{x^2+2018}.\ln|\sin x|\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow (a\ln 3-\ln 2)\left(\sqrt{b\pi^2+2018}-\sqrt{c\pi^2+2018}\right)=\ln\frac{\sqrt{3}}{2}.\left(\sqrt{\frac{4}{9}\pi^2+2018}-\sqrt{\frac{1}{9}\pi^2+2018}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\ln 3-\ln 2\right)\left(\sqrt{\frac{4}{9}\pi^2+2018}-\sqrt{\frac{1}{9}\pi^2+2018}\right)$$

Ta tìm được $a=\dfrac{1}{2};b=\dfrac{4}{9};c=\dfrac{1}{9}$. Kiểm tra các mệnh đề, ta thấy mệnh đề B đúng.

Chọn ý **B**.

Câu 63.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn điều kiện $f'(x)(f(x))^2=x \quad \forall x\in(0;+\infty)$. Biết $f(2)=a;f(4)=b;\int_1^2\left(\dfrac{x}{f(2x)}\right)^2dx=c$. Tính $\int_2^4 f(x)dx$ theo a,b,c.

A. $4b+2a-8c$ **B.** $8c-2b-4a$ **C.** $4b-2a-2c$ **D.** $4b-2a-8c$

Lời giải

Trước tiên, để liên kết được các dữ liệu của đề bài, ta sẽ dùng phép đổi biến.

Đặt $y=2x\Rightarrow\begin{cases} dy=2dx \\ x=\dfrac{y}{2} \end{cases} \Rightarrow \int_1^2\left(\dfrac{x}{f(2x)}\right)^2dx=\int_2^4\left(\dfrac{\frac{y}{2}}{f(y)}\right)^2\dfrac{dy}{2}=\dfrac{1}{8}\int_2^4\left(\dfrac{y}{f(y)}\right)^2dy=\dfrac{1}{8}\int_2^4\left(\dfrac{x}{f(x)}\right)^2dx$

Có $f'(x)(f(x))^2=x\Rightarrow f'(x).x=\left(\dfrac{x}{f(x)}\right)^2$. Do đó $c=\dfrac{1}{8}\int_2^4 f'(x).xdx$

Đến bước nay, ta sẽ dùng nguyên hàm tích phân quen thuộc.

Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=f(x) \end{cases} \Rightarrow c=\dfrac{1}{8}\left(x.f(x)\Big|_2^4-\int_2^4 f(x)dx\right)$

$$\Rightarrow 8c=4f(4)-2f(2)-\int_2^4 f(x)dx\Rightarrow\int_2^4 f(x)dx=4b-2a-8c$$

Chọn ý **D**.

Câu 64.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;+\infty]$ thỏa mãn $2x.f(x)=f'(x),\forall x\in[0;+\infty]$. Cho $\int_0^1 x.(f'(x))^2\,dx=2$ và $f(0)=0$. Biết $f(1)>0$ tính $f(1)$.

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Để liên kết các dữ liệu của đề bài, ta sẽ biến đổi đẳng thức ban đầu.

$$2x.f(x)=f'(x)\Rightarrow 2x^2.f(x)f'(x)=x.(f'(x))^2 \quad \text{(Nhân cả 2 vế với } xf'(x)\text{)}$$

$$\Rightarrow 2=\int_0^1 x.(f'(x))^2\,dx=\int_0^1 2x^2.f(x)f'(x)dx.$$

Nhận thấy $\left(f(x)^2\right)'=2f'(x)f(x)$. Nên ta sẽ dùng nguyên hàm từng phần bằng cách đặt

$$\begin{cases} u=x^2 \\ dv=2f'(x)f(x)dx \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} du=2xdx \\ v=f(x)^2 \end{cases}$$

Do đó $2=\int_0^1 2x^2.f(x)f'(x)dx=x^2.f(x)^2\Big|_0^1-\int_0^1 2x.f(x)^2\,dx$

$$\Rightarrow\int_0^1 2x.f(x)^2\,dx=f(1)^2-2\Rightarrow\int_0^1 f(x)f'(x)dx=f(1)^2-2\ \ (*)\ \ (\text{Vì } f'(x)=2xf(x))$$

Đặt $f(x)=y\Rightarrow dy=f'(x)dx\Rightarrow\int_0^1 f(x)f'(x)dx=\int_0^{f(1)} ydy=\dfrac{y^2}{2}\Bigg|_0^{f(1)}=\dfrac{f(1)^2}{2}$

Thay vào $(*)$ ta được $\dfrac{f(1)^2}{2}=f(1)^2-2\Rightarrow f(1)^2=4\Rightarrow f(1)=2.$

Chọn ý **C**.

Câu 65.

Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f(0)=0;\int_1^e f(\ln x)dx=1;\int_1^e f(x)dx=\dfrac{1}{2};\int_0^1(e^x+2x)f'(x)dx=e$. Tính $f(1)$.

A. 1 **B.** e **C.** 0 **D.** 2

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u=e^x+2x \\ dv=f'(x)dx \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} du=(e^x+2)dx \\ v=f(x) \end{cases}$

$$\Rightarrow e=\int_0^1(e^x+2x)f'(x)dx=(e^x+2x)f(x)\Big|_0^1-\int_0^1(e^x+2)f(x)dx$$

$$\Rightarrow e=(e+2)f(1)-\left(\int_0^1 e^xf(x)dx+2\int_0^1 f(x)dx\right)=(e+2)f(1)-1-\int_0^1 e^xf(x)dx.\quad (*)$$

Đặt $y=e^x\Rightarrow\begin{cases} dy=e^xdx \\ x=\ln y \end{cases}\Rightarrow\int_0^1 e^xf(x)dx=\int_1^e f(\ln y)dy=1$

$$\Rightarrow(*)\Leftrightarrow e=(e+2)f(1)-1-1\Rightarrow f(1)=1$$

Chọn ý **A**.

Câu 66.

Cho $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=a\left(a\in\mathbb{R}\right)$; $f(0)=0$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin 2xdx=\frac{3}{2}a-\frac{5}{8}$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2 x+f(x)\right)f'(x)dx=\frac{1}{2}$. Giá trị của a là?

A. -1 **B.** $-\frac{1}{2}$ **C.** 1 **D.** $\frac{1}{2}$

Lời giải

Nhận thấy, trong tích phân xuất hiện $f'(x)$ nên theo tự nhiên, ta sẽ dùng Nguyên hàm từng phần bằng cách đặt $\begin{cases}u=\sin^2 x+f(x)\\dv=f'(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\left(2\sin x\cos x+f'(x)\right)dx\\v=f(x)\end{cases}$

$$\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2 x+f(x)\right)f'(x)dx=\left(\sin^2 x+f(x)\right)f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\sin x\cos x+f'(x)\right)f(x)dx$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}=(1+a)a-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x.f(x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)f'(x)dx$$

$$\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)f'(x)dx=a^2+a-\left(\frac{3}{2}a-\frac{5}{8}\right)-\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{f(x)}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=a^2-\frac{a}{2}+\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow\frac{a^2}{2}=a^2-\frac{a}{2}+\frac{1}{8}\Rightarrow 4a^2-4a+1=0\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

Chọn ý **D**.

Câu 67.

Cho $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$ với n nguyên dương. Tính $\lim\frac{I_{n+2}}{I_n}$.

A. -1 **B.** 1 **C.** 2 **D.** $+\infty$

Lời giải

Xét $I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2} xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1} x.\sin xdx$

Đặt $\begin{cases}u=\sin^{n+1}x\\dv=\sin xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=(n+1)\sin^n x.\cos xdx\\v=-\cos x\end{cases}$

$$\Rightarrow I_{n+2}=-\cos x.\sin^{n+1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x.(n+1)\sin^n x.\cos xdx$$

$$\Rightarrow I_{n+2}=0+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(n+1)\sin^n x.\cos^2 xdx=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x.\left(1-\sin^2 x\right)dx$$

$$\Rightarrow I_{n+2}=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx-(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2} xdx=(n+1).I_n-(n+1).I_{n+2}$$

$$\Rightarrow (n+2).I_{n+2} = (n+1).I_n \Rightarrow \frac{I_{n+2}}{I_n} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$\Rightarrow \lim \frac{I_{n+2}}{I_n} = \lim \frac{n+1}{n+2} = 1.$$

Chọn ý **B**.

Câu 68.

Với mỗi số nguyên dương n ta kí hiệu $I_n = \int_0^1 x^2\left(1-x^2\right)^n dx$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n}$.

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 5

Lời giải

Cách 1. Tự luận

Xét $I_n = \int_0^1 x^2\left(1-x^2\right)^n dx$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = x\left(1-x^2\right)^n dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \dfrac{-\left(1-x^2\right)^{n+1}}{2(n+1)} \end{cases}$.

$$\Rightarrow I_n = \left.\frac{-x\left(1-x^2\right)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 + \frac{1}{2(n+1)}\int_0^1 \left(1-x^2\right)^{n+1} dx = \frac{1}{2(n+1)}\int_0^1 \left(1-x^2\right)^{n+1} dx$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = \frac{1}{2(n+2)}\int_0^1 \left(1-x^2\right)\left(1-x^2\right)^{n+1} dx \Rightarrow I_{n+1} = \frac{1}{2(n+2)}\left[\int_0^1 \left(1-x^2\right)^{n+1} dx - \int_0^1 x^2\left(1-x^2\right)^{n+1} dx\right]$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = \frac{1}{2(n+2)}\left[2(n+1)I_n - I_{n+1}\right] \Rightarrow \frac{I_{n+1}}{I_n} = \frac{2n+1}{2n+5} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1.$$

Cách 2. Trắc nghiệm

Ta thấy $0 \le \left(1-x^2\right) \le 1$ với mọi $x \in [0;1]$, nên

$$I_{n+1} = \int_0^1 x^2\left(1-x^2\right)^{n+1} dx = \int_0^1 x^2\left(1-x^2\right)^n\left(1-x^2\right)dx \le \int_0^1 x^2\left(1-x^2\right)^n dx = I_n,$$

Suy ra $\frac{I_{n+1}}{I_n} \le 1$, nên $\lim \frac{I_{n+1}}{I_n} \le 1$. Dựa vào các đáp án, ta chọn A.

Chọn ý **A.**

Nhận xét. *Qua 2 câu 38,39 ta sẽ được giới thiệu qua một dạng tích phân mới đó là tích phân truy hồi mà ta sẽ được tìm hiểu ở chương sau. Để có thể tham khảo thêm các dạng toán như thế này thì các bạn tham khảo ở phía sau nhé!*

Câu 69.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$ và $\int_0^1 x^2 f(x)dx = \frac{1}{3}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng?

A. $\frac{7}{5}$ **B.** 1 **C.** $\frac{7}{4}$ **D.** 4

Đề tham khảo BGD năm 2017-2018

Lời giải

Phân tích. *Đây là một trào lưu gây bão trong năm 2018 và chắc chắn trong chúng ta không ai muốn nhìn lại kì thi năm này phải không nào, đây là một câu bất đẳng thức tích phân mà lần đầu tiên Bộ phù hợp hóa nó từ chương trình toán cao cấp xuống trong kì thi THPT Quốc Gia, ở phần này đây chỉ là giới thiệu, nếu các bạn muốn tìm hiểu sâu hơn ta sẽ tìm hiểu ở phần sau nhé!*

Cách 1. Tính $\int_0^1 x^2 f(x)dx$. Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$.

Ta có $\int_0^1 x^2 f(x)dx = \left.\frac{x^3 f(x)}{3}\right|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 x^3.f'(x)dx = \frac{1.f(1)-0.f(0)}{3} - \frac{1}{3}\int_0^1 x^3.f'(x)dx = -\frac{1}{3}\int_0^1 x^3.f'(x)dx$

Mà $\int_0^1 x^2 f(x)dx = \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3}\int_0^1 x^3.f'(x)dx = \frac{1}{3} \Rightarrow \int_0^1 x^3.f'(x)dx = -1$.

Ta có $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7 \quad (1)$

- $\int_0^1 x^6 dx = \left.\frac{x^7}{7}\right|_0^1 = \frac{1}{7} \Rightarrow \int_0^1 49x^6 dx = \frac{1}{7}.49 = 7 \quad (2)$
- $\int_0^1 x^3.f'(x)dx = -1 \Rightarrow \int_0^1 14x^3.f'(x)dx = -14 \quad (3)$

Cộng hai vế $(1),(2),(3)$ suy ra $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx + \int_0^1 49x^6 dx + \int_0^1 14x^3.f'(x)dx = 7+7-14 = 0$.

$$\Rightarrow \int_0^1 \left([f'(x)]^2 + 14x^3 f'(x) + 49x^6\right)dx = 0 \Rightarrow \int_0^1 [f'(x)+7x^3]^2 dx = 0.$$

Do $[f'(x)+7x^3]^2 \ge 0 \Rightarrow \int_0^1 [f'(x)+7x^3]^2 dx \ge 0$.

Mà $\int_0^1 [f'(x)+7x^3]^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = -7x^3 \Rightarrow f(x) = -\frac{7x^4}{4} + C$.

Mặt khác $f(1)=0 \Rightarrow -\frac{7}{4}+C=0 \Rightarrow C=\frac{7}{4}$. Do đó $f(x) = -\frac{7x^4}{4}+\frac{7}{4}$.

Vậy $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(-\frac{7x^4}{4}+\frac{7}{4}\right)dx=\left(-\frac{7x^5}{20}+\frac{7}{4}x\right)\Big|_0^1=\frac{7}{5}$.

Cách 2. Tương tự như trên ta có: $\int_0^1 x^3.f'(x)dx=-1$

Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz, ta có

$$7=7\left(\int_0^1 x^3f'(x)dx\right)^2\le 7\left(\int_0^1\left(x^3\right)^2dx\right)\cdot\left(\int_0^1\left[f'(x)\right]^2dx\right)=7\cdot\frac{1}{7}\cdot\int_0^1\left[f'(x)\right]^2dx=\int_0^1\left[f'(x)\right]^2dx$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $f'(x)=ax^3$, với $a\in\mathbb{R}$.

Ta có $\int_0^1 x^3.f'(x)dx=-1\Rightarrow\int_0^1 x^3.ax^3dx=-1\Rightarrow\frac{ax^7}{7}\Big|_0^1=-1\Rightarrow a=-7$.

Suy ra $f'(x)=-7x^3\Rightarrow f(x)=-\frac{7x^4}{4}+C$, mà $f(1)=0$ nên $C=\frac{7}{4}$

Do đó $f(x)=\frac{7}{4}\left(1-x^4\right)\ \forall x\in\mathbb{R}$. Vậy $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(-\frac{7x^4}{4}+\frac{7}{4}\right)dx=\left(-\frac{7x^5}{20}+\frac{7}{4}x\right)\Big|_0^1=\frac{7}{5}$.

Chú ý*. Chứng minh bất đẳng thức Cauchy-Schwarz*

Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$.

Khi đó, ta có $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\le\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\cdot\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)$.

Chứng minh

Trước hết ta có tính chất

- Nếu hàm số $h(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì $\int_a^b h(x)dx\ge 0$

Xét tam thức bậc hai $\left[\lambda f(x)+g(x)\right]^2=\lambda^2f^2(x)+2\lambda f(x)g(x)+g^2(x)\ge 0$, với mọi $\lambda\in\mathbb{R}$

Lấy tích phân hai vế trên đoạn $[a;b]$ ta được

$$\lambda^2\int_a^b f^2(x)dx+2\lambda\int_a^b f(x)g(x)dx+\int_a^b g^2(x)dx\ge 0,\ \text{với mọi}\ \lambda\in\mathbb{R}\quad (*)$$

Coi $(*)$ là tam thức bậc hai theo biến λ nên ta có $\Delta'\le 0$

$$\Leftrightarrow\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^2-\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^2\le\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)\ \text{(đpcm)}$$

TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC

Câu 70.

Cho tích phân $\int_0^2 x^3\ln\left(x^2+1\right)dx=\frac{a}{b}\ln 5-c$ với a,b,c là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a+b+c$?

A. 18 **B.** 19 **C.** 20 **D.** 21

Lời giải

Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(x^2+1\right)\\dv=x^3dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{2x}{x^2+1}dx\\v=\dfrac{x^4}{4}\end{cases}\Rightarrow 2\int_0^2 x^3\ln\left(x^2+1\right)dx=\left.\dfrac{x^4\ln\left(x^2+1\right)}{4}\right|_0^2-\dfrac{1}{2}\int_0^2\dfrac{x^5}{x^2+1}dx$

$$=4\ln 5-\frac{1}{2}\int_0^2\frac{\left(x^2+1\right)\left(x^3-x\right)+x}{x^2+1}dx=4\ln 5-\frac{1}{2}\int_0^2\left(x^3-x\right)dx-\frac{1}{2}\int_0^2\frac{x}{x^2+1}dx$$

$$=4\ln 5-\frac{1}{2}\left.\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\right|_0^2-\frac{1}{4}\ln\left|x^2+1\right|\Big|_0^2=4\ln 5-\frac{1}{2}\cdot 2-\frac{1}{4}\ln 5=\frac{15}{4}\ln 5-1$$

$$\Rightarrow a=15,b=4,c=1\Rightarrow a+b+c=20$$

Chọn ý **C.**

Câu 71.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f'(x)=1$. Biết rằng $f(1)=1$ và $f(0)=0$, tính giá trị của tích phân $I=\int_0^1 e^{2x}f(x)dx$

A. $\dfrac{e^2+1}{2}$ **B.** $-e^2-1$ **C.** $\dfrac{e-1}{2}$ **D.** e

Lời giải

Xét tích phân $I=\int_0^1 e^{2x}f(x)dx=\int_0^1 e^{2x}\left(1-f'(x)\right)dx=\left.\dfrac{e^{2x}}{2}\right|_0^1-\int_0^1 e^{2x}f'(x)dx=\dfrac{e^2-1}{2}-J$

Xét tích phân $J=\int_0^1 e^{2x}f'(x)dx$, đặt $\begin{cases}u=e^{2x}\\dv=f'(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2e^{2x}\\v=f(x)\end{cases}$

$$\Rightarrow J=e^{2x}f(x)\Big|_0^1-2\int_0^1 e^{2x}f(x)dx=e^2-2I\Rightarrow I=\frac{e^2-1}{2}-\left(e^2-2I\right)\Rightarrow I=\frac{e^2+1}{2}$$

Câu 72.

Cho $f(x)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f^2(x)=f^4(x).\left[f'(x)\right]^2-1$. Biết rằng $f(1)=2\sqrt{2};f(0)=\sqrt{3}$. Tính $I=\int_0^1\left[f(x)\right]^2.\left[f'(x)\right]^2dx$

A. 3 **B.** 5 **C.** $6\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}$ **D.** $6\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}$

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có

$$f^2(x)=f^4(x).\left[f'(x)\right]^2-1\Leftrightarrow\sqrt{f^2(x)+1}=f^2(x)f'(x)\Rightarrow I=\int_0^1 f'(x)\sqrt{\left[f(x)\right]^2+1}dx$$

Đặt $\begin{cases}u=\sqrt{\left[f(x)\right]^2+1}\\ dv=f'(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{f(x)f'(x)}{2\sqrt{\left[f(x)\right]^2+1}}dx\\ v=f(x)\end{cases}$

$$\Rightarrow I=f(x)\sqrt{\left[f(x)\right]^2+1}\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{f^2(x)f'(x)}{\sqrt{\left[f(x)\right]^2+1}}dx=6\sqrt{2}-6\sqrt{3}-\frac{1}{2}$$

Câu 73.

Cho nguyên hàm $F(x)=\int\left(\dfrac{-\cos 2x}{4}-\sin 2x\right)\ln(\tan x+1)dx$. Biết giá trị của biểu thức $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\ln 2-\dfrac{\pi}{4}$. Tính $S=\left(F(0)-1\right)^{2016}$?

A. 1. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Đặt $\begin{cases}\ln(\tan x+1)=u\\ (\cos 2x-\sin 2x)dx=dv\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{\cos^2 x}.\dfrac{1}{\tan x+1}dx=du\\ \sin x\cos x-\sin^2 x+1=v\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{\cos^2 x}.\dfrac{1}{\tan x+1}dx=du\\ \text{sinxcosx}+\cos^2 x=v\end{cases}$$

$$\Rightarrow F(x)=\ln(\tan x+1)(\sin x\cos x-\sin^2x+1)-\int(\sin x\cos x+\cos^2 x)\frac{1}{\cos^2 x}.\frac{1}{\tan x+1}dx.$$

$$\Rightarrow\ln(I)=0\Rightarrow F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\ln 2-\frac{\pi}{4}-c\Rightarrow c=0\Rightarrow F(0)=0\Rightarrow S=\left(F(0)-1\right)^{2016}=1.$$

Chọn ý **A.**

Câu 74.

Biết $\int\limits_1^e f(\ln x)dx=-f(0)e+f(0)+2$ và $\int\limits_0^1 f'(x)dx=e-1$.

Tính giá trị tích phân $I=\int\limits_0^1 xf(x)f'(x)dx$.

A. 1. **B.** $\dfrac{-1}{2}$. **C.** -1. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f(x).f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \dfrac{f^2(x)}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \frac{x.f^2(x)}{2}\Bigg|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 f^2(x)dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 f^2(x)dx.$$

Đặt $\begin{cases} u = f(\ln x) \\ dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}f'(\ln x)dx \\ x = v \end{cases} \Rightarrow \int_1^e f(\ln x)dx = f(\ln x).x\Big|_1^e - \int_1^e x.\dfrac{1}{x}f'(\ln x)dx$

$$= f(1).e - f(0) - f(1) + f(0) = f(1).e - f(1) = f(1)(e-1).$$

$$\Rightarrow -f(0)e + f(0) + 2 = f(1)(e-1). \Rightarrow (e-1)\big(f(1)+f(0)\big) = 2 \Rightarrow f(1)+f(0) = \frac{2}{e-1}.$$

Mặt khác ta có $e - 1 = \int_0^1 f'(x)dx = f(x)\Big|_0^1 = f(1) - f(0)$

$$\Rightarrow f^2(1) - f^2(0) = \big(f(1)-f(0)\big)\big(f(1)+f(0)\big) = 2.$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}f^2(x)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[f^2(1) - f^2(0)\right] = \frac{-1}{2}.$$

Chọn ý **B.**

Câu 75.

Biết $I = \int_1^2 \dfrac{f(x)f'(x)}{x}dx = \dfrac{1}{16}$, $\int_1^2 f(x)dx = -\dfrac{169}{48}$. Tính giá trị của $f(3)$?

A. -27. **B.** 25. **C.** -1. **D.** -15.

Lời giải

Xét tích phân $I = \int_1^2 \dfrac{f(x)f'(x)}{x}dx = \dfrac{1}{16}$

Đặt $\begin{cases} u = \dfrac{1}{x} \\ dv = f(x).f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\dfrac{1}{x^2}dx \\ v = \dfrac{f^2(x)}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \frac{f^2(x)}{2}.\frac{1}{x}\Bigg|_1^2 + \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{f^2(x)}{x^2}dx = \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{f^2(x)}{x^2}dx \Rightarrow \int_1^2 \frac{f^2(x)}{x^2}dx = \frac{1}{8}.$$

Mặt khác ta lại có $\int_1^2 9x^2dx = 21$

$$\int_1^2 \left(\frac{f^2(x)}{x^2} + 6f(x) + 9x^2\right)dx = \int_1^2 \frac{f^2(x)}{x^2}dx + \int_1^2 6f(x)dx + \int_1^2 9x^2 = \frac{1}{8} - \frac{169}{8} + 21 = 0.$$

$$\Rightarrow \frac{f^2(x)}{x^2} + 6f(x) + 9x^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x} + 3x\right)^2 = 0 \Rightarrow f(x) = -3x^2 \Rightarrow f(3) = -27.$$

Chọn ý **A.**

Câu 76.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)\cos x+f(x)\sin x=\sin x$. Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(f(x)+f''(x)\right)\cos xdx$?

A. 1 **B.** 2 **C.** π **D.** 2π

Lời giải

Xét tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f''(x)\cos xdx$. Đặt $\begin{cases}u=\cos x\\ dv=f''(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=-\sin xdx\\ v=f'(x)\end{cases}$

$$\Rightarrow I=f'(x)\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(x)\sin xdx$$

Đặt $\begin{cases}u=\sin x\\ f'(x)dx=dv\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\cos xdx\\ v=f(x)\end{cases}\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(x)\sin xdx=f(x)\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos xdx$

$$\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(f(x)+f''(x)\right)\cos xdx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

Chọn ý **A.**

TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC

CHƯƠNG 3 NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN LƯỢNG GIÁC

Sau 2 chương nguyên hàm tích phân hàm phân thức hữu tỷ và phương pháp từng phần thì chúng ta sẽ tiếp tục tìm hiểu dạng toán nguyên hàm tích phân cơ bản tiếp theo đó là nguyên hàm – tích phân lượng giác. Để làm tốt được các bài toán nguyên hàm – tích phân hàm lượng giác ta cần nắm chắc các biến đổi hạ bậc lượng giác, tích thành tổng, theo góc phụ $t=\tan\frac{x}{2}$,…

- $\dfrac{1}{\sin(x+a).\sin(x+b)}=\dfrac{1}{\sin(a-b)}.\dfrac{\sin\left[(x+a)-(x+b)\right]}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$
- $\dfrac{1}{a\sin x+b\cos x}=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}.\dfrac{1}{\sin(x+\alpha)}$
- $\dfrac{1}{a\sin x+b\cos x\pm\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}.\dfrac{1}{1\pm\cos(x+\alpha)}$
- $\dfrac{\alpha\sin x+\beta\cos x+\gamma}{a\sin x+b\cos x+c}=\dfrac{A(a\sin x+b\cos x+c)'}{a\sin x+b\cos x+c}+\dfrac{B}{a\sin x+b\cos x+c}$
- $\dfrac{1}{a\sin^2x+b\sin x\cos x+\cos^2x}=\dfrac{1}{a\tan^2x+b\tan x+c}.\dfrac{1}{\cos^2x}$
- $\dfrac{\sin x\cos x}{\left(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x\right)^{\alpha}}=\dfrac{A\left(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x\right)'}{\left(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x\right)^{\alpha}}$

Đặc biệt cận tích phân đối, bù, phụ thì đặt tương ứng $t=-x, t=\pi-x, t=\frac{\pi}{2}-x$. Tích phân liên kết, để tính I thì đặt thêm J mà việc tính tích phân $I+J$ và $I-J$ hoặc $I+kJ$ và $I-mJ$ dễ dàng lợi hơn. Tích phân truy hồi I_n theo I_{n-1} hay I_{n-2} thì $\sin^n x,\cos^n x$ tách lũy thừa 1 và dùng phương pháp tích phân từng phần còn $\tan^n x,\cot^n x$ tách lũy thừa 2 và dùng phương pháp tích phân đổi biến số. Ngoài ra ta cần phải nhớ:

1. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx;\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx$$

2. Các dạng tích phân lượng giác:

- $\int_a^b P(x).\sin\alpha x dx, \int_a^b P(x).\cos\alpha x dx$: đặt $u = P(x), v' = \sin$ hoặc $\cos\alpha x$
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} R(x,\sin x,\cos x)dx$: đặt $x = \frac{\pi}{2} - t$
- $\int_0^{\pi} R(x,\sin x,\cos x)dx$: đặt $x = \pi - t$
- $\int_0^{2\pi} R(x,\sin x,\cos x)dx$: đặt $x = 2\pi - t$
- $\int_a^b R(\sin x,\cos x)dx$: đặt $t = \tan\frac{x}{2}$, đặc biệt:

Nếu $R(-\sin x,\cos x) = -R(\sin x,\cos x)$ thì đặt $t = \cos x$

Nếu $R(\sin x,-\cos x) = -R(\sin x,\cos x)$ thì đặt $t = \sin x$

Nếu $R(-\sin x,-\cos x) = -R(\sin x,\cos x)$ thì đặt $t = \tan x, \cot x$.

Để tìm hiểu sâu hơn ta sẽ cùng đi vào các dạng toán cụ thể.

CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP

1. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN.

Dạng 1. Tính tích phân tổng quát sau $I_1 = \int(\sin x)^n dx; I_2 \int(\cos x)^n dx$

- Ta chú ý các công thức hạ bậc sau

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}; \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}; \sin^3 x = \frac{-\sin 3x + 3\sin x}{4}; \cos^3 x = \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4}$$

- Phương pháp
  1. Nếu n chẵn hoặc $n = 3$ thì ta sẽ sử dụng công thức hạ bậc triệt để
  2. Nếu n lẻ và lớn hơn 3 thì ta sẽ sử dụng phép biến đổi sau

+ Với $I_1 = \int(\sin x)^n dx = \int(\sin x)^{2p+1}dx = \int(\sin x)^{2p}\sin x dx = -\int(1-\cos^2 x)^p d(\cos x)$

$$= -\int_L \left(C_p^0 - C_p^1\cos^2 x + \ldots + (-1)^k C_p^k(\cos^2 x)^k + \ldots + (-1)^p C_p^p(\cos^2 x)^p\right)d(\cos x)$$

$$= -\left(C_p^0\cos x - \frac{1}{3}C_p^1\cos^3 x + \ldots + \frac{(-1)^k}{2k+1}C_p^k(\cos x)^{2k+1} + \ldots + \frac{(-1)^p}{2p+1}C_p^p(\cos x)^{2p+1}\right) + C$$

+ Với $I_2 = \int(\cos x)^n dx = \int(\cos x)^{2p+1}dx = \int(\cos x)^{2p}\cos x dx = \int(1-\sin^2 x)^p d(\sin x)$

$$= \int\left(C_p^0 - C_p^1\sin^2 x + \ldots + (-1)^k C_p^k(\sin^2 x)^k + \ldots + (-1)^p C_p^p(\sin^2 x)^p\right)d(\sin x)$$

$$= \left(C_p^0\sin x - \frac{1}{3}C_p^1\sin^3 x + \ldots + \frac{(-1)^k}{2k+1}C_p^k(\sin x)^{2k+1} + \ldots + \frac{(-1)^p}{2p+1}C_p^p(\sin x)^{2p+1}\right) + C$$

Nhìn chung đây là một dạng toán không khó, cái khó của nó là phép biến đổi tương đối dài và cồng kềnh ,và mấu chốt là hạ bậc dần dần để đưa về nguyên hàm cơ bản. Sau đây ta sẽ cùng tìm hiểu ví dụ về phần này!

Câu 1.

Tìm các nguyên hàm sau.

a) $I=\int \cos^6 x dx$ c) $I=\int (\cos 2x)^{13}dx$

b) $I=\int (\sin 5x)^9 dx$ d) $I=\int (3+\cos x)^5 dx$

Lời giải

a) Ta có $I=\int \cos^6 x dx=\int (\cos^2 x)^3 dx=\int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3 dx$

$$=\frac{1}{4}\int (1+\cos 2x)^3 dx=\frac{1}{4}\int \left(1+3\cos 2x+3\cos^2 2x+\cos^3 2x\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\int \left(1+3\cos 2x+\frac{3(1+2\cos 4x)}{2}+\frac{\cos 3x+3\cos x}{4}\right)dx$$

$$=\frac{1}{16}\int (7+12\cos 2x+12\cos 4x+\cos 3x+3\cos x)dx$$

$$=\frac{1}{16}\left(7x+6\sin 2x+3\sin 4x+\frac{1}{3}\sin 3x+3\sin x\right)+C$$

b) Ta có $I=\int (\sin 5x)^9 dx=\int (\sin 5x)^8 (\sin 5x)dx=-\frac{1}{5}\int \left(1-\cos^2 5x\right)^4 d(\cos 5x)$

$$=-\frac{1}{5}\int \left(1-4\cos^2 5x+6\cos^4 5x-4\cos^6 5x+\cos^8 5x\right)d(\cos 5x)$$

$$=-\frac{1}{5}\left(\cos 5x-\frac{4}{3}\cos^3 5x+\frac{6}{5}\cos^5 5x-\frac{4}{7}\cos^7 5x+\frac{1}{9}\cos^9 5x\right)+C$$

c) Ta có $I=\int (\cos 2x)^{13}dx=\int (\cos 2x)^{12}\cos 2x dx=\frac{1}{2}\int \left(1-\sin^2 2x\right)^6 d(\sin 2x)$

$$=\frac{1}{2}\int \left(1-6\sin^2 2x+15\sin^4 2x-20\sin^6 2x+15\sin^8 2x-6\sin^{10} 2x+\sin^{12} 2x\right)d(\sin 2x)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin 2x-2\sin^3 2x+3\sin^5 2x-\frac{20}{7}\sin^7 2x+\frac{5}{3}\sin^9 2x-\frac{6}{11}\sin^{11} 2x+\frac{1}{13}\sin^{13} 2x\right)+C$$

d) Có $I=\int (3+\cos x)^5 dx=\int \left(3^5+5.3^4\cos x+10.3^3\cos^2 x+10.3^2\cos^3 x+5.3\cos^4 x+\cos^5 x\right)dx$

$$=\int \left(243+405\cos x+135(1+\cos 2x)+\frac{45}{2}(\cos 3x+3\cos x)+\frac{15}{2}(1+\cos 2x)^2+\cos^5 x\right)dx$$

$$=\int \left(378+\frac{945}{2}\cos x+135\cos 2x+\frac{45}{2}\cos 3x+\frac{15}{2}\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)+\cos^5 x\right)dx$$

$$=\int\left(\frac{1557}{4}+\frac{945}{2}\cos x+150\cos 2x+\frac{45}{2}\cos 3x+\frac{15}{4}\cos 4x\right)dx+\int\cos^4 x\cos x dx$$

$$=\frac{1}{4}\int(1557+1890\cos x+600\cos 2x+90\cos 3x+15\cos 4x)dx+\int\left(1-\sin^2 x\right)^2 d(\sin x)$$

$$=\frac{1}{4}\left(1557x+1890\sin x+300\sin 2x+30\sin 3x+\frac{15}{4}\sin 4x\right)+\int\left(1-2\sin^2 x+\sin^4 x\right)d(\sin x)$$

$$=\frac{1}{4}\left(1557x+1894\sin x+300\sin 2x+30\sin 3x+\frac{15}{4}\sin 4x-\frac{8}{3}\sin^3 x+\frac{4}{5}\sin^5 x\right)+C$$

Tóm lại. *Qua 4 ví dụ trên ta đã phần nào nắm được dạng toán này, riêng ở ví dụ 4 ta đã sử dụng tới công thức khai triển hệ số Newton để khai trên biểu thức trong dấu nguyên hàm và các bước còn lại chỉ là biến đổi thông thường.*

Dạng 2. Đôi khi trong khi làm các bài tính tích phân ta bắt gặp các bài toán liên tuan tới tích các biểu thức $\sin x, \cos x$ khi đó ta sẽ sử dụng các công thức biến tích thành tổng để giải quyết các bài toán này. Sau đây là các công thức cần nhớ

- $I=\int(\cos mx)(\cos nx)dx=\frac{1}{2}\int(\cos(m-n)x+\cos(m+n)x)dx$
- $I=\int(\sin mx)(\sin nx)dx=\frac{1}{2}\int(\cos(m-n)x-\cos(m+n)x)dx$
- $I=\int(\sin mx)(\cos nx)dx=\frac{1}{2}\int(\sin(m+n)x+\sin(m-n)x)dx$
- $I=\int(\cos mx)(\sin nx)dx=\frac{1}{2}\int(\sin(m+n)x-\sin(m-n)x)dx$

Nhìn chung đây là một dạng toán cơ bản, sau đây ta sẽ cùng tìm hiểu các bài toán về nó.

Câu 2.

Tìm các nguyên hàm sau.

a) $I=\int(\cos x)^3\sin 8x dx$ b) $I=\int(\cos 2x)^{13}dx$

Lời giải

a) Ta có $I=\int(\cos x)^3\sin 8x dx=\int\frac{(3\cos x+\cos 3x)}{4}\sin 8x dx$

$$=\frac{1}{4}\int(3\cos x\sin 8x+\cos 3x\sin 8x)dx=\frac{1}{4}\int\left[\frac{3}{2}(\sin 9x+\sin 7x)+\frac{1}{2}(\sin 11x+\sin 5x)\right]dx$$

$$=-\frac{1}{8}\left(\frac{3}{9}\cos 9x+\frac{3}{7}\cos 7x+\frac{1}{11}\cos 11x+\frac{1}{5}\cos 5x\right)+C$$

b) Ta có $I=\int(\sin x)^4(\sin 3x)(\cos 10x)dx=\frac{1}{8}\int(1-\cos 2x)^2(\sin 13x+\sin 7x)dx$

$$=\frac{1}{8}\int\left(1-2\cos 2x+\cos^2 2x\right)\left(\sin 13x+\sin 7x\right)dx$$

$$=\frac{1}{8}\int\left(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)\left(\sin 13x+\sin 7x\right)dx$$

$$=\frac{1}{16}\int\left(3-4\cos 2x+\cos 4x\right)\left(\sin 13x+\sin 7x\right)dx$$

$$=\frac{1}{6}\int\left(3\left(\sin 13x+\sin 7x\right)-4\cos 2x\left(\sin 13x+\sin 7x\right)+\cos 4x\left(\sin 13x+\sin 7x\right)\right)dx$$

$$=\frac{1}{6}\int\left(3\left(\sin 13x+\sin 7x\right)-2\left(\sin 15x+\sin 11x+\sin 9x+\sin 5x\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(\sin 17x+\sin 9x+\sin 11x+\sin 3x\right)\right)dx$$

Dạng 3. Tính tích phân tổng quát sau $I=\int \sin^m x\cos^n xdx$

- *Trường hợp 1. Nếu m, n là các số nguyên*

  \+ Nếu m và n chẵn thì dùng công thức hạ bậc biến tích thành tổng

  \+ Nếu m chẵn và n lẻ thì ta biến đổi

$$I=\int(\sin x)^m(\cos x)^{2p+1}dx=\int(\sin x)^n(\cos x)^{2p}\cos xdx=\int(\sin x)^m\left(1-\sin^2 x\right)^p d(\sin x)$$

$$=\int(\sin x)^m\left(C_p^0-C_p^1\sin^2 x+\ldots+(-1)^k C_p^k\left(\sin^2 x\right)^k+\ldots+(-1)^p C_p^p\left(\sin^2 x\right)^p\right)d(\sin x)$$

$$=C_p^0\frac{(\sin x)^{m-1}}{m+1}-C_p^1\frac{(\sin x)^{m+3}}{m+3}+\ldots+(-1)^k C_p^k\frac{(\sin x)^{2k+1+m}}{2k+1+m}+\ldots+(-1)^p C_p^p\frac{(\sin x)^{2p+1+m}}{2p+1+m}+C$$

  \+ Nếu m lẻ và n chẵn thì ta cũng biến đổi tương tự như trường hợp trên.

  \+ Nếu m lẻ và n lẻ thì dùng ta sẽ tách ra 1 biểu thức $\cos x$ hoặc $\sin x$ để đưa vào trong dấu vi phân.

- *Trường hợp 2. Nếu m, n là các số hữu tỷ*

  Trong trường hợp này ta sẽ đặt $u=\sin x$ và tùy theo trường hợp ta sẽ biến đổi nó để đưa về bài toán cơ bản. Ta sẽ tìm hiểu kỹ thuật này qua các bài toán dưới.

Sau đây chúng ta sẽ cùng tìm hiểu các ví dụ cụ thể!

Câu 3.

Tìm các nguyên hàm sau.

a) $I=\int(\sin x)^2(\cos x)^4 dx$

b) $I=\int(\sin 3x)^{10}(\cos 3x)^5 dx$

c) $I=\int(\sin 5x)^9(\cos 5x)^{111}dx$

d) $I=\int\frac{(\sin 3x)^7}{\sqrt[5]{\cos^4 3x}}dx$

Lời giải

a) Ta có $I=\int(\sin x)^2(\cos x)^4 dx=\frac{1}{4}\int(\sin 2x)^2(\cos x)^2 dx$

$$=\frac{1}{16}\int(1-\cos 4x)(1+\cos 2x)dx=\frac{1}{16}\int(1+\cos 2x-\cos 4x-\cos 2x\cos 4x)dx$$
$$=\frac{1}{16}\int\left(1+\cos 2x-\cos 4x-\frac{1}{2}(\cos 6x+\cos 2x)\right)dx$$
$$=\frac{1}{32}\int(2+\cos 2x-2\cos 4x-\cos 6x)dx=\frac{1}{32}\left(2x+\frac{\sin 2x}{2}-\frac{\sin 4x}{2}-\frac{\sin 6x}{6}\right)+C$$

b) Ta có $I=\int(\sin 3x)^{10}(\cos 3x)^5dx=\int(\sin 3x)^{10}(\cos 3x)^4\cos 3xdx$

$$=\frac{1}{3}\int(\sin 3x)^{10}\left(1-\sin^2 3x\right)^2d(\sin 3x)=\frac{1}{3}\int(\sin 3x)^{10}\left(1-2\sin^2 3x+\sin^4 3x\right)d(\sin 3x)$$
$$=\frac{1}{3}\int_0^1\left((\sin 3x)^{10}-2(\sin 3x)^{12}+(\sin 3x)^{14}\right)d(\sin 3x)$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{(\sin 3x)^{11}}{11}-\frac{2(\sin 3x)^{13}}{13}+\frac{(\sin 3x)^{15}}{15}\right)+C$$

c) Ta có $I=\int(\sin 5x)^9(\cos 5x)^{111}dx=\int(\cos 5x)^{111}(\sin 5x)^8\sin 5xdx$

$$=\frac{-1}{5}\int(\cos 5x)^{111}\left(1-\cos^2 5x\right)^4d(\cos 5x)$$
$$=-\frac{1}{5}\int(\cos 5x)^{111}\left(1-4\cos^2 5x+6\cos^4 5x-4\cos^6 5x+\cos^8 5x\right)d(\cos 5x)$$
$$=-\frac{1}{5}\left(\frac{(\cos 5x)^{112}}{112}-\frac{4(\cos 5x)^{114}}{114}+\frac{6(\cos 5x)^{116}}{116}-\frac{4(\cos 5x)^{118}}{118}+\frac{(\cos 5x)^{120}}{120}\right)+C$$

d) Ta có $I=\int\frac{(\sin 3x)^7}{\sqrt[5]{\cos^4 3x}}dx=\int(\cos 3x)^{\frac{-1}{5}}(\sin 3x)^6\sin 3xdx$

$$=\frac{-1}{3}\int(\cos 3x)^{\frac{-4}{5}}\left(1-\cos^2 3x\right)^3d(\cos 3x)$$
$$=\frac{-1}{3}\int(\cos 3x)^{\frac{-4}{5}}\left(1-3\cos^2 3x+3\cos^4 3x-\cos^6 3x\right)d(\cos 3x)$$
$$=\frac{-1}{3}\left(5(\cos 3x)^{\frac{1}{5}}-\frac{15}{11}(\cos 3x)^{\frac{11}{5}}+\frac{15}{21}(\cos 3x)^{\frac{21}{5}}-\frac{5}{31}(\cos 3x)^{\frac{31}{5}}\right)+C$$

Dạng 4. Tính tích phân tổng quát sau $I_1=\int(\tan x)^ndx;I_2=\int(\cot x)^ndx\left(n\in\mathbb{N}\right)$

Trong các bài toán như thế này ta cần chú ý tới các công thức sau

- $\int\tan xdx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C$
- $\int\cot xdx=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int\frac{d(\sin x)}{\sin x}=\ln|\sin x|+c$
- $\int\left(1+\tan^2 x\right)dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\int d(\tan x)=\tan x+C$
- $\int\left(1+\cot^2 x\right)dx=-\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\int d(\cot x)=-\cot x+C$

Để làm các bài toán tính $\int (\tan x)^n dx$ ta sẽ cần cố gắng tách về dạng $\tan^m x(\tan^2 x+1)$ đến cuối cùng để đưa về bài toán cơ bản.

Sau đây chúng ta sẽ cùng tìm hiểu các ví dụ minh họa để hiểu rõ hơn các bài toán này.

Câu 4.

Tìm các nguyên hàm sau.

a) $I=\int (\tan x)^8 dx$ c) $I=\int (\cot x)^{12} dx$

b) $I=\int (\tan 2x)^{13} dx$ d) $I=\int (\cot 4x)^9 dx$ e) $I=\int (\tan x+\cot x)^5 dx$

Lời giải

a) Ta có $I=\int (\tan x)^8 dx$

$$=\int\left((\tan x)^6(1+\tan^2 x)-(\tan x)^4(1+\tan^2 x)+(\tan x)^2(1+\tan^2 x)-(\tan x)^0(1+\tan^2 x)+1\right)dx$$

$$=\int\left[(\tan x)^6-(\tan x)^4+(\tan x)^2-(\tan x)^0\right]d(\tan x)+\int dx$$

$$=\frac{(\tan x)^7}{7}-\frac{(\tan x)^5}{5}+\frac{(\tan x)^3}{3}-\frac{\tan x}{1}+x+C$$

b) Ta có $I=\int (\cot x)^{12} dx$

$$=\int\left((\cot x)^{10}(1+\cot^2 x)-(\cot x)^8(1+\cot^2 x)+(\cot x)^6(1+\cot^2 x)\right.$$

$$\left.-(\cot x)^4(1+\cot^2 x)+(\cot x)^2(1+\cot^2 x)-(\cot x)^0(1+\cot^2 x)+1\right)dx$$

$$=-\int\left((\cot x)^{10}-(\cot x)^8+(\cot x)^6-(\cot x)^4+(\cot x)^2-(\cot x)^0\right)d(\cot x)+\int dx$$

$$=-\left(\frac{(\cot x)^{11}}{11}-\frac{(\cot x)^9}{9}+\frac{(\cot x)^7}{7}-\frac{(\cot x)^5}{5}+\frac{(\cot x)^3}{5}-\frac{\cot x}{1}\right)+x+C$$

c) Ta có $I=\int (\tan 2x)^{13} dx$

$$=\int\left((\tan 2x)^{11}(1+\tan^2 2x)-(\tan 2x)^9(1+\tan^2 2x)+(\tan 2x)^7(1+\tan^2 2x)\right.$$

$$\left.-(\tan 2x)^5(1+\tan^2 2x)+(\tan 2x)^3(1+\tan^2 2x)-\tan 2x(1+\tan^2 2x)+\tan 2x\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\left((\tan 2x)^{11}-(\tan 2x)^9+(\tan 2x)^7-(\tan 2x)^5+(\tan 2x)^3-\text{tg } 2x\right)d(\tan 2x)+\int \tan 2x dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{(\tan 2x)^{12}}{12}-\frac{(\tan 2x)^{10}}{10}+\frac{(\tan 2x)^8}{8}-\frac{(\tan 2x)^6}{6}+\frac{(\tan 2x)^4}{4}-\frac{(\tan 2x)^2}{2}-\ln|\cos 2x|\right)+C$$

d) Ta có $I=\int (\cot 4x)^9 dx=\int\left[(\cot 4x)^7(1+\cot^2 4x)-(\cot 4x)^5(1+\cot^2 4x)+\right.$

$$+(\cot 4x)^3(1+\cot^2 4x)-(\cot 4x)(1+\cot^2 4x)\Big]dx+\cot 4x$$

$$=-\frac{1}{4}\int\left((\cot 4x)^7-(\cot 4x)^5+(\cot 4x)^3-(\cot 4x)\right)d(\cot 4x)+\int\cot 4x dx$$

$$=\frac{-1}{4}\left(\frac{(\cot 4x)^8}{8}-\frac{(\cot 4x)^6}{6}+\frac{(\cot 4x)^4}{4}-\frac{(\cot 4x)^2}{2}\right)+\frac{1}{4}\ln|\sin 4x|+C$$

e) Ta có $I=\int(\tan x+\cot x)^5dx=\int\Big[(\tan x)^5+5(\tan x)^4\cot x+10(\tan x)^3(\cot x)^2$

$$+10(\tan x)^2(\cot x)^3+5\,\mathrm{tg}\,x(\cot x)^4+(\cot x)^5\Big]dx$$

$$=\int\left[(\tan x)^5+(\cot x)^5+5(\tan x)^3+5(\cot x)^3+10\tan x+10\cot x\right]dx$$

$$=\int\left((\tan x)^5+5(\tan x)^3+10\tan x\right)dx+\int\left[(\cot x)^5+5(\cot x)^3+10\cot x\right]dx$$

$$=\int\left((\tan x)^3(1+\tan^2 x)+4\tan x(1+\tan^2 x)+6\tan x\right)dx$$

$$+\int\left((\cot x)^3(1+\cot^2 x)+4\cot x(1+\cot^2 x)+6\cot x\right)dx$$

$$=\int\left((\tan x)^3+4\tan x\right)d(\tan x)+6\int\tan x dx-\int\left((\cot x)^3+4\cot x\right)d(\cot x)+6\int\cot x dx$$

$$=\frac{(\tan x)^4}{4}+2\tan^2 x-6\ln|\cos x|-\frac{(\cot x)^4}{4}-2\cot^2 x+6\ln|\sin x|+C$$

Tóm lại. *Qua 5 ví dụ trên ta đã phần nào hiểu được phương pháp làm các bài tập của dạng toán này, mấu chốt là đưa về nguyên hàm tích phân hàm đa thức qua các phép biến đổi và thêm bớt, và đồng thời cũng cần áp dụng linh hoạt công thức khai triển hệ thức Newton để giải quyết bài toán dễ dàng. Về phần bài tập luyện tập có lẽ không cần thêm vì các bạn có thể bịa bất kì một bài toán tương tự với các bài mẫu!*

Dạng 5. Tính tích phân tổng quát sau $I=\int\frac{(\tan x)^m}{(\cos x)^n}dx, I=\int\frac{(\mathrm{cotg}\, x)^m}{(\sin x)^n}dx$

Ta sẽ xét dạng $I=\int\frac{(\tan x)^m}{(\cos x)^n}dx$ vì đây là 2 dạng tương tự nhau

- *Trường hợp 1.* Nếu n chẵn ta biến đổi như sau

$$I=\int\frac{(\tan x)^m}{(\cos x)^n}dx=\int(\tan x)^m\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^{k-1}\frac{dx}{\cos^2 x}=\int(\tan x)^m(1+\tan^2 x)^{k-1}d(\tan x)$$

$$=\int(\tan x)^m\left(C_{k-1}^0+C_{k-1}^1(\tan^2 x)^1+\ldots+C_{k-1}^p(\tan^2 x)^p+\ldots+C_{k-1}^{k-1}(\tan^2 x)^{k-1}\right)d(\tan x)$$

$$=C_{k-1}^0\frac{(\tan x)^{m+1}}{m+1}+C_{k-1}^1\frac{(\tan x)^{m+3}}{m+3}+\ldots+C_{k-1}^p\frac{(\tan x)^{m+2p+1}}{m+2p+1}+\ldots+C_{k-1}^{k-1}\frac{(\tan x)^{m+2k-1}}{m+2k-1}+C$$

- *Trường hợp 2.* Nếu m và n đều lẻ thì ta biến đổi như sau

$$I=\int\frac{(\tan x)^{2k+1}}{(\cos x)^{2h+1}}dx=\int(\tan x)^{2k}\left(\frac{1}{\cos x}\right)^{2h}\frac{\tan x}{\cos x}dx=\int(\tan^2 x)^k\left(\frac{1}{\cos x}\right)^{2h}\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$$

$$=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)^k\left(\frac{1}{\cos x}\right)^{2h}d\left(\frac{1}{\cos x}\right)=\int\left(u^2-1\right)^k u^{2h}du \quad \left(u=\frac{1}{\cos x}\right)$$

$$=\int u^{2h}\left(C_k^0\left(u^2\right)^k-C_k^1\left(u^2\right)^{k-1}+\ldots+(-1)^p C_k^p\left(u^2\right)^{k-p}+\ldots+(-1)^k C_k^k\right)du$$

$$=C_k^0\frac{u^{2k+2h+1}}{2k+2h+1}-C_k^1\frac{u^{2k+2h-1}}{2k+2h-1}+\ldots+(-1)^p C_k^p\frac{u^{2k+2h-2p+1}}{2k+2h-2p+1}+\ldots+(-1)^k C_k^k\frac{u^{2h+1}}{2h+1}+C$$

- *Trường hợp 3.* Nếu m chẵn và n lẻ thì ta biến đổi như sau

$$I=\int\frac{(\tan x)^{2k}}{(\cos x)^{2h+1}}dx=\int\frac{(\sin x)^{2k}\cos x}{(\cos x)^{2(k+h+1)}}dx=\int\frac{(\sin x)^{2k}}{\left(1-\sin^2 x\right)^{k+h+1}}d(\sin x)$$

Đặt $u=\sin x$ ta có $I=\int\frac{u^{2k}du}{\left(1-u^2\right)^{k+h+1}}=\int\frac{u^{2k-2}\left[1-\left(1-u^2\right)\right]}{\left(1-u^2\right)^{k+h+1}}du=\int\frac{u^{2k-2}du}{\left(1-u^2\right)^{k+h+1}}-\int\frac{u^{2k-2}du}{\left(1-u^2\right)^{k+h}}$

Hệ thức trên là hệ thức truy hồi các bạn có thể tham khảo ở phần sau, do đó tính được I.

Nhìn chung các bài toán trên mang tính tổng quát và có lẽ nhìn vào các lời giải tổng quát đó ta sẽ thấy nó thật lằng nhằng và phức tạp, nhưng khi vào các ví dụ cụ thể ta sẽ thấy cách làm các dạng toán này khá dễ. Sau đây ta sẽ đi vào các bài minh họa.

Câu 5.

Tìm các nguyên hàm sau.

a) $I=\int\frac{(\cot 5x)^{10}}{(\sin 5x)^8}dx$

c) $I=\int\frac{(\cot 3x)^9}{(\sin 3x)^{41}}dx$

b) $I=\int\frac{(\tan 4x)^7}{(\cos 4x)^{95}}dx$

d) $I=\int\frac{(\tan 3x)^7}{(\cos 3x)^6}dx$

Lời giải

a) Ta có $I=\int\frac{(\cot 5x)^{10}}{(\sin 5x)^8}dx=\int(\cot 5x)^{10}\left[\frac{1}{(\sin 5x)^2}\right]^3\frac{dx}{(\sin 5x)^2}$

$$=-\frac{1}{5}\int(\cot 5x)^{10}\left[1+\cot^2 5x\right]^3 d(\cot 5x)$$

$$=-\frac{1}{5}\int(\cot 5x)^{10}\left(1+3(\cot 5x)^2+3(\cot 5x)^4+(\cot 5x)^6\right)d(\cot 5x)$$

$$=-\frac{1}{5}\left[\frac{(\cot 5x)^{11}}{11}+3\frac{(\cot 5x)^{13}}{13}+3\frac{(\cot 5x)^{15}}{15}+\frac{(\cot 5x)^{17}}{17}\right]+C$$

b) Ta có $I=\int\frac{(\tan 4x)^7}{(\cos 4x)^{95}}dx=\int(\tan 4x)^6\left(\frac{1}{\cos 4x}\right)^{94}\frac{\tan 4x}{\cos 4x}dx$

$$=\frac{1}{4}\int\left[\frac{1}{(\cos 4x)^2}-1\right]^3\left(\frac{1}{\cos 4x}\right)^{94}d\left(\frac{1}{\cos 4x}\right)=\frac{1}{4}\int u^{94}\left(u^2-1\right)^3du$$

$$=\frac{1}{4}\int u^{94}\left(u^6-3u^4+3u^2-1\right)du=\frac{1}{4}\left[\frac{u^{101}}{101}-3\frac{u^{99}}{99}+3\frac{u^{97}}{97}-\frac{u^{95}}{95}\right]+C$$

c) Ta có $I=\int\frac{(\cot 3x)^9}{(\sin 3x)^{41}}dx=\int(\cot 3x)^8\left(\frac{1}{\sin 3x}\right)^{40}\frac{\cot 3x}{\sin 3x}dx$

$$=-\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)^4\left(\frac{1}{\sin 3x}\right)^{40}d\left(\frac{1}{\sin 3x}\right)=-\frac{1}{3}\int u^{40}\left(u^2-1\right)^4du$$

$$=-\frac{1}{3}\int u^{40}\left(u^8-4u^6+6u^4-4u^2+1\right)^4du=-\frac{1}{3}\left[\frac{u^{49}}{49}-4\frac{u^{47}}{47}+6\frac{u^{45}}{45}-4\frac{u^{43}}{43}+\frac{u^{41}}{41}\right]+C$$

d) Ta có $I=\int(\tan 3x)^7\left[\frac{1}{(\cos 3x)^2}\right]^2\frac{dx}{(\cos 3x)^2}=\frac{1}{3}\int(\tan 3x)^7\left(1+\tan^2 3x\right)^2d(\tan 3x)$

$$=\frac{1}{3}\int(\tan 3x)^7\left[1+2(\tan 3x)^2+(\tan 3x)^4\right]d(\tan 3x)=\frac{1}{3}\left[\frac{(\tan 3x)^8}{8}+2\frac{(\tan 3x)^{10}}{10}+\frac{(\tan 3x)^{12}}{10}\right]+C$$

Tóm lại. *Qua 4 ví dụ trên ta thấy đó, mấu chốt chỉ là công thức lượng giác và phân tích hợp lý, cái này ở phần hướng dẫn đã có đầy đủ rồi. Tương tự mấy phần trước bài tập tự luyện có lẽ không cần vì các bạn có thể tự nghĩ ra một câu để mình làm. Ta cùng chuyển tiếp sang phần sau!*

2. CÁC DẠNG TOÁN BIẾN ĐỔI NÂNG CAO.

Các bài toán nguyên hàm tích phân lượng giác rất phong phú và do đó sẽ không dừng lại các dạng toán bên trên. Ở phần này ta sẽ cùng tìm hiểu các dạng toán nâng cao hơn, với những phép biến đổi phức tạp hơn. Sau đây chúng ta sẽ cùng đi vào từng dạng toán cụ thể!

Dạng 1. Xét tích phân tổng quát $I=\int\frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$

1. PHƯƠNG PHÁP.

Dùng đồng nhất thức:

$$1=\frac{\sin(a-b)}{\sin(a-b)}=\frac{\sin\left[(x+a)-(x+b)\right]}{\sin(a-b)}=\frac{\sin(x+a)\cos(x+b)-\cos(x+a)\sin(x+b)}{\sin(a-b)}$$

Từ đó suy ra $I=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\frac{\sin(x+a)\cos(x+b)-\cos(x+a)\sin(x+b)}{\sin(x+a)\sin(x+b)}dx$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\left[\frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)}-\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)}\right]dx$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\left[\ln\left|\sin(x+b)\right|-\ln\left|\sin(x+a)\right|\right]+C$$

2. CHÚ Ý.

Với cách này, ta có thể tìm được các nguyên hàm:

- $J=\int \frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$ bằng cách dùng đồng nhất thức $1=\frac{\sin(a-b)}{\sin(a-b)}$
- $K=\int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$ bằng cách dùng đồng nhất thức $1=\frac{\cos(a-b)}{\cos(a-b)}$

Sau đây là các ví dụ minh họa cho các bài toán này.

Câu 1.

Tính các tích phân sau

a) $I=\int \frac{dx}{\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$ b) $I=\int \frac{dx}{\cos 3x\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)}$ c) $I=\int \frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}$

Lời giải

Tính các nguyên hàm, tích phân sau:

a) Ta có $1=\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\sin\left[\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-x\right]}{\frac{1}{2}}=2\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos x-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin x\right]$

$$\Rightarrow I=2\int \frac{\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos x-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin x\right]}{\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}dx=2\int\left[\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}\right]dx$$

$$=2\int\frac{d(\sin x)}{\sin x}-2\int\frac{d\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=2\ln\left|\frac{\sin x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}\right|+C$$

b) Ta có $1=\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\sin\left[\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)-3x\right]}{\frac{1}{2}}=2\left[\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)\cos 3x-\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)\sin 3x\right]$

$$\Rightarrow I=2\int \frac{\left[\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)\cos 3x-\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)\sin 3x\right]}{\cos 3x\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)}dx=2\int\frac{\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)}dx-2\int\frac{\sin 3x}{\cos 3x}dx$$

$$= -\frac{2}{3}\int \frac{d\left(\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)\right)}{\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)} + \frac{2}{3}\int \frac{d(\cos 3x)}{\cos 3x} = \frac{2}{3}\ln\left|\frac{\cos 3x}{\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)}\right| + C$$

c) Ta có $1 = \dfrac{\cos\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\cos\left[\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right]}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right) + \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

$$\Rightarrow I = \sqrt{2}\int \frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right) + \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}dx$$

$$= \sqrt{2}\int \frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}dx + \sqrt{2}\int \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}dx$$

$$= \sqrt{2}\int \frac{d\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)} - \sqrt{2}\int \frac{d\left(\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)} = \sqrt{2}\ln\left|\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}\right| + C$$

Dạng 2. Xét tích phân tổng quát $I = \int \tan(x+a)\tan(x+b)dx$

1. PHƯƠNG PHÁP.

Ta có $\tan(x+a)\tan(x+b) = \dfrac{\sin(x+a)\sin(x+b)}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$

$$= \frac{\sin(x+a)\sin(x+b)+\cos(x+a)\cos(x+b)}{\cos(x+a)\cos(x+b)} - 1 = \frac{\cos(a-b)}{\cos(x+a)\cos(x+b)} - 1$$

Từ đó suy ra $I = \cos(a-b)\int \dfrac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)} - 1$

Đến đây ta gặp bài toán tìm nguyên hàm ở ***Dạng 1.***

2. CHÚ Ý

Với cách này, ta có thể tính được các nguyên hàm:

- $J = \int \cot(x+a)\cot(x+b)dx$
- $K = \int \tan(x+a)\tan(x+b)dx$

Sau đây là các ví dụ minh họa cho các bài toán này.

Câu 2.

Tính các tích phân sau

a) $I=\int \cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cot\left(x+\frac{\pi}{6}\right)dx$

b) $K=\int \tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cot\left(x+\frac{\pi}{6}\right)dx$

Lời giải

a) Ta có $\cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cot\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$

$$=\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}-1$$

$$=\frac{\cos\left[\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}-1=\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}-1$$

Từ đó $I=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\displaystyle\int\frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}dx-\int dx=\frac{\sqrt{3}}{2}I_1-x+C$

Tính $I_1=\displaystyle\int\frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$

Ta có $1=\dfrac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\dfrac{\sin\left[\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]}{\frac{1}{2}}=2\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]$

Từ đó $I_1=2\displaystyle\int\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}dx$

$$=2\int\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}dx-2\int\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}dx=2\ln\left|\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}\right|+C$$

Suy ra $I=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.2\ln\left|\dfrac{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}\right|-x+C=\sqrt{3}\ln\left|\dfrac{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}\right|-x+C$

b) Ta có $\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cot\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$

$$=\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}+1$$

$$=\frac{\sin\left[\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]}{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}+1=\frac{1}{2}.\frac{1}{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}+1$$

Từ đó $K=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}dx+\int dx=\frac{1}{2}K_1+x+C$

Đến đây, bằng cách tính ở Dạng 1, ta tính được:

$$K_1=\int\frac{dx}{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{2}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}\right|+C\Rightarrow K=\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}\right|+x+C$$

Dạng 3. Xét tích phân tổng quát $I=\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x}$

PHƯƠNG PHÁP.

Biến đổi $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)$

$$\Rightarrow a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(x+\alpha\right)$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{dx}{\sin\left(x+\alpha\right)}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\frac{x+\alpha}{2}\right|+C$$

Sau đây là các ví dụ minh họa cho các bài toán này.

Câu 3.

Tính các tích phân sau

a) $I=\int\frac{2dx}{\sqrt{3}\sin x+\cos x}$

b) $J=\int\frac{dx}{\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x}$

Lời giải

a) Ta có $I=\int\frac{2dx}{\sqrt{3}\sin x+\cos x}=\int\frac{dx}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x}=\int\frac{dx}{\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}}$

$$=\int\frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=\int\frac{d\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=\ln\left|\tan\frac{x+\frac{\pi}{6}}{2}\right|+C=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\right|+C$$

b) Ta có $J=\int\frac{dx}{\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x}$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin\frac{\pi}{6}\cos 2x-\cos\frac{\pi}{6}\sin 2x}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)}=-\frac{1}{4}\int\frac{d\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)}$$

$$=-\frac{1}{4}\ln\left|\tan\frac{\frac{\pi}{6}-2x}{2}\right|+C=-\frac{1}{4}\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{12}-x\right)\right|+C$$

Dạng 4. Xét tích phân tổng quát $I=\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x+c}$

PHƯƠNG PHÁP. Đặt $\tan\frac{x}{2}=t\Rightarrow\begin{cases}dx=\frac{2dt}{1+t^2}\\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2}\\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\\ \tan x=\frac{2t}{1-t^2}\end{cases}$

Sau đây là các ví dụ minh họa cho các bài toán này.

Câu 4.

Tính các tích phân sau

a) $I=\int\frac{dx}{3\cos x+5\sin x+3}$ b) $J=\int\frac{2dx}{2\sin x-\cos x+1}$

c) $K=\int\frac{dx}{\sin x+\tan x}$ d) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)dx$

Lời giải

a) Đặt $\tan\frac{x}{2}=t\Rightarrow\begin{cases}dx=\frac{2dt}{1+t^2}\\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2}\\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{cases}$. Từ đó ta có $I=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3.\frac{1-t^2}{1+t^2}+5\frac{2t}{1+t^2}+3}=\int\frac{2dt}{3-3t^2+10t+3+3t^2}$

$$=\int\frac{2dt}{10t+6}=\frac{1}{5}\int\frac{d(5t+3)}{5t+3}=\frac{1}{5}\ln|5t+3|+C=\frac{1}{5}\ln\left|5\tan\frac{x}{2}+3\right|+C$$

b) Đặt $\tan\frac{x}{2}=t\Rightarrow\begin{cases}dx=\frac{2dt}{1+t^2}\\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{cases}$

$$\Rightarrow J=\int\frac{2.\frac{2dt}{1+t^2}}{2.\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}+1}=\int\frac{4dt}{4t-1+t^2+1+t^2}=\int\frac{4dt}{2t^2+4t}=2\int\frac{dt}{t(t+2)}$$

$$=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}\right)dt=\ln|t|-\ln|t+2|+C=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|-\ln\left|\tan\frac{x}{2}+2\right|+C$$

c) Đặt $\tan\frac{x}{2}=t\Rightarrow\begin{cases}dx=\frac{2dt}{1+t^2}\\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\tan x=\frac{2t}{1-t^2}\end{cases}$

$$\Rightarrow K=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{2t}{1-t^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{1-t^2}{t}dt=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}-\frac{1}{2}\int tdt$$

$$=\frac{1}{2}\ln|t|-\frac{1}{4}t^2+C=\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+C$$

d) Biến đổi giả thiết ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right)dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\tan^2\frac{x}{2}+2\tan\frac{x}{2}+1\right)dx$$

Đặt $\tan\frac{x}{2}=t\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int_0^1(t^2+1)\ln(t^2+t+1)dt$.

Đến đây sử dụng tính chất $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$ bài toán sẽ được giải quyết

Cách 2. Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1+\text{sinx})dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1+\text{cosx})dx$

Sử dụng nguyên hàm từng phần ta được

- $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1+\text{sinx})dx=\frac{\pi}{2}\ln2-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\text{xcosx}}{1+\text{sinx}}dx$

- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x}{1+\cos x}dx$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2}\ln 2 - \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos x}{1+\sin x}dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x}{1+\cos x}dx\right)$$

Từ đây ta sẽ đi tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos x}{1+\sin x}dx$. Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x$ ta được

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos x}{1+\sin x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x}dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x}{1+\cos x}dx \Rightarrow I = 0$$

Dạng 5. Xét tích phân tổng quát $I = \int \frac{dx}{a.\sin^2 x + b.\sin x\cos x + c.\cos^2 x}$

PHƯƠNG PHÁP. $I = \int \frac{dx}{\left(a\tan^2 x + b\tan x + c\right).\cos^2 x}$

Đặt $\tan x = t \Rightarrow \frac{dx}{\cos^2 x} = dt$. Suy ra $I = \int \frac{dt}{at^2 + bt + c}$

Sau đây là các ví dụ minh họa cho các bài toán này.

Câu 5.

Tính các tích phân sau

a) $I = \int \frac{dx}{3\sin^2 x - 2\sin x\cos x - \cos^2 x}$

b) $J = \int \frac{dx}{\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 2\cos^2 x}$

Lời giải

a) Ta có $I = \int \frac{dx}{3\sin^2 x - 2\sin x\cos x - \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\left(3\tan^2 x - 2\tan x - 1\right)\cos^2 x}$

Đặt $\tan x = t \Rightarrow \frac{dx}{\cos^2 x} = dt \Rightarrow I = \int \frac{dt}{3t^2 - 2t - 1} = \int \frac{dt}{(t-1)(3t+1)}$

$$= \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t-1} - \frac{3}{3t+1}\right)dt = \frac{1}{4}\int\frac{dt}{t-1} - \frac{1}{4}\int\frac{d(3t+1)}{3t+1}$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{3t+1}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\tan x - 1}{3\tan x + 1}\right| + C$$

b) Ta có $J = \int \frac{dx}{\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 2\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\left(\tan^2 x - 2\tan x - 2\right)\cos^2 x}$

Đặt $\tan x = t \Rightarrow \frac{dx}{\cos^2 x} = dt$

$$\Rightarrow J=\int\frac{dt}{t^2-2t-2}=\int\frac{d(t-1)}{(t-1)^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-1-\sqrt{3}}{t-1+\sqrt{3}}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\tan x-1-\sqrt{3}}{\tan x-1+\sqrt{3}}\right|+C$$

Dạng 6. Xét tích phân tổng quát $I=\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a_2\sin x+b_2\cos x}dx$

PHƯƠNG PHÁP.

Ta tìm A,B sao cho: $a_1\sin x+b_1\cos x=A(a_2\sin x+b_2\cos x)+B(a_2\cos x-b_2\sin x)$

Sau đây là các ví dụ minh họa cho các bài toán này.

Câu 6.

Tính các tích phân sau

a) $I=\int\frac{4\sin x+3\cos x}{\sin x+2\cos x}dx$

b) $J=\int\frac{dx}{\sin^2 x-2\sin x\cos x-2\cos^2 x}$

Lời giải

a) Ta tìm A,B sao cho $4\sin x+3\cos x=A(\sin x+2\cos x)+B(\cos x-2\sin x)$

$$\Rightarrow 4\sin x+3\cos x=(A-2B)\sin x+(2A+B)\cos x\Rightarrow\begin{cases}A-2B=4\\2A+B=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=2\\B=-1\end{cases}$$

Từ đó $I=\int\frac{2(\sin x+2\cos x)-(\cos x-2\sin x)}{\sin x+2\cos x}dx$

$$=2\int dx-\int\frac{d(\sin x+2\cos x)}{\sin x+2\cos x}=2x-\ln|\sin x+2\cos x|+C$$

b) Ta tìm A,B sao cho $3\cos x-2\sin x=A(\cos x-4\sin x)+B(-\sin x-4\cos x)$

$$\Rightarrow 3\cos x-2\sin x=(A-4B)\cos x+(-4A-B)\sin x\Rightarrow\begin{cases}A-4B=3\\4A+B=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\frac{11}{17}\\B=-\frac{10}{17}\end{cases}$$

Từ đó $J=\int\frac{\frac{11}{17}(\cos x-4\sin x)-\frac{10}{17}(-\sin x-4\cos x)}{\cos x-4\sin x}dx$

$$=\frac{11}{17}\int dx-\frac{10}{17}\int\frac{d(\cos x-4\sin x)}{\cos x-4\sin x}=\frac{11}{17}x-\frac{10}{17}\ln|\cos x-4\sin x|+C$$

CHÚ Ý.

1. Nếu gặp $I=\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{(a_2\sin x+b_2\cos x)^2}dx$ ta vẫn tìm A,B sao cho:

$$a_1\sin x+b_1\cos x=A(a_2\sin x+b_2\cos x)+B(a_2\cos x-b_2\sin x)$$

2. Nếu gặp $I=\int \frac{a_1\sin x+b_1\cos x+c_1}{a_2\sin x+b_2\cos x+c_2}dx$ ta tìm A,B sao cho:

$$a_1\sin x+b_1\cos x+c_1=A\left(a_2\sin x+b_2\cos x+c_2\right)+B\left(a_2\cos x-b_2\sin x\right)+C$$

Chẳng hạn.

1. Tính nguyên hàm $I=\int \frac{8\cos x}{\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)^2}dx$. Ta tìm A,B sao cho:

$$8\cos x=A\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)+B\left(\sqrt{3}\cos x-\sin x\right)$$

$$\Rightarrow 8\cos x=\left(A\sqrt{3}-B\right)\sin x+\left(A+B\sqrt{3}\right)\cos x\Rightarrow \begin{cases}A\sqrt{3}-B=0\\ A+B\sqrt{3}=8\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}A=2\\ B=2\sqrt{3}\end{cases}$$

Từ đó $I=\int \frac{2\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)+2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}\cos x-\sin x\right)}{\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)^2}dx$

$$=2\int \frac{dx}{\sqrt{3}\sin x+\cos x}+2\sqrt{3}\int \frac{d\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)}{\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)^2}=2I_1-\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sin x+\cos x}+C$$

Tìm $I_1=\int \frac{dx}{\sqrt{3}\sin x+\cos x}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}}$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{2}\int \frac{d\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x+\frac{\pi}{6}}{2}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\right|+C$$

Vậy $I=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\right|-\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sin x+\cos x}+C$

2. $J=\int \frac{8\sin x+\cos x+5}{2\sin x-\cos x+1}dx$. Ta tìm A,B,C sao cho:

$$8\sin x+\cos x+5=A\left(2\sin x-\cos x+1\right)+B\left(2\cos x+\sin x\right)+C$$

$$\Rightarrow 8\sin x+\cos x+5=(2A+B)\sin x+(-A+2B)\cos x+A+C\Rightarrow \begin{cases}2A+B=8\\ -A+2B=1\\ A+C=5\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}A=3\\ B=2\\ C=2\end{cases}$$

Từ đó: $J=\int \frac{3(2\sin x-\cos x+1)+2(2\cos x+\sin x)+2}{2\sin x-\cos x+1}dx$

$=3\int dx+2\int \frac{2\cos x+\sin x}{2\sin x-\cos x+1}dx+2\frac{dx}{2\sin x-\cos x+1}$

$=3x+2\ln\left|2\sin x-\cos x+1\right|+2J_1$

- Tìm $J_1=\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+1}$. Đặt $\tan\frac{x}{2}=t\Rightarrow\begin{cases}dx=\frac{2dt}{1+t^2}\\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{cases}$

$$\Rightarrow J_1=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2.\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}+1}=\int\frac{dt}{t^2+2t}=\int\frac{dt}{t(t+2)}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t}{t+2}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}+2}\right|+C$$

Vậy $J=3x+2\ln|2\sin x-\cos x+1|+\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}+2}\right|+C$

Dạng 7. Xét tích phân tổng quát $I=\int\frac{a(\sin x)^2+b\sin x\cos x+c(\cos x)^2}{m\sin x+n\cos x}dx$

PHƯƠNG PHÁP. Đặt $S=a(\sin x)^2+b\sin x\cos x+c(\cos x)^2$

Giả sử $S=(p\sin x+q\cos x)(m\sin x+n\cos x)+r(\sin^2 x+\cos^2 x)$

$$\Leftrightarrow S=(mp+r)(\sin x)^2+(np+mq)\sin x\cos x+(nq+r)(\cos x)^2$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}mp+r=a\\ np+mq=b\\ nq+r=c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}mp+r=a\\ np+mq=b\\ mp-nq=a-c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p=\frac{(a-c)m+bn}{m^2+n^2}\\ q=\frac{(a-c)n-bm}{m^2+n^2}\\ r=\frac{an^2+cm^2-bmn}{m^2+n^2}\end{cases}$$

Khi đó ta có

$$I=\int\left(\frac{(a-c)m+bn}{m^2+n^2}\sin x+\frac{(a-c)n-bm}{m^2+n^2}\cos x\right)dx+\frac{an^2+cm^2-bmn}{m^2+n^2}\int\frac{dx}{m\sin x+n\cos x}$$

$$=\frac{(a-c)n-bm}{m^2+n^2}\sin x-\frac{(a-c)m+bn}{m^2+n^2}\cos x+\frac{an^2+cm^2-bmn}{m^2+n^2}\int\frac{dx}{m\sin x+n\cos x}$$

Tích phân cuối cùng ta đã được tìm hiểu ở dạng trước!

Sau đây là các ví dụ minh họa cho các bài toán này.

Câu 7.

Tính các tích phân sau

a) $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{(\cos x)^2\,dx}{\sin x+\sqrt{3}\cos x}$

b) $I=\int\frac{\left(3\sqrt{3}-2\right)(\sin x)^2+\left(4\sqrt{3}+3\right)\sin x\cos x+2(\cos x)^2}{3\sin x+4\cos x}dx$

Lời giải

a) Giả sử $(\cos x)^2=(a\sin x+b\cos x)\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)+c\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$

$$\Leftrightarrow(\cos x)^2=(a+c)(\sin x)^2+\left(a\sqrt{3}+b\right)\sin x\cos x+\left(b\sqrt{3}+c\right)(\cos x)^2\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{1}{4}\\ b=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\\ c=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)dx+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin x+\sqrt{3}\cos x}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x-\sin\frac{\pi}{6}\sin x\right)dx+\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos\frac{\pi}{3}\sin x+\sin\frac{\pi}{3}\cos x}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)dx+\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}=\left(\frac{1}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right|\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\ln\sqrt{3}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\ln\sqrt{3}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\ln\sqrt{3}=\frac{1}{4}\left(1+\ln\sqrt{3}\right)$$

b) Giả sử $\left(3\sqrt{3}-2\right)(\sin x)^2+\left(4\sqrt{3}+3\right)\sin x\cos x+2(\cos x)^2$

$$=(a\sin x+b\cos x)(3\sin x+4\cos x)+c\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3a+c=3\sqrt{3}-2\\ 4a+3b=4\sqrt{3}+3\\ 4b+c=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\sqrt{3}\\ b=1\\ c=-2\end{cases}\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)dx-2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{3\sin x+4\cos x}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\sin\frac{\pi}{3}\sin x+\cos\frac{\pi}{3}\cos x\right)dx-\frac{2}{5}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)\sin x+\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)\cos x}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)dx-\frac{2}{5}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos(x-u)}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)dx-\frac{2}{5}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\left[\sin(x-u)\right]}{1-\sin^2(x-u)}$$

$$=\left[\frac{1}{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1+\sin(x-u)}{1-\sin(x-u)}\right|\right]\Bigg|_0^{\pi/3}=\frac{-\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{5}\ln\frac{1+\sin x\cos u-\sin u\cos x}{1-\sin x\cos u+\sin u\cos x}\Bigg|_0^{\pi/3}$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{5}\ln\left|\frac{5-4\sin\frac{\pi}{3}+3\cos\frac{\pi}{3}}{5+4\sin\frac{\pi}{3}-3\cos\frac{\pi}{3}}\right|-\frac{1}{5}\ln 4=\frac{1}{5}\ln\frac{13-4\sqrt{3}}{4\left(7+4\sqrt{3}\right)}-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Dạng 8. Xét tích phân tổng quát $I=\int\frac{m\sin x+n\cos x}{a(\sin x)^2+2b\sin x\cos x+c(\cos x)^2}dx$

PHƯƠNG PHÁP.

Gọi λ_1,λ_2 là nghiệm của phương trình $\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix}=0$

$$\Leftrightarrow \lambda^2-(a+c)\lambda+ac-b^2=0\Leftrightarrow \lambda_{1,2}=\frac{a+c\pm\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}$$

Biến đổi một xíu: $a(\sin x)^2+2b\sin x\cos x+c(\cos x)^2=\lambda_1A_1^2+\lambda_2A_2^2$

$$=\frac{\lambda_1}{1+\frac{b^2}{(a-\lambda_1)^2}}\left(\cos x-\frac{b}{a-\lambda_1}\sin x\right)^2+\frac{\lambda_2}{1+\frac{b^2}{(a-\lambda_2)^2}}\left(\cos x-\frac{b}{a-\lambda_2}\sin x\right)^2$$

Đặt $u_1=\cos x-\frac{b}{a-\lambda_1}\sin x;u_2=\cos x-\frac{b}{a-\lambda_2}\sin x;k_1=\frac{1}{a-\lambda_1};k_2=\frac{1}{a-\lambda_2}$

$$A_1=\frac{1}{\sqrt{1+b^2k_1^2}}(\cos x-bk_1\sin x);A_2=\frac{1}{\sqrt{1+b^2k_2^2}}(\cos x-bk_2\sin x)$$

Để ý $A_1^2+A_2^2=1\Rightarrow \lambda_1A_1^2+\lambda_2A_2^2=(\lambda_1-\lambda_2)A_1^2+\lambda_2=(\lambda_2-\lambda_1)A_2^2+\lambda_1$

Giả sử $m\sin x+n\cos x=p\left(\sin x+\frac{b}{a-\lambda_1}\cos x\right)+q\left(\sin x+\frac{b}{a-\lambda_2}\cos x\right)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}p+q=m\\ \frac{p}{a-\lambda_1}+\frac{q}{a-\lambda_2}=\frac{n}{b}\end{cases}\Leftrightarrow p=\frac{bm-n(a-\lambda_2)}{b(\lambda_2-\lambda_1)}(a-\lambda_1);q=\frac{bm-n(a-\lambda_1)}{b(\lambda_1-\lambda_2)}(a-\lambda_2)$$

$$\Rightarrow I=\int\frac{m\sin x+n\cos x}{a(\sin x)^2+2b\sin x\cos x+c(\cos x)^2}dx=\int\frac{-pdu_1}{(\lambda_1-\lambda_2)A_1^2+\lambda_2}+\int\frac{-qdu_2}{(\lambda_2-\lambda_1)A_2^2+\lambda_1}$$

$$=-p\sqrt{1+b^2k_1^2}\int\frac{dA_1}{(\lambda_1-\lambda_2)A_1^2+\lambda_2}-q\sqrt{1+b^2k_2^2}\int\frac{dA_2}{(\lambda_2-\lambda_1)A_2^2+\lambda_1}$$

Sau đây là các ví dụ minh họa cho các bài toán này.

Câu 8.

Tính tích phân sau $I=\int\frac{(\sin x+\cos x)dx}{2\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\cos^2 x}$

Lời giải

Gọi λ_1,λ_2 là 2 nghiệm của phương trình $\begin{vmatrix}2-\lambda & -2\\ -2 & 5-\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\lambda_1=1;\lambda_2=6$

Ta có $2\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\cos^2 x=\frac{1}{5}(\cos x+2\sin x)^2+\frac{24}{5}\left(\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)^2$

$$A_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(\cos x+2\sin x);A_2=\frac{2}{\sqrt{5}}\left(\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right);A_1^2+A_2^2=1$$

$$\Rightarrow I=\int\frac{(\sin x+\cos x)dx}{2\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\cos^2 x}=\frac{3}{5}\int\frac{(2\sin x+\cos x)dx}{(2\cos x-\sin x)^2+1}-\frac{1}{5}\int\frac{(\sin x-2\cos x)dx}{6-(\cos x+2\sin x)^2}$$

$$=\frac{3}{5}\int\frac{d(\sin x-2\cos x)}{(\sin x-2\cos x)^2+1}+\frac{1}{5}\int\frac{d(\cos x+2\sin x)}{6-(\cos x+2\sin x)^2}$$

$$=\frac{3}{5}\operatorname{arctg}(\sin x-2\cos x)+\frac{1}{10\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}+\cos x+2\sin x}{\sqrt{6}-\cos x-2\sin x}\right|+C$$

Dạng 9. Biến đổi nâng cao với 2 dạng tích phân $\int\frac{dx}{(\sin x)^n}$ và $\int\frac{dx}{(\cos x)^n}$

Thực chất mình chia dạng toán này thành 1 dạng toán nhỏ vì trong khi tính nguyên hàm hoặc tích phân ta sẽ có thể gặp các bài toán kiểu thế này, do đó mình muốn giới thiệu cho các bạn các cách để xử lý nó.

- Xét bài toán $\int\frac{dx}{(\sin x)^n}$.

$$+\ I_1=\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\int\frac{dx}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}=\int\frac{d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

$$+\ I_2=\int\frac{dx}{\sin^2 x}=\int -d(\cot x)=-\cot x+C$$

$$+\ I_3=\int\frac{dx}{\sin^3 x}=\int\frac{dx}{\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)^3}=\int\frac{dx}{8\left(\tan\frac{x}{2}\right)^3\left(\cos\frac{x}{2}\right)^6}=\frac{1}{4}\int\frac{\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)^2 d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^3}$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{1+2\tan^2\frac{x}{2}+\tan^4\frac{x}{2}}{\left(\tan\frac{x}{2}\right)^3}=\frac{1}{4}\left[\frac{-1}{2\left(\tan\frac{x}{2}\right)^2}+2\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{2}\left(\tan\frac{x}{2}\right)^2\right]+C$$

+ $I_4=\int\frac{dx}{\sin^4 x}=-\int\left(1+\cot^2 x\right)d\left(\cot x\right)=-\left(\cot x+\frac{1}{3}\cot^3 x\right)+C$

+ $I_5=\int\frac{dx}{\sin^5 x}=\int\frac{dx}{\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)^5}=\int\frac{dx}{32\left(\tan\frac{x}{2}\right)^5\left(\cos\frac{x}{2}\right)^{10}}$

$$=\frac{1}{16}\int\frac{\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)^4 d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\left(\tan\frac{x}{2}\right)^5}=\frac{1}{16}\int\frac{1+4\tan^2\frac{x}{2}+6\tan^4\frac{x}{2}+4\tan^6\frac{x}{2}+\tan^8\frac{x}{2}}{\left(\tan\frac{x}{2}\right)^5}d\left(\tan\frac{x}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{16}\left[\frac{-1}{4\left(\tan\frac{x}{2}\right)^4}-\frac{2}{\left(\tan\frac{x}{2}\right)^2}+6\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+2\left(\tan\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\tan\frac{x}{2}\right)^4\right]+C$$

+ $I_6=\int\frac{dx}{\sin^6 x}=-\int\left(1+\cot^2 x\right)^2 d\left(\cot x\right)=-\left(\cot x+\frac{2}{3}\cot^3 x+\frac{1}{5}\cot^5 x\right)+C$

+ $I_7=\int\frac{dx}{\sin^7 x}=\int\frac{dx}{\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)^7}=\int\frac{dx}{2^7\left(\tan\frac{x}{2}\right)^7\left(\cos\frac{x}{2}\right)^{14}}=\frac{1}{2^6}\int\frac{\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)^6 d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\left(\tan\frac{x}{2}\right)^7}$

$$=\frac{1}{2^6}\int\frac{1+6\tan^2\frac{x}{2}+15\tan^4\frac{x}{2}+20\tan^6\frac{x}{2}+15\tan^8\frac{x}{2}+6\tan^{10}\frac{x}{2}+\tan^{12}\frac{x}{2}}{\left(\tan\frac{x}{2}\right)^7}d\left(\tan\frac{x}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{64}\left[\frac{-1}{6\left(\tan\frac{x}{2}\right)^6}-\frac{3}{2\left(\tan\frac{x}{2}\right)^4}-\frac{15}{2\left(\tan\frac{x}{2}\right)^2}+20\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|\right.$$
$$\left.+\frac{15}{2}\left(\tan\frac{x}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\left(\tan\frac{x}{2}\right)^4+\frac{1}{6}\left(\tan\frac{x}{2}\right)^6+C\right]$$

+ $I_8=\int\frac{dx}{\sin^8 x}=-\int\left(1+\cot^2 x\right)^3 d\left(\cot x\right)=-\int\left(1+3\cot^2 x+3\cot^4 x+\cot^6 x\right)d\left(\cot x\right)$

$$=-\left(\cot x+\cot^3 x+\frac{3}{5}\cot^5 x+\frac{1}{7}\cot^7 x\right)+C$$

+ $I_9=\int\frac{dx}{(\sin x)^{2n+1}}=\int\frac{dx}{\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)^{2n+1}}$

$$=\int\frac{dx}{2^{2n+1}\left(\tan\frac{x}{2}\right)^{2n+1}\left(\cos\frac{x}{2}\right)^{4n+2}}=\frac{1}{2^{2n}}\int\frac{\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)^{2n} d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\left(\tan\frac{x}{2}\right)^{2n+1}}$$

$$=\frac{1}{2^{2n}}\left[\frac{-C_{2n}^{0}}{2n\left(\tan\frac{x}{2}\right)^{2n}}-\ldots-\frac{C_{2n}^{n-1}}{2\left(\tan\frac{x}{2}\right)^{2}}+C_{2n}^{n}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\frac{C_{2n}^{n+1}}{2}\left(\tan\frac{x}{2}\right)^{2}+\ldots+\frac{C_{2n}^{2n}}{2n}\left(\tan\frac{x}{2}\right)^{2n}\right]+C$$

$$+\ I_{10}=\int\frac{dx}{\sin^{2n+2}x}=-\int\left(1+\cot^{2}x\right)^{n}d\left(\cot x\right)$$

$$=-\int\left[C_{n}^{0}+C_{n}^{1}\cot^{2}x+\ldots+C_{n}^{k}\left(\cot^{2}x\right)^{k}+\ldots+C_{n}^{n}\left(\cot^{2}x\right)^{n}\right]d\left(\cot x\right)$$

$$=-\left[C_{11}^{0}\left(\cot x\right)+\frac{C_{n}^{1}}{3}\cot^{3}x+\ldots+\frac{C_{n}^{k}}{2k+1}\left(\cot x\right)^{2k+1}+\ldots+\frac{C_{n}^{n}}{2n+1}\left(\cot x\right)^{2n+1}\right]+C$$

- Xét bài toán $I=\int\frac{dx}{\left(\cos x\right)^{n}}$

$$+\ I_{1}=\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\int\frac{du}{\sin u}=\int\frac{du}{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}=\int\frac{du}{2\tan\frac{u}{2}\cos^{2}\frac{u}{2}}$$

$$=\int\frac{d\left(\tan\frac{u}{2}\right)}{\tan\frac{u}{2}}=\ln\left|\tan\frac{u}{2}\right|+C=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$$

$$+\ I_{2}=\int\frac{dx}{\cos^{2}x}=\int d\left(\tan x\right)=\tan x+C$$

$$+\ I_{3}=\int\frac{dx}{\cos^{3}x}=\int\frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin^{3}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\int\frac{du}{\sin^{3}u}=\int\frac{du}{\left(2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}\right)^{3}}=\int\frac{du}{8\left(\tan\frac{u}{2}\right)^{3}\left(\cos\frac{u}{2}\right)^{6}}$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{\left(1+\tan^{2}\frac{u}{2}\right)^{2}d\left(\tan\frac{u}{2}\right)}{\left(\tan\frac{u}{2}\right)^{3}}=\frac{1}{4}\left[\frac{-1}{2\left(\tan\frac{u}{2}\right)^{2}}+2\ln\left|\tan\frac{u}{2}\right|+\frac{1}{2}\left(\tan\frac{u}{2}\right)^{2}\right]+C$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{-1}{2\left[\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]^{2}}+2\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\frac{1}{2}\left[\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]^{2}\right]+C$$

$$+\ I_{4}=\int\frac{dx}{\cos^{4}x}=\int\left(1+\tan^{2}x\right)d\left(\tan x\right)=\tan x+\frac{1}{3}\tan^{3}x+C$$

$$+\ I_{5}=\int\frac{dx}{\cos^{5}x}=\int\frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin^{5}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\int\frac{du}{\sin^{5}u}=\int\frac{du}{\left(2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}\right)^{5}}=\int\frac{du}{32\left(\tan\frac{u}{2}\right)^{5}\left(\cos\frac{u}{2}\right)^{10}}$$

$$=\frac{1}{16}\int\frac{\left(1+\tan^2\frac{u}{2}\right)^4 d\left(\tan\frac{u}{2}\right)}{\left(\tan\frac{u}{2}\right)^5}=\frac{1}{16}\int\frac{1+4\tan^2\frac{u}{2}+6\tan^4\frac{u}{2}+4\tan^6\frac{u}{2}+\tan^8\frac{u}{2}}{\left(\tan\frac{u}{2}\right)^5}d\left(\tan\frac{u}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{16}\left[\frac{-1}{4\left(\tan\frac{u}{2}\right)^4}-\frac{2}{\left(\tan\frac{u}{2}\right)^2}+6\ln\left|\tan\frac{u}{2}\right|+2\left(\tan\frac{u}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\tan\frac{u}{2}\right)^4\right]+C$$

$$+\ I_6=\int\frac{dx}{\cos^6 x}=\int\left(1+\tan^2 x\right)^2 d\left(\tan x\right)=\tan x+\tan^3 x+\frac{1}{5}\tan^5 x+C$$

$$+\ I_7=\int\frac{dx}{\cos^7 x}=\int\frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin^7\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\int\frac{du}{\sin^7 u}=\int\frac{du}{2^7\left(\tan\frac{u}{2}\right)^7\left(\cos\frac{u}{2}\right)^{14}}$$

$$=\frac{1}{2^6}\int\frac{\left(1+\tan^2\frac{u}{2}\right)^6 d\left(\tan\frac{u}{2}\right)}{\left(\tan\frac{u}{2}\right)^7}$$

$$=\frac{1}{2^6}\int\frac{1+6\tan^2\frac{u}{2}+15\tan^4\frac{u}{2}+20\tan\frac{u}{2}+15\tan^8\frac{u}{2}+6\tan^{10}\frac{u}{2}+\tan^{12}\frac{u}{2}}{\left(\tan\frac{u}{2}\right)^7}d\left(\tan\frac{u}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{64}\left[\frac{-1}{6\left(\tan\frac{u}{2}\right)^6}-\frac{3}{2\left(\tan\frac{u}{2}\right)^4}-\frac{15}{2\left(\tan\frac{u}{2}\right)^2}+20\ln\left|\tan\frac{u}{2}\right|\right.$$
$$\left.+\frac{15}{2}\left(\tan\frac{u}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\left(\tan\frac{u}{2}\right)^4+\frac{1}{6}\left(\tan\frac{u}{2}\right)^6\right]+C$$

$$+\ I_8=\int\frac{dx}{\cos^8 x}=\int\left(1+\tan^2 x\right)^3 d\left(\tan x\right)$$

$$=\int\left(1+3\tan x^2+3\tan x^4+\tan x^6\right)d\left(\tan x\right)=\tan x+\tan^3 x+\frac{3}{5}\tan^5 x+\frac{1}{7}\tan^7 x+C$$

$$+\ I_9=\int\frac{dx}{\cos^{2n+1}x}=\int\frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin^{2n+1}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\int\frac{du}{\left(\sin u\right)^{2n+1}}=\int\frac{du}{\left(2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}\right)^{2n+1}}$$

$$=\int\frac{du}{2^{2n+1}\left(\tan\frac{u}{2}\right)^{2n+1}\left(\cos\frac{u}{2}\right)^{4n+2}}=\frac{1}{2^{2n}}\int\frac{\left(1+\tan^2\frac{u}{2}\right)^{2n}d\left(\tan\frac{u}{2}\right)}{\left(\tan\frac{u}{2}\right)^{2n+1}}$$

$$=\frac{1}{2^{2n}}\int\frac{C_{2n}^{0}+C_{2n}^{1}+C_{2n}^{1}\tan^{2}\frac{u}{2}+\ldots+C_{2n}^{n}\left(\tan^{2}\frac{u}{2}\right)^{n}+\ldots+C_{2n}^{2n}\left(\tan^{2}\frac{u}{2}\right)^{2n}}{\left(\tan\frac{u}{2}\right)^{2n+1}}d\left(\tan\frac{u}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2^{2n}}\left[\frac{-C_{2n}^{0}}{2n\left(\tan\frac{u}{2}\right)^{2n}}-\ldots-\frac{C_{2n}^{n-1}}{2\left(\tan\frac{u}{2}\right)^{2}}+C_{2n}^{n}\ln\left|\tan\frac{u}{2}\right|+\frac{C_{2n}^{n+1}}{2}\left(\tan\frac{u}{2}\right)^{2}+\ldots+\frac{C_{2n}^{2n}}{2n}\left(\tan\frac{u}{2}\right)^{2n}\right]+C$$

$$+\ I_{10}=\int\frac{dx}{\cos^{2n+2}x}=\int\left(1+\tan^{2}x\right)^{n}d\left(\tan x\right)$$

$$=\int\left(C_{11}^{0}+C_{n}^{1}\tan^{2}x+\ldots+C_{n}^{k}\left(\tan^{2}x\right)^{k}+\ldots+C_{n}^{n}\left(\tan^{2}x\right)^{n}\right)d\left(\tan x\right)$$

$$=\left[C_{n}^{0}\left(\tan x\right)+\frac{C_{n}^{1}}{3}\tan x^{3}+\ldots+\frac{C_{n}^{k}}{2k+1}\left(\tan x\right)^{2k+1}+\ldots+\frac{C_{n}^{n}}{2n+1}\left(\tan x\right)^{2n+1}\right]+C$$

Tóm lại: *Qua các bài toán với những lời giải kinh khủng ở trên chắc đã làm bạn đọc choáng rồi, tuy nhiên hãy để ý nó có mấu chốt cả nhé. Đầu tiên là 2 dạng này tương tự nhau nên mình sẽ chỉ nói một dạng. Các bạn hãy chú ý tới các bài số mũ chẵn, mấu chốt chỉ là sử dụng công thức theo tan và sin, còn những bài số mũ lẻ ta đều sử dụng cách tách* $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$*, đó chính là chìa khoá của các bài toán trên, lời giải khủng chẳng qua là biến đổi dài thôi chứ không có gì khó khăn cả!*

CÁC BÀI TOÁN BIẾN ĐỔI TỔNG HỢP

Câu 1.

Tính các tích phân sau

a) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan^4 x dx$ b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^6 x}{\sin^4 x} dx$ c) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$

d) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{4-\cos^2 x} dx$ e) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x} dx$

Lời giải

a) Ta có $\tan^4 x = \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} = \frac{\left(1-\cos^2 x\right)^2}{\cos^4 x} = \frac{1}{\cos^4 x} - 2\frac{1}{\cos^2 x} + 1$

Do đó $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan^4 x dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^4 x} - 2\frac{1}{\cos^2 x} + 1\right) dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(1+\tan^2 x\right)\frac{dx}{\cos^2 x} - \left[2\tan x + x\right]\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$

$$= \left(\tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} - \left(2\sqrt{3} - 2 + \frac{\pi}{12}\right) = \left(2\sqrt{3} - \frac{4}{3}\right) - \left(2\sqrt{3} - 2 + \frac{\pi}{12}\right) = \frac{2}{3} + \frac{\pi}{12}$$

Chú ý: Ta còn cách phân tích khác:

$\tan^4 x = \tan^2 x\left(\tan^2 x + 1 - 1\right) = \tan^2 x\left(1+\tan^2 x\right) - \tan^2 x = \tan^2 x\left(1+\tan^2 x\right) - \left(\tan^2 x + 1\right) + 1$

Vậy $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\tan^2 x\left(1+\tan^2 x\right) - \left(\tan^2 x + 1\right) + 1\right] dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 x.\frac{dx}{\cos^2 x} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} dx$

$$= \left(\frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \left(\frac{1}{3}3\sqrt{3} - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{3} + \frac{\pi}{12}$$

b) Ta có $\frac{\cos^6 x}{\sin^4 x} = \frac{\left(1-\sin^2 x\right)^3}{\sin^4 x} = \frac{1 - 3\sin^2 x + 3\sin^4 x - \sin^6 x}{\sin^4 x} = \frac{1}{\sin^4 x} - 3\frac{1}{\sin^2 x} + 3 - \sin^2 x$

$$\Rightarrow I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^6 x}{\sin^4 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\cot^2 x\right)\frac{dx}{\sin^2 x} - 3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x} + 3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) dx$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\cot^2 x\right) d\left(\cot x\right) + 3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\left(\cot x\right) + 3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos 2x\right) dx$$

TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC

$$=\left(-\cot x-\frac{1}{3}\cot^3 x+3\cot x+3x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left(-\frac{1}{3}\cot^3 x+2\cot x+\frac{5}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{5\pi}{8}+\frac{23}{12}.$$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^6 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^6 x}-\frac{1}{\cos^4 x}\right)dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^4 x}\frac{1}{\cos^2 x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+\tan^2 x\right)\frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+\tan^2 x\right)^2\frac{1}{\cos^2 x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+\tan^2 x\right)\frac{1}{\cos^2 x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+2\tan^2 x+\tan^4 x\right)d\left(\tan x\right)-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+\tan^2 x\right)d\left(\tan x\right)$$

$$=\left(\tan x+\frac{2}{3}\tan^3 x+\frac{1}{5}\tan^5 x-\tan x-\frac{1}{3}\tan^3 x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\left(\frac{1}{3}\tan^3 x+\frac{1}{5}\tan^5 x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{8}{15}.$$

d) Ta có $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{4-\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{4-\frac{1+\cos 2x}{2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin 2x}{7-\cos 2x}dx$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\left(7-\cos 2x\right)}{7-\cos 2x}=-\ln\left|7-\cos 2x\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\ln\frac{3}{4}$$

e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\left(1+\sin 2x\right)}{1+\sin 2x}=\frac{1}{2}\ln\left|1+\sin 2x\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\ln 2$.

Câu 2.

Tính các tích phân sau

a) $\displaystyle I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^{10} x+\cos^{10} x-\sin^4 x\cos^4 x\right)dx$

b) $\displaystyle I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}dx$

Lời giải

a) $\displaystyle I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^{10} x+\cos^{10} x-\sin^4 x\cos^4 x\right)dx$

Ta có: $\sin^{10} x+\cos^{10} x-\sin^4 x\cos^4 x\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=\left(\cos^4-\sin^4 x\right)\left(\cos^6 x-\sin^6 x\right)$

$$=\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\left(\cos^4 x+\sin^4 x+\cos^2 x\sin^2 x\right)$$

$$=\cos^2 2x\left(1-\frac{1}{4}\sin^2 2x\right)=\cos^2 2x-\frac{1}{16}\sin^2 4x=\frac{1+\cos 4x}{2}-\frac{1-\cos 8x}{32}=\frac{15}{32}+\frac{1}{2}\cos 4x+\frac{1}{32}\cos 8x$$

Vậy $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{15}{32}+\frac{1}{2}\cos 4x+\frac{1}{32}\cos 8x\right)dx=\frac{15}{32}\frac{\pi}{2}+\frac{1}{8}\sin 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{32.8}\sin 8x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{15\pi}{64}$.

b) $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}dx$

Ta có $\frac{1}{\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{\sin x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)}=\frac{2}{\sin^2 x\left(\sqrt{3}+\cot x\right)}$

Vậy $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{2}{\sqrt{3}+\cot x}\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{2d\left(\sqrt{3}+\cot x\right)}{\left(\sqrt{3}+\cot x\right)}=-2\ln\left|\sqrt{3}+\cot x\right|\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=2\ln\frac{3}{2}$

Lời giải

a) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x+\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(2\cos x+1)\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx$

Đặt $t=\sqrt{1+3\cos x}\Rightarrow\begin{cases}\cos x=\frac{t^2-1}{3}\Rightarrow\sin xdx=-\frac{2}{3}tdt\\ x=0\Rightarrow t=2;x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1\end{cases}$

Khi đó $I=\int_2^1\frac{\left(2\frac{t^2-1}{3}+1\right)}{t}\left(-\frac{2}{3}tdt\right)=2\int_1^2\frac{2t^2+1}{9}dt=\frac{2}{9}\left[\frac{1}{3}t^3+t\right]\Big|_1^2=\frac{34}{27}$

b) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x\cos x}{1+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cos^2 x}{1+\cos x}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\cos x+1}\sin xdx$

Đặt $t=1+\cos x\Rightarrow dt=-\sin xdx$ Đổi cận: $\begin{cases}x=0\to t=2\\ x=\frac{\pi}{2}\to t=1\end{cases}$

$$\Rightarrow I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\cos x+1}\sin xdx=2\int_2^1\frac{(t-1)^2}{t}dt=2\int_2^1\left(t-2+\frac{1}{t}\right)dt=2\left(\frac{1}{2}t^2-2t+\ln|t|\right)\Big|_1^2=2\ln 2-1.$$

c) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x+4\sin^2 x}}dx$. Đặt $t=\sqrt{\cos^2 x+4\sin^2 x}\Rightarrow t^2=\cos^2 x+4\sin^2 x$

Do đó $\begin{cases}2tdt=(-2\sin x\cos x+8\sin x\cos x)dx=3\sin 2xdx\Rightarrow\sin 2xdx=\frac{2}{3}tdt\\ x=0\Rightarrow t=1;x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=2\end{cases}$

Vậy $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x+4\sin^2 x}}dx=\frac{2}{3}\int_1^2\frac{tdt}{t}=\frac{2}{3}\int_1^2 dt=\frac{2}{3}t\Big|_1^2=\frac{2}{3}$.

d) Ta có

$$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x=\left(4\cos^2 x-3\right)\cos x=\left(4-4\sin^2 x-3\right)\cos x=\left(1-4\sin^2 x\right)\cos x$$

Cho nên $\frac{\cos 3x}{1+\sin x}dx=\frac{\left(1-4\sin^2 x\right)}{1+\sin x}\cos xdx$

Đặt $t=1+\sin x\Rightarrow dt=\cos xdx$. Đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=1\\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=2\end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\sin x+1}dx=\int_1^2\frac{\left[1-4\left(t-1\right)^2\right]}{t}dt=\int_1^2\left(8-4t-\frac{3}{t}\right)dt=\left(8t-2t^2-3\ln\left|t\right|\right)\Big|_1^2=2-3\ln 2.$$

Câu 3.

Tính các tích phân sau

a) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x+\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx$ b) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x\cos x}{1+\cos x}dx$

c) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x+4\sin^2 x}}dx$ d) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\sin x+1}dx$

Lời giải

a) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x}{\left(\sin x-\cos x+3\right)^3}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\left(\sin x-\cos x+3\right)^3}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\cos x-\sin x\right)}{\left(\sin x-\cos x+3\right)^3}\left(\cos x+\sin x\right)dx$.

Đặt $t=\sin x-\cos x+3\Rightarrow dt=\left(\cos x+\sin x\right)dx$. Đổi cận $\begin{cases}x=0\to t=2\\ x=\frac{\pi}{2}\to t=4\end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int_2^4\frac{3-t}{t^3}dt=\int_2^4\left(3\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t^2}\right)dt=\left(-\frac{3}{2t^2}+\frac{1}{t}\right)\Bigg|_2^4=\frac{1}{32}.$$

b) $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{1+2\sin 2x}dx$.

Đặt $t=1+2\sin 2x\Rightarrow dt=4\cos 2xdx\Rightarrow\cos 2xdx=\frac{1}{4}dt$. Đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=1\\ x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=3\end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{1+2\sin 2x}dx=\frac{1}{4}\int_1^3\frac{dt}{t}=\frac{1}{4}\ln\left|t\right|\Big|_1^3=\frac{1}{4}\ln 3.$$

c) $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin 3x-\sin^3 3x}{1+\cos 3x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin 3x\left(1-\sin^2 3x\right)}{1+\cos 3x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin 3x.\cos^2 3x}{1+\cos 3x}dx$

Đặt $t=1+\cos 3x\Rightarrow dt=-3\sin 3xdx\Rightarrow \sin 3xdx=-\frac{1}{3}dt$. Đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=2\\ x=\frac{\pi}{6}\Rightarrow t=1\end{cases}$ s

$$\Rightarrow I=-\frac{1}{3}\int_2^1\frac{(t-1)^2}{t}dt=\frac{1}{3}\int_1^2\left(t-2+\frac{1}{t}\right)dt=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}t^2-2t+\ln|t|\right)\Big|_1^2=-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\ln 2$$

Câu 4.

Tính các tích phân sau

a) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x}{(\sin x-\cos x+3)^3}dx$ b) $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{1+2\sin 2x}dx$ c) $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin 3x-\sin^3 3x}{1+\cos 3x}dx$

Lời giải

a) $J=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 5xdx-\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 9xdx=\frac{1}{10}\sin 5x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{18}\sin 9x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{45}$.

b) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin xdx}{\sin^2 x+2\cos x.\cos^2\frac{x}{2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin xdx}{\sin^2 x+\cos x.(1+\cos x)}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}dx=-\ln|1+\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\ln 2$

c) Ta có $\cos x\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)=\cos x\left[\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x\right]$

$$=\cos x\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)=\cos x\left[1-\frac{1}{4}(1-\cos 4x)\right]$$

$$=\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos x\cos 4x=\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{8}(\cos 5x+\cos 3x)$$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)dx=\frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx+\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 5xdx+\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 3xdx$$

$$=\frac{3}{4}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{40}\sin 5x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{24}\sin 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{4}+\frac{1}{40}-\frac{1}{24}=\frac{11}{15}.$$

d) $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{|\sin x+\cos x|}dx$ (1)

Vì $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right);\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{\pi}{2}\le x+\frac{\pi}{4}\le 3\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>0$

Mặt khác $d(\sin x+\cos x)=(\cos x-\sin x)dx$

Cho nên $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{d\left(\sin x+\cos x\right)}{\sin x+\cos x}=-\ln\left|\sin x+\cos x\right|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=-\left[\ln 1-\ln\sqrt{2}\right]=\frac{1}{2}\ln 2$.

CHƯƠNG 4

NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN HÀM VÔ TỶ

Nguyên hàm tích phân hàm vô tỷ - căn thức là các bài toán thường xuyên bắt gặp trong các đề thi. Các dạng toán này hầu hết đã được mọi người khai thác và đưa ra cách giải quyết hợp lý nhất, vì thế đây chỉ là một chương khá cơ bản, cần chúng ta phải học kĩ và làm nhiều bài tập để nắm chắc được nó. Sau đây ta sẽ đi vào các dạng toán cụ thể.

CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xét tích phân tổng quát $I=\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Phương pháp. Nhìn chung đây là dạng cơ bản nhất và phương pháp giải của nó cũng rất cơ bản. Ta có 2 trường hợp sau.

- $I=\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int \frac{dx}{\sqrt{(mx+n)^2+k}}=\frac{1}{m}\ln\left|(mx+n)+\sqrt{(mx+n)^2+k}\right|+C$
- $I=\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int \frac{dx}{\sqrt{p^2-(mx+n)^2}}=\frac{1}{m}\arcsin\frac{mx+n}{p}(p>0)$

Chứng minh.

- Đối với nguyên hàm đầu ta xét dạng khác $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+k}}=\ln\left|u+\sqrt{u^2+k}\right|+C$.

  Ta có $\left(\ln\left|u+\sqrt{u^2+k}\right|+c\right)'=\frac{\left(u+\sqrt{u^2+k}\right)'}{u+\sqrt{u^2+k}}=\frac{1+\frac{u}{\sqrt{u^2+k}}}{u+\sqrt{u^2+k}}=\frac{1}{\sqrt{u^2+k}}$
- Đối với nguyên hàm thứ 2, ta sẽ lượng giác hóa, các bạn có thể tham khảo ở phần sau!

Nhìn chung phần này không có khó khăn gì cả nên ta sẽ đi qua vài ví dụ cơ bản.

Câu 1.

Tìm nguyên hàm của các hàm số sau

a) $I=\int \frac{dx}{\sqrt{2\sqrt{2}x^2-6x+3}}$ b) $I=\int_{-\frac{1}{4}}^{0} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+x+3}}$

Lời giải

a) Ta có $I=\int\frac{dx}{\sqrt{2\sqrt{2}x^2-6x+3}}=\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{6}{2\sqrt{2}}x+\frac{3}{2\sqrt{2}}}}$

$$=\frac{1}{\sqrt[4]{8}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{3}{\sqrt{2}}x+\frac{3}{2\sqrt{2}}}}=\frac{1}{\sqrt[4]{8}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2+\frac{6\sqrt{2}-9}{8}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[4]{8}}\ln\left|x-\frac{3}{2\sqrt{2}}+\sqrt{\left(x-\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2+\frac{6\sqrt{2}-9}{8}}\right|+C$$

b) Ta có $I=\int_{-\frac{1}{4}}^{0}\frac{dx}{\sqrt{2x^2+x+3}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\frac{1}{4}}^{0}\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{23}{\sqrt{2}}}}\ln\left|\left(x+\frac{1}{4}\right)+\sqrt{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{23}{16}}\right|\Bigg|_{-\frac{1}{4}}^{0}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\ln\left(\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)-\ln\sqrt{\frac{23}{16}}\right]=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln\frac{1+2\sqrt{6}}{4}-\ln\frac{\sqrt{23}}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{1+2\sqrt{6}}{\sqrt{23}}$$

Dạng 2. Xét tích phân tổng quát $I=\int\frac{(mx+n)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Phương pháp. Ý tưởng của bài này là ta sẽ biến đổi để đưa nguyên hàm ban đầu về một nguyên hàm cơ bản và bài toán ở dạng 1. Ta biến đổi như sau:

$$I=\int\frac{(mx+n)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{m}{2a}\int\frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}-\frac{mb}{2a}\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{m}{2a}\int\frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}-\frac{mb}{2a}\cdot J$$

Trong đó nguyên hàm J ta đã tính được ở phần trước, còn lại chỉ là nguyên hàm cơ bản.

Nhìn chung phần này không có khó khăn gì so với dạng toán trước nên ta cũng sẽ chỉ xét vài ví dụ cơ bản.

Câu 2.

Tìm nguyên hàm của các hàm số sau

a) $I=\int_{-1}^{0}\frac{(x+2)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ b) $I=\int_{-2}^{0}\frac{(x-1)dx}{\sqrt{-x^2-4x+5}}$

Lời giải

a) Ta có $I=\int_{-1}^{0}\frac{(x+2)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\frac{(2x+2)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}+\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\frac{d\left(x^2+2x+2\right)}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

$$+\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}}=\left(\sqrt{x^2+2x+2}+\ln\left|(x+1)+\sqrt{x^2+2x+2}\right|\right)\Big|_{-1}^{0}=\sqrt{2}-1+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

b) Ta có $I=\int_{-2}^{0}\frac{(x-1)dx}{\sqrt{-x^2-4x+5}}=\int_{-2}^{0}\frac{(x+2)dx}{\sqrt{-x^2-4x+5}}-3\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2-4x+5}}=\frac{-1}{2}\int_{-2}^{0}\frac{d\left(-x^2-4x+5\right)}{\sqrt{-x^2-4x+5}}$

$$-3\int_{-2}^{0}\frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}}=\left(-\sqrt{-x^2-4x+5}-3\arcsin\frac{x+2}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{0}=3-\sqrt{5}-3\arcsin\frac{2}{3}$$

Dạng 3. Xét tích phân tổng quát $I=\int\frac{dx}{(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Phương pháp. Ý tưởng của bài này là ta sẽ làm mất phần $(px+q)$ bằng phương pháp đặt ẩn phụ để đưa về nguyên hàm số 1. Đặt $px+q=\frac{1}{t}\Rightarrow pdx=\frac{-dt}{t^2};x=\frac{1}{p}\left(\frac{1}{t}-q\right)$

$$\Rightarrow I=\int\frac{dx}{(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{-dt}{pt\sqrt{\frac{a}{p^2}\left(\frac{1}{t}-q\right)^2+\frac{b}{p}\left(\frac{1}{t}-q\right)+c}}=\pm\int\frac{dt}{\sqrt{\alpha t^2+\beta t+\gamma}}$$

Trong đó nguyên hàm sau cùng đã tính được ở phần trước! Tóm lại đây vẫn là dạng toán cơ bản.

Sau đây ta sẽ đi vào các ví dụ sau để hiểu rõ hơn về phương pháp trên.

Câu 3.

Tìm nguyên hàm của các hàm số sau

a) $I=\int_2^3\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x+2}}$

b) $I=\int_1^2\frac{dx}{(2x-1)\sqrt{3x^2+x+2}}$

Lời giải

a) Đặt $x-1=\frac{1}{t}\Rightarrow x=\frac{t+1}{t}\Rightarrow I_2=\int_2^3\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x+2}}=\int_1^{\frac{1}{2}}\frac{-dt}{t\sqrt{\left(\frac{t+1}{t}\right)^2-2\left(\frac{t+1}{t}\right)+2}}$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\ln\frac{2+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{5}}$$

b) Đặt $2x-1=\frac{1}{t}\Rightarrow x=\frac{t+1}{2t}\Rightarrow I=\int_1^2\frac{dx}{(2x-1)\sqrt{3x^2+x+2}}=\int_1^{\frac{1}{3}}\frac{\frac{-dt}{2t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{3(t+1)^2}{4t^2}+\frac{t+1}{2t}+2}}$

$$=\int_{\frac{1}{3}}^{1}\frac{dt}{\sqrt{13t^2+8t+3}}=\frac{1}{\sqrt{13}}\int_{\frac{1}{3}}^{1}\frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{8}{13}t+\frac{3}{13}}}=\frac{1}{\sqrt{13}}\int_{\frac{1}{3}}^{1}\frac{d\left(t+\frac{4}{13}\right)}{\sqrt{\left(t+\frac{4}{13}\right)^2+\frac{23}{169}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{13}}\left[\ln\left|\left(t+\frac{4}{13}\right)+\sqrt{\left(t+\frac{4}{13}\right)^2+\frac{23}{169}}\right|\right]\Bigg|_{\frac{1}{3}}^{1}=\frac{1}{\sqrt{13}}\left(\ln\left|\frac{17}{13}+\sqrt{\frac{24}{13}}\right|-\ln\left|\frac{25}{39}+\sqrt{\frac{64}{117}}\right|\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{13}}\left(\ln\frac{17+2\sqrt{78}}{13}-\ln\frac{25+8\sqrt{13}}{39}\right)=\frac{1}{\sqrt{13}}\ln\frac{51+6\sqrt{78}}{25+8\sqrt{13}}$$

Dạng 4. Xét nguyên hàm tổng quát $I=\int\frac{(mx+n)dx}{(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Phương pháp. Nhìn sơ qua hơi na ná với các dạng trên kia nhưng tuy nhiên cái vướng ở đây là trên tử có xuất hiện thêm một đại lượng. Giờ nếu bạn nào tinh ý thì sẽ phát hiện ra ngay cách xử lý dạng này, đó là đưa về dạng toán 1 và 2, ta cùng biến đổi thử nhé!

$$I=\int\frac{(mx+n)dx}{(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{\frac{m}{p}(px+q)+\left(n-\frac{mq}{p}\right)}{(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

$$\Rightarrow I=\frac{m}{p}\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+\left(n-\frac{mq}{p}\right)\int\frac{dx}{(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Rồi đó, đến kia thì có vẻ quá đơn giản rồi phải không, chỉ là những bài toán nguyên hàm đã biết!

Ở phần này ta chỉ cần 1 ví dụ thôi nha, vì nó cũng na ná nhau!

Câu 4.

Tìm nguyên hàm của hàm số sau $K=\int_{-1}^{0}\frac{(2x-1)dx}{(x-1)\sqrt{x^2+3x+3}}$

Lời giải

Ta có $I=\int_{-1}^{0}\frac{(2x-1)dx}{(x-1)\sqrt{x^2+3x+3}}=\int_{-1}^{0}\frac{2(x-1)+1}{(x-1)\sqrt{x^2+3x+3}}dx$

$$=2\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+3}}+\int_{-1}^{0}\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+3x+3}}=2I+J$$

- Tính tích phân $I=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+3}}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}=\ln\left|\left(x+\frac{3}{2}\right)+\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right|\Bigg|_{-1}^{0}$

$$=\ln\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)-\ln\left(\frac{1}{2}+1\right)=\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{2}-\ln\frac{3}{2}=\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$$

- Tính tích phân $J=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+3x+3}}$, đặt $x-1=\frac{1}{t}\Rightarrow x=\frac{t+1}{t}$

$$\Rightarrow J=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+3x+3}}=\int_{-\frac{1}{2}}^{-1}\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{t+1}{t}\right)^2+3\left(\frac{t+1}{t}\right)+3}}$$

$$=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\frac{dt}{\sqrt{7t^2+5t+1}}=\frac{1}{\sqrt{7}}\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{5}{7}t+\frac{1}{7}}}=\frac{1}{\sqrt{7}}\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\frac{dt}{\sqrt{\left(t+\frac{5}{14}\right)^2+\frac{3}{196}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{7}}\ln\left|\left(t+\frac{5}{14}\right)+\sqrt{\left(t+\frac{5}{14}\right)^2+\frac{3}{196}}\right|\Bigg|_{-1}^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{7}}\ln\frac{\sqrt{7}-2}{2\sqrt{21}-9}$$

$$\Rightarrow K=21+J=2\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{\sqrt{7}}\ln\frac{\sqrt{7}-2}{2\sqrt{21}-9}$$

Dạng 5. Xét nguyên hàm tổng quát $I=\int\frac{xdx}{\left(ax^2+b\right)\sqrt{cx^2+d}}$

Phương pháp. Lại một dạng toán khá là cơ bản nữa, sự đơn giản ở đây là trên tử chỉ xuất hiện mỗi biểu thức x và dưới mẫu chỉ là dạng cx^2+d, vậy ta sẽ đặt căn bằng ẩn phụ mới để đưa về nguyên hàm không chứa căn.

Đặt $t=\sqrt{cx^2+d}\Rightarrow t^2=cx^2+d\Rightarrow x^2=\frac{t^2-d}{c}\Rightarrow xdx=\frac{tdt}{c}$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{c}\int\frac{tdt}{\left(\frac{a\left(t^2-d\right)}{c}+b\right)t}=\frac{1}{c^2}\int\frac{dt}{at^2+\left(bc-ad\right)}$$

Rồi nguyên hàm cuối chỉ là nguyên hàm phân thức hữu tỷ cơ bản mà ta đã có cách giải ở dạng trước!

Nhìn chung vẫn là dạng dễ nhỉ? Ta cùng đi qua một bài tập đơn giản để làm quen với nó

Câu 5.

Tìm nguyên hàm của hàm số sau $I=\int_0^1\frac{xdx}{\left(3x^2-5\right)\sqrt{2-x^2}}$

Lời giải

Đặt $t=\sqrt{2-x^2}\Rightarrow\begin{cases}x=0\Rightarrow t=\sqrt{2}\\x=1\Rightarrow t=1\\xdx=-tdt\end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int_{\sqrt{2}}^{1}\frac{-tdt}{\left(1-3t^2\right)t}=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{dt}{1-3t^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_1^{\sqrt{2}}\frac{d\left(t\sqrt{3}\right)}{1-\left(t\sqrt{3}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{1+t\sqrt{3}}{1-t\sqrt{3}}\right|\Bigg|_1^{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\ln\frac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{6}-1}-\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{\left(7+2\sqrt{6}\right)\left(4-2\sqrt{3}\right)}{10}$$

Sau đây ta sẽ chính thức dấn thân vào các dạng toán khó hơn nhé ☺

Dạng 6. Xét nguyên hàm tổng quát $I=\int \frac{dx}{(ax^2+b)\sqrt{cx^2+d}}$

Phương pháp. Dạng toán này đã khó hơn các dạng toán trước rất nhiều, và sau đây mình sẽ giới thiệu phương pháp giải dạng này cho các bạn.

Đặt $xt=\sqrt{cx^2+d} \Rightarrow x^2=\frac{d}{t^2-c} \Rightarrow xdx=\frac{-td.dt}{(t^2-c)^2} \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{cx^2+d}}=\frac{xdx}{x(xt)}=\frac{-\frac{td.dt}{(t^2-c)^2}}{td(t^2-c)}=\frac{-dt}{t^2-c}$

$$\Rightarrow I=\int \frac{dx}{(ax^2+b)\sqrt{cx^2+d}}=\int \frac{-dt}{\left(\frac{ad}{t^2-c}+b\right)(t^2-c)}=\int \frac{-dt}{bt^2+ad-bc}$$

Rồi nguyên hàm cuối chỉ là nguyên hàm phân thức hữu tỷ cơ bản mà ta đã có cách giải ở dạng trước!

Sau đây ta sẽ lướt qua vài bài toán để các bạn hiểu rõ hơn nhé!

Câu 6.

Tìm nguyên hàm của các hàm số sau

a) $I=\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}dx$ b) $I=\int_1^2 \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$ c) $I=\int_2^3 \frac{(4x+3)dx}{(x^2-2x-4)\sqrt{3x^2-6x+5}}$

Lời giải

a) Trước hết ý tưởng là ta sẽ đưa về dạng tổng quát và phải tách nguyên hàm ban đầu thành 2 nguyên hàm khác dễ tính hơn.

Ta có $I=\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}dx=\int_1^2 \frac{x^2+2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}dx=\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}+\int_1^2 \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$

Xét tích phân đầu tiên $I_1=\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+2}\right|\Big|_1^2=\ln(2+\sqrt{6})-\ln(1+\sqrt{3})=\ln\frac{2+\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}}$

Xét tích phân thứ hai $I_2=\int_1^2 \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$

Đặt $xt=\sqrt{x^2+2} \Rightarrow \begin{cases} t=\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{x} \\ x^2t^2=x^2+2 \Rightarrow (t^2-1)x^2=2 \Rightarrow x^2=\dfrac{2}{t^2-1} \Rightarrow xdx=\dfrac{-2tdt}{(t^2-1)^2} \end{cases}$

Ta có $\frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}=\frac{xdx}{x(xt)}=\frac{-\frac{2tdt}{(t^2-1)^2}}{\frac{2t}{t^2-1}}=-\frac{dt}{t^2-1}$

$$\Rightarrow I_2=\int_1^2\frac{dx}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+2}}=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{6}}\frac{-\frac{dt}{t^2-1}}{\frac{2}{t^2-1}-2}=\int_{\frac{\sqrt{6}}{2}}^{\sqrt{3}}\frac{dt}{2\left(t^2-2\right)}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|\Bigg|_{\sqrt{6}/2}^{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\ln\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\ln\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}\right)=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\left(5-2\sqrt{6}\right)\left(7+4\sqrt{3}\right)\right)$$

Vậy $I=\ln\frac{2+\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\left(5-2\sqrt{6}\right)\left(7+4\sqrt{3}\right)\right)$

Một bài giải khá khủng phải không nào ☺, ta làm bài tiếp theo nhé!

b) Ta có $I=\int_1^2\frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)\sqrt{x^2+x-1}}=\int_1^2\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}}$

$$=\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}\frac{du}{\left(u^2+\frac{3}{4}\right)\sqrt{u^2-\frac{5}{4}}}=8\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}\frac{du}{\left(4u^2+3\right)\sqrt{4u^2-5}}$$

Đặt $ut=\sqrt{4u^2-5}\Rightarrow\begin{cases}t=\frac{\sqrt{4u^2-5}}{u}\\u^2t^2=4u^2-5\Rightarrow\left(4-t^2\right)u^2=5\Rightarrow u^2=\frac{5}{4-t^2}\Rightarrow 2udu=\frac{10tdt}{\left(4-t^2\right)^2}\end{cases}$

Ta có $\frac{du}{\sqrt{4u^2-5}}=\frac{udu}{u\sqrt{4u^2-5}}=\frac{\frac{5tdt}{\left(4-t^2\right)^2}}{\frac{5t}{4-t^2}}=\frac{dt}{4-t^2}$

$$\Rightarrow I=\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{4}{\sqrt{5}}}\frac{dt\left(4-t^2\right)}{\left(32-3t^2\right)\left(4-t^2\right)}=\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{4}{\sqrt{5}}}\frac{dt}{32-3t^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{4}{\sqrt{5}}}\frac{d\left(t\sqrt{3}\right)}{\left(4\sqrt{2}\right)^2-\left(t\sqrt{3}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{8\sqrt{6}}\ln\left|\frac{4\sqrt{2}+t\sqrt{3}}{4\sqrt{2}-t\sqrt{3}}\right|\Bigg|_{\frac{4}{3}}^{\frac{4}{\sqrt{5}}}=\frac{1}{8\sqrt{6}}\left(\ln\frac{\sqrt{10}+\sqrt{3}}{\sqrt{10}-\sqrt{3}}-\ln\frac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{6}-1}\right)=\frac{1}{8\sqrt{6}}\ln\frac{\left(\sqrt{10}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{6}-1\right)}{\left(\sqrt{10}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{6}+1\right)}$$

Vậy là qua 6 dạng thì hy vọng các bạn có thể rút ra được những kinh nghiệm làm bài cho mình, sau đây mình sẽ chốt lại 6 dạng này bằng bài toán tổng hợp sau.

c) Ta có $I=\int_2^3\frac{(4x+3)dx}{\left(x^2-2x-4\right)\sqrt{3x^2-6x+5}}=\int_2^3\frac{\left[4\left(x-1\right)+7\right]dx}{\left[\left(x-1\right)^2-5\right]\sqrt{3\left(x-1\right)^2+2}}$

$$=\int_1^2\frac{(4u+7)du}{\left(u^2-5\right)\sqrt{3u^2+2}}=4\int_1^2\frac{udu}{\left(u^2-5\right)\sqrt{3u^2+2}}+7\int_1^2\frac{du}{\left(u^2-5\right)\sqrt{3u^2+2}}=4J-7K$$

Xét tích phân $J=\int_1^2\frac{udu}{\left(u^2-5\right)\sqrt{3u^2+2}}$, đặt $t=\sqrt{3u^2+2}\Rightarrow u^2=\frac{t^2-2}{3}\Rightarrow udu=\frac{tdt}{3}$

$$\Rightarrow J=\int_1^2 \frac{udu}{\left(u^2-5\right)\sqrt{3u^2+2}}=\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{14}} \frac{tdt}{\left(t^2-17\right)t}=\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{14}} \frac{dt}{t^2-17}=\frac{1}{2\sqrt{17}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{17}}{t+\sqrt{17}}\right|\Bigg|_{\sqrt{5}}^{\sqrt{14}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{17}}\left(\ln\frac{\sqrt{17}-\sqrt{14}}{\sqrt{17}+\sqrt{14}}-\ln\frac{\sqrt{17}-\sqrt{5}}{\sqrt{17}+\sqrt{5}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{17}}\ln\frac{\left(\sqrt{17}-\sqrt{17}\right)\left(\sqrt{17}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{17}+\sqrt{17}\right)\left(\sqrt{17}-\sqrt{5}\right)}$$

Xét tích phân $K=\int_1^2 \frac{du}{\left(u^2-5\right)\sqrt{3u^2+2}}$, đặt $ut=\sqrt{3u^2+2}\Rightarrow u^2t^2=3u^2+2\Rightarrow u^2=\frac{2}{t^2-3}$

$$\Rightarrow udu=\frac{-2tdt}{\left(t^2-3\right)^2}\Rightarrow \frac{du}{\sqrt{3u^2+2}}=\frac{udu}{u(ut)}=\frac{-\frac{2tdt}{\left(t^2-3\right)^2}}{\frac{2t}{t^2-3}}=\frac{dt}{t^2-3}$$

$$\Rightarrow K=\int_1^2 \frac{du}{\left(u^2-5\right)\sqrt{3u^2+2}}=\int_2^{\frac{\sqrt{14}}{2}} \frac{dt}{\left(\frac{2}{t^2-3}-5\right)\left(t^2-3\right)}=\int_2^{\frac{\sqrt{14}}{2}} \frac{dt}{17-5t^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\int_2^{\frac{\sqrt{14}}{2}} \frac{d\left(t\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{17}\right)^2-\left(t\sqrt{5}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{17}}\ln\left|\frac{\sqrt{17}+t\sqrt{5}}{\sqrt{17}-t\sqrt{5}}\right|\Bigg|_2^{\frac{\sqrt{14}}{2}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{85}}\left(\ln\frac{\sqrt{70}+2\sqrt{17}}{\sqrt{70}-2\sqrt{17}}-\ln\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{17}}{2\sqrt{5}-\sqrt{17}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{85}}\frac{\left(\sqrt{70}+2\sqrt{17}\right)\left(2\sqrt{5}-\sqrt{17}\right)}{\left(\sqrt{70}-2\sqrt{17}\right)\left(2\sqrt{5}+\sqrt{17}\right)}$$

$$\Rightarrow I=4J-7K=\frac{A}{2\sqrt{17}}\ln\frac{\left(\sqrt{17}-\sqrt{17}\right)\left(\sqrt{17}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{17}+\sqrt{17}\right)\left(\sqrt{17}-\sqrt{5}\right)}-\frac{7}{2\sqrt{85}}\ln\frac{\left(\sqrt{70}+2\sqrt{17}\right)\left(2\sqrt{5}-\sqrt{17}\right)}{\left(\sqrt{70}-2\sqrt{17}\right)\left(2\sqrt{5}+\sqrt{17}\right)}$$

Dạng 7. Xét nguyên hàm tổng quát $I=\int \frac{Q_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $\deg Q_n(x)\ge 2$

Phương pháp. Để giải quyết dạng toán này ta sẽ sử dụng phương pháp đồng nhất hệ số, cụ thể ta sẽ giả sử

$$I=\int \frac{Q_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=P_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+k\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},(\deg P=n-1)$$

- Bước tiếp theo lấy đạo hàm 2 vế ta có

$$\frac{Q_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=P'(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\frac{P_{n-1}(x)(2ax+b)}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}+\frac{k}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\forall x$$

- Bước cuối là đồng nhất hệ số để tìm các hệ số của đa thức $P(x)$

Sau đây ta sẽ lướt qua bài toán sau để các bạn hiểu rõ hơn nhé!

Câu 7.

Tìm nguyên hàm của hàm số sau $I=\int \frac{3x^3-4x^2-2x+4}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx$

Lời giải

Giả sử $I=\int \frac{3x^3-4x^2-2x+4}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx=\left(ax^2+bx+c\right)\sqrt{x^2-4x+5}+k\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}},\forall x$

Lấy đạo hàm 2 vế ta có

$$\frac{3x^3-4x^2-2x+4}{\sqrt{x^2-4x+5}}=(2ax+b)\sqrt{x^2-4x+5}+\frac{\left(ax^2+bx+c\right)(x-2)}{\sqrt{x^2-4x+5}}+\frac{k}{\sqrt{x^2-4x+5}}$$

$$\Leftrightarrow 3x^3-4x^2-2x+4=(2ax+b)\left(x^2-4x+5\right)+\left(ax^2+bx+c\right)(x-2)+k$$

$$\Leftrightarrow 3x^3-4x^2-2x+4=3ax^3+(2b-10a)x^2+(10a-6b+c)x+(5b-2c+k)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3a=3\\2b-10a=-4\\10a-6b+c=-2\\5b-2c+k=4\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\b=3\\c=6\\k=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\int \frac{3x^3-4x^2-2x+4}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx=\left(x^2+3x+6\right)\sqrt{x^2-4x+5}+\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$$

$$=\left(x^2+3x+6\right)\sqrt{x^2-4x+5}+\int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2+1}}$$

$$=\left(x^2+3x+6\right)\sqrt{x^2-4x+5}+\ln\left|(x-2)+\sqrt{(x-2)^2+1}\right|+C$$

Dạng 8. Phương pháp thế Euler

Phương pháp. Ý tưởng của phương pháp này là ta sẽ khử đại lượng $\sqrt{ax^2+bx+c}$ cụ thể qua 3 phép đặt sau:

- Khi $a>0$ ta đặt $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x+t$

  Bình phương 2 vế ta có $ax^2+bx+c=ax^2\pm 2\sqrt{a}xt+t^2$, giả sử trong trường hợp dấu "–" trước $\sqrt{a}$ ta được $x=\frac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}t}$

$$\Rightarrow \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{t^2\sqrt{a}+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b} \text{ và } dx=2\frac{t^2\sqrt{a}+bt+c\sqrt{a}}{\left(2\sqrt{a}t+b\right)^2}dt$$

- Khi $c>0$ ta đặt $\sqrt{ax^2+bx+c}=tx\pm\sqrt{c}$

  Bình phương 2 vế và rút gọn và làm tương tự như trường hợp đầu tiên ta sẽ giải quyết được bài toán.

- Khi $ax_0^2+bx_0+c=0$ ta đặt $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\left(x-x_0\right)$

  Bình phương 2 vế và làm tương tự như trường hợp đầu tiên ta sẽ giải quyết được bài toán. Chú ý phương pháp này áp dụng cho các bài mà $ax^2+bx+c=a\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)$

Ý tưởng chỉ đơn giản như thế, sau đây ta sẽ tìm hiểu qua các bài toán cụ thể

Câu 8.

Tìm nguyên hàm của các hàm số sau

a) $\int x^2\sqrt{x^2+4}dx$ b) $I=\int_0^1\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$ c) $I=\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{1+\sqrt{1+2x-x^2}}$

d) $I=\int_{\frac{3}{2}}^{2}\frac{(2-x)dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+4x-3}}$ e) $I=\int_0^1\frac{dx}{1+\sqrt{x^2-4x+3}}$ f) $I=\int_3^4\frac{x+\sqrt{x^2-x-2}}{x-\sqrt{x^2-x-2}}dx$

Lời giải

a) Đặt $\sqrt{x^2+4}=x-t\Leftrightarrow x^2+4=x^2-2xt+t^2\Leftrightarrow x=\frac{t^2-4}{2t}\Rightarrow\begin{cases}dx=\frac{t^2+4}{2t^2}dt\\ \sqrt{x^2+4}=\frac{t^2-4}{2t}-t=-\frac{t^2+4}{2t}\end{cases}$

$$\Rightarrow I=-\int\left(\frac{t^2-4}{2t}\right)^2\frac{t^2+4}{2t^2}\frac{t^2+4}{2t}dt=-\int\frac{\left(t^4-16\right)^2}{16t^5}dt$$

Đến đây là nguyên hàm của hàm phân thức cơ bản rồi, mời các bạn cùng chiến.

Ngoài ra mình cũng muốn giới thiệu cho các bạn một phương pháp nữa rất hay được mình sưu tầm từ thầy ***Nguyễn Đăng Ái.***

Đặt $x=2\cdot\frac{e^t-e^{-t}}{2}=e^t-e^{-t}\Rightarrow dx=\left(e^t+e^{-t}\right)dt$

Ta có $\sqrt{x^2+4}=\sqrt{\left(e^t-e^{-t}\right)^2+4}=\sqrt{e^{2t}-2+e^{-2t}+4}=\sqrt{e^{2t}+2+e^{-2t}}=\sqrt{\left(e^t+e^{-t}\right)^2}=e^t+e^{-t}$

$$\Rightarrow I=\int_0^2 x^2\sqrt{x^2+4}dx=\int_0^{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}\left(e^t-e^{-t}\right)^2\cdot\left(e^t+e^{-t}\right)\cdot\left(e^t+e^{-t}\right)dt=\int_0^{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}\left(e^{2t}-e^{-2t}\right)^2dt$$

$$=\int_0^{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}\left(e^{4t}-2+e^{-tt}\right)dt=\left(\frac{1}{4}e^{4t}-2t-\frac{1}{4}e^{-4t}\right)\Bigg|_0^{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}=6\sqrt{2}-2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

b) Đặt $\sqrt{x^2+x+1}=-x+t\Rightarrow x^2+x+1=(-x+t)^2=x^2-2xt+t^2$

$$\Rightarrow x(2t+1)=t^2-1\Rightarrow x=\frac{t^2-1}{2t+1}\Rightarrow dx=\frac{2\left(t^2+t+1\right)}{(2t+1)^2}dt$$

$$\Rightarrow I=\int_0^1\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=\int_1^{1+\sqrt{3}}\frac{2\left(t^2+t+1\right)dt}{t(2t+1)^2}=\int_1^{1+\sqrt{3}}\left[\frac{2}{t}-\frac{3}{2t+1}-\frac{3}{(2t+1)^2}\right]dt$$

$$=\left(2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|2t+1|+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2t+1}\right)\Bigg|_1^{1+\sqrt{3}}=2\ln\left(1+\sqrt{3}\right)-\frac{3}{2}\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)+\left(\sqrt{3}-2\right)$$

c) Ta thấy $c=1>0$, đặt $\sqrt{1-2x-x^2}=tx-1\Rightarrow 1-2x-x^2=(tx-1)^2$

$$\Rightarrow 2x+x^2=2xt-x^2t^2\Rightarrow x\left(t^2+1\right)=2t-2\Rightarrow x=\frac{2t-2}{t^2+1}\Rightarrow dx=\frac{-2t^2+4t+2}{\left(t^2+1\right)^2}dt$$

$$\Rightarrow I=\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}=2\int_{-1}^{-1-\sqrt{2}}\frac{\left(-t^2+2t+1\right)dt}{\left[1+\left(\frac{2t-2}{t^2+1}.t-1\right)\right]\left(t^2+1\right)^2}=\int_{-1}^{-1-\sqrt{2}}\frac{\left(-t^2+2t+1\right)dt}{t\left(t-1\right)\left(t^2+1\right)}$$

$$=\int_{-1}^{-1-\sqrt{2}}\left[-\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}-\frac{2}{t^2+1}\right]dt==\left(\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|-2\arctan t\right)\Bigg|_{-1}^{-1-\sqrt{2}}=2\arctan\left(1+\sqrt{2}\right)-\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\ln 2$$

d) Ta nhận thấy rằng $-x^2+4x-3=\left(x-3\right)\left(1-x\right)$, đặt $\sqrt{-x^2+4x-3}=\left(1-x\right)t$

$$\Rightarrow -x^2+4x-3=\left(1-x\right)^2t^2\Rightarrow x-3=t^2\left(1-x\right)$$

$$\Rightarrow x\left(1+t^2\right)=t^2+3\Rightarrow x=\frac{t^2+3}{t^2+1}\Rightarrow dx=\frac{-4tdt}{\left(t^2+1\right)^2}$$

$$\Rightarrow I=\int_{\frac{3}{2}}^{2}\frac{\left(2-x\right)dx}{\left(x-1\right)\sqrt{-x^2+4x-3}}=\int_{-\sqrt{3}}^{-1}\frac{t^2-1}{\frac{4t}{t^2+1}}\cdot\frac{-4tdt}{\left(t^2+1\right)^2}=\int_{-\sqrt{3}}^{-1}\frac{t^2-1}{t^2+1}dt$$

$$=\int_{-\sqrt{3}}^{-1}\left(1-\frac{2}{t^2+1}\right)dt=\left(t-2\arctan t\right)\Big|_{-\sqrt{3}}^{-1}=\left(-1+2\arctan 1\right)-\left(-\sqrt{3}+2\arctan\sqrt{3}\right)$$

$$=\sqrt{3}-1+2\left(\arctan 1-\arctan\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}-1+2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{6}$$

e) Tương tự bài ở trên ta thấy $x^2-4x+3=\left(x-1\right)\left(x-3\right)$, đặt $\sqrt{x^2-4x+3}=t\left(x-1\right)$

$$\Rightarrow x^2-4x+3=t^2\left(x-1\right)^2\Rightarrow x-3=t^2\left(x-1\right)\Rightarrow x\left(1-t^2\right)=3-t^2\Rightarrow x=\frac{3-t^2}{1-t^2}$$

$$\Rightarrow dx=\frac{4tdt}{\left(t^2-1\right)^2}\Rightarrow I=\int_0^{12}\frac{dx}{1+\sqrt{x^2-4x+3}}=\int_{-\sqrt{3}}^{-\sqrt{5}}\frac{4tdt}{\left(t^2-1\right)\left[1+t\left(\frac{3-t^2}{1-t^2}-1\right)\right]}$$

$$=\int_{-\sqrt{3}}^{-\sqrt{3}}\frac{4tdt}{t^2-2t-1}=\int_{-\sqrt{3}}^{-\sqrt{5}}\frac{\left[\left(4t-4\right)+4\right]dt}{t^2-2t-1}=2\int_{-\sqrt{3}}^{-\sqrt{5}}\frac{\left(2t-2\right)dt}{t^2-2t-1}+4\int_{-\sqrt{3}}^{-\sqrt{5}}\frac{dt}{t^2-2t-1}$$

$$=2\int_{-\sqrt{3}}^{-\sqrt{3}}\frac{d\left(t^2-2t-1\right)}{t^2-2t-1}+4\int_{-\sqrt{3}}^{-\sqrt{5}}\frac{dt}{\left(t-1\right)^2-2}=2\ln\left|t^2-2t-1\right|+\sqrt{2}\ln\left|\frac{t-1-\sqrt{2}}{t-1+\sqrt{2}}\right|\Bigg|_{-\sqrt{3}}^{-\sqrt{5}}$$

$$=2\ln\frac{4+2\sqrt{5}}{2+2\sqrt{3}}+\sqrt{2}\ln\frac{\left(1+\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(1+\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}$$

f) Đặt $\sqrt{x^2-x-2}=t\left(x+1\right)\Rightarrow x^2-x-2=t^2\left(x+1\right)^2\Rightarrow x=\dfrac{t^2+2}{1-t^2}\Rightarrow dx=\dfrac{6tdt}{\left(1-t^2\right)^2}$

$$\Rightarrow I=\int_3^4\frac{x+\sqrt{x^2-x-2}}{x-\sqrt{x^2-x-2}}dx=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{10}}{5}}\frac{t^2+3t+2}{t^2-3t+2}\cdot\frac{6tdt}{\left(1-t^2\right)^2}=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{10}}{5}}\frac{\left(6t^2+18t\right)dt}{\left(t-1\right)^3\left(t-2\right)\left(t+1\right)}$$

$$=20\ln\frac{10-\sqrt{10}}{5}-\frac{1}{2}\ln\frac{5+\sqrt{10}}{5}-\frac{39}{2}\ln\frac{15-3\sqrt{10}}{5}+\frac{19-\sqrt{10}}{3}$$

Sau đây ta sẽ chuyển sang các dạng tích phân tổng quát hơn trong việc giải các bài toán vô tỷ, có thể kể tới đó là tích phân *Chebyshev*, sau đây ta sẽ cùng bắt đầu với nó!

Dạng 9. Tích phân *Chebyshev* có dạng $I=\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ với m,n,p là các số hữu tỷ.

Tích phân trên gọi là tích phân *Chebyshev*, ông đã đưa ra điều kiện để nguyên hàm trên tính được. Cụ thể nó tính được bằng các phép toán đặt và phép toán thông thường nếu nó rơi vào 1 trong những trường hợp sau.

- Nếu $p\in Z$ gọi k là mẫu số chung nhỏ nhất của các phân số tối giản được biểu diễn bởi m và n
- Nếu $\frac{m+1}{n}\in Z$ thì ta gọi S là mẫu số của p và đặt $a+bx^n=t$

$$\Rightarrow x=\left(\frac{t-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}\Rightarrow dx=\frac{1}{n}\left(\frac{t-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}dt\Rightarrow F(m,n,p)=\frac{1}{n}b^{-\frac{m+1}{n}}\int t^p\left(t-a\right)^{\frac{m+1}{n}-1}dt$$

- Nếu $\frac{m+1}{n}+p\in Z$ thì ta gọi S là mẫu số của p và đặt $\frac{a+bx^n}{x^n}=t^s$

$$\Rightarrow\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx=\int x^{m+np}\left(ax^{-n}+b\right)^p dx$$

Ta có $\frac{m+np+1}{-n}=-\left(\frac{m+1}{n}+p\right)\in Z$

Đến đây ta quay về trường hợp ban đầu.

Sau đây ta sẽ cùng tìm hiểu một số ví dụ ở phần này nhé!

Câu 9.

Tìm nguyên hàm của các hàm số sau

a) $I=\int\frac{\sqrt[4]{x}dx}{1+\sqrt[4]{x^3}}$ b) $K=\int\frac{\sqrt{x}dx}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}$ c) $I=\int\frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$

d) $I=\int\frac{dx}{x^3\sqrt[3]{2-x^3}}$ e) $I=\int\sqrt[3]{3x-x^3}dx$ f) $I=\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$

Lời giải

a) Ta có $I=\int\frac{\sqrt[4]{x}dx}{1+\sqrt[4]{x^3}}=\int x^{\frac{1}{4}}\left(1+x^{\frac{3}{4}}\right)^{-1}dx\Rightarrow m=\frac{-1}{4};n=\frac{3}{4};p=-1\in Z\Rightarrow k=4$

Đặt $t=\sqrt[4]{x}\Rightarrow x=t^4\Rightarrow dx=4t^3dt\Rightarrow I=\int\frac{\sqrt[4]{x}dx}{1+\sqrt[4]{x^3}}=\int\frac{4t^4dt}{1+t^3}=\int\left(4t-\frac{4t}{1+t^3}\right)dt$

$$=2t^2-2\int\frac{(t+1)+(t-1)}{(t+1)\left(t^2-t+1\right)}dt=2t^2-2\int\frac{dt}{t^2-t+1}-2\int\frac{t^2-\left(t^2-t+1\right)}{(t+1)\left(t^2-t+1\right)}dt$$

$$=2t^2-2\int\frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}-2\int\frac{t^2dt}{t^3+1}+2\int\frac{dt}{t+1}$$

$$=2\sqrt{x}-\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt{3}}-\frac{2}{3}\ln\left|1+\sqrt[4]{x^3}\right|+2\ln\left|1+\sqrt[4]{x}\right|+C$$

b) Ta có $K=\int\frac{\sqrt{x}dx}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}=\int x^{\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-2}dx\Rightarrow m=\frac{1}{2};n=\frac{1}{3};p=-2\in Z\Rightarrow k=6$

Đặt $t=\sqrt[6]{x}\Rightarrow x=t^6\Rightarrow dx=6t^5dt$ khi đó $K=\int\frac{t^3\left(6t^5\right)dt}{\left(1+t^2\right)^2}=\int\frac{6t^8dt}{\left(1+t^2\right)^2}$

$$=6\int\left[t^4-2t^2+3-\frac{4t^2+3}{\left(t^2+1\right)^2}\right]dt=6\int\left(t^4-2t^2+3-\frac{4}{t^2+1}\right)dt+6\int\frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2}$$

$$=6\left(\frac{t^5}{5}-\frac{2t^3}{3}+3t-4\arctan t\right)+6J\text{, đặt } I=\int\frac{dt}{t^2+1};J=\int\frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2}$$

Xét nguyên hàm $I=\int\frac{1}{t^2+1}dt=\frac{t}{t^2+1}-\int td\left(\frac{1}{t^2+1}\right)=\frac{t}{t^2+1}+2\int\frac{t^2dt}{\left(t^2+1\right)^2}$

$$=\frac{t}{t^2+1}+2\int\frac{\left(t^2+1\right)-1}{\left(t^2+1\right)^2}dt=\frac{t}{t^2+1}+2\int\frac{dt}{t^2+1}-2\int\frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2}=\frac{t}{t^2+1}+2I-2J$$

$$\Rightarrow 2J=\frac{t}{t^2+1}+1\Rightarrow J=\frac{t}{2\left(t^2+1\right)}+\frac{1}{2}\arctan t+C$$

$$\Rightarrow K=6\left(\frac{t^5}{5}-\frac{2t^3}{3}+3t-4\arctan t\right)+6\left(\frac{t}{2\left(t^2+1\right)}+\frac{1}{2}\arctan t\right)+C$$

$$=\frac{3}{\sqrt[4]{x}+1}-21\arctan\sqrt[8]{x}+\frac{6\sqrt[8]{x^5}-20\sqrt[8]{x^3}+90\sqrt[8]{x}}{5}+C$$

c) Ta có $I=\int\frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}=\int x\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}dx\Rightarrow m=1;n=\frac{2}{3};p=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{m+1}{n}=3\in Z$

Đặt $t=\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}\Rightarrow t^2=1+\sqrt[3]{x^2}\Rightarrow\left(t^2-1\right)^3=x^2\Rightarrow 2xdx=6t\left(t^2-1\right)^2dt$

$$\Rightarrow I=\int\frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}=\int\frac{3t\left(t^2-1\right)^2dt}{t}=3\int\left(t^2-1\right)^2dt=3\int\left(t^4-2t^2+1\right)dt$$

$$=\frac{3}{5}t^5-2t^3+3t+c=\frac{3}{5}\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^{\frac{5}{2}}-2\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}+3\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)+C$$

d) Ta có $I=\int\frac{dx}{x^3\sqrt[3]{2-x^3}}=\int x^{-3}\left(2-x^3\right)^{-\frac{1}{3}}dx\Rightarrow m=-3;n=3,p=\frac{-1}{3}\Rightarrow\frac{m+1}{n}+p=-1\in Z$

Đặt $t=\dfrac{\sqrt[3]{2-x^3}}{x}\Rightarrow t^3=\dfrac{2-x^3}{x^3}=\dfrac{2}{x^3}-1\Rightarrow x^3=\dfrac{2}{t^3+1}\Rightarrow x^2dx=\dfrac{-2t^2dt}{\left(t^3+1\right)^2}$

$$\Rightarrow I=\int\frac{dx}{x^3\sqrt[3]{2-x^3}}=\int\frac{x^2dx}{x^6\dfrac{\sqrt[3]{2-x^3}}{x}}=\int\frac{1}{\left(\dfrac{2}{t^3+1}\right)^2 t}\cdot\frac{-2t^2dt}{\left(t^3+1\right)^2}$$

$$=\frac{-1}{2}\int tdt=\frac{-t^2}{4}+C=-\left(\frac{\sqrt[3]{2-x^3}}{2x}\right)^2+C$$

e) Ta có $I=\int\sqrt[3]{3x-x^3}dx\Rightarrow m=\dfrac{1}{3};n=2,p=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\dfrac{m+1}{n}+p=1\in Z$

Đặt $t=\dfrac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x}\Rightarrow t^3=\dfrac{3x-x^3}{x^3}=\dfrac{3}{x^2}-1\Rightarrow x^2=\dfrac{3}{t^3+1}\Rightarrow 2xdx=\dfrac{-9t^2dt}{\left(t^3+1\right)^2}$

$$\Rightarrow I=\int\sqrt[3]{3x-x^3}dx=\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x}(2xdx)=\frac{-9}{2}\int\frac{t^3dt}{\left(t^3+1\right)^2}=\frac{3}{2}\int td\left(\frac{1}{t^3+1}\right)=\frac{3t}{2\left(t^3+1\right)}-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^3+1}$$

Ta có $\displaystyle\int\frac{dt}{t^3+1}=\int\frac{dt}{(t+1)\left(t^2-t+1\right)}=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{t^2+2t+1}{t^2-t+1}\right|+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}+C$

$$\Rightarrow I=\frac{3t}{2\left(t^3+1\right)}-\frac{3}{2}\left[\frac{1}{6}\ln\left|\frac{t^2+2t+1}{t^2-t+1}\right|+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right]+C$$

$$=\frac{x\sqrt[3]{3x-x^3}}{2}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x\left(\sqrt[3]{3x-x^3}+x\right)^3}{3}\right|-\frac{\sqrt{3}}{4}\arctan\frac{2\sqrt[3]{3x-x^3}-x}{x\sqrt{3}}+C$$

f) Ta có $I=\displaystyle\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}=\int x^{-4}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx\Rightarrow m=-4,n=2,p=\frac{-1}{2}\Rightarrow\frac{m+1}{n}+p=-2\in Z$

Đặt $t=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}\Rightarrow t^2=\dfrac{1+x^2}{x^2}=\dfrac{1}{x^2}+1\Rightarrow x^2=\dfrac{1}{t^2-1}\Rightarrow xdx=\dfrac{-tdt}{\left(t^2-1\right)^2}$

$$\Rightarrow I=\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{xdx}{x^6\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}}=\int\frac{\left(t^2-1\right)^3}{t}\cdot\frac{-tdt}{\left(t^2-1\right)^2}=-\int\left(t^2-1\right)dt$$

$$=\frac{-t^3}{3}+t+C=\frac{-\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}{3x^3}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C=\frac{\left(2x^2-1\right)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}+C$$

Dạng 10. Nguyên hàm $I=\int R\left(x,x^{\frac{r_1}{q_1}},\ldots,x^{\frac{r_j}{q_j}}\right)dx$ với $r_1,q_1,\ldots r_j,q_j$ là các số nguyên dương.

Phương pháp. Gọi k là bội số chung nhỏ nhất của các số $q_1,\ldots,q_j$

Đặt $x=t^k\Rightarrow I=\int R\left(t^k,t^{\alpha_1},\ldots,t^{\alpha_j}\right)kt^{k-1}dt$

Nhìn chung phương pháp chỉ có đơn giản thế thôi, sau đây ta sẽ cùng đi vào các ví dụ cụ thể.

Câu 10.

Tìm nguyên hàm của các hàm số sau

a) $I=\int \frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[8]{x}}{x\left(1+\sqrt[4]{x}\right)}dx$ b) $I=\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx$ c) $I=\int_1^8 \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}$

Lời giải

a) Ta có $I=\int \frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[8]{x}}{x\left(1+\sqrt[4]{x}\right)}dx=\int \frac{x^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{8}}}{x\left(1+\sqrt[4]{x}\right)}dx$, nhận thấy rằng $BCNN(4,8)=8$ nên ta đặt

$$t=\sqrt[8]{x}\Rightarrow x=t^8\Rightarrow dx=8t^7dt\Rightarrow I_2=\int \frac{t^2-t}{t^8\left(t^2+1\right)}8t^7dt=8\int \frac{t-1}{t^2+1}dt$$

$$=4\ln\left|1+t^2\right|-8\arctan t+C=4\ln\left|1+\sqrt[4]{x}\right|-8\arctan\sqrt[8]{x}+C$$

b) Đặt $t=\sqrt[3]{2+x}\Rightarrow t^3=2+x\Rightarrow dx=3t^2dt$

$$\Rightarrow I=\int \frac{\left(t^3-2\right)t}{t^3-2+t}\left(3t^2dt\right)=3\int \frac{t^6-2t^3}{t^3+t-2}dt=3\int\left(t^3-t-2+\frac{t^2-2t-4}{t^3+t-2}\right)dt$$

$$=3\left(\frac{t^4}{4}-\frac{t^2}{2}-2t\right)+3\int \frac{t^2-2t-4}{t^3+t-2}dt$$

$$=3\left(\frac{t^4}{4}-\frac{t^2}{2}-2t\right)+3\left[\frac{-5}{4}\ln|t-1|+\frac{9}{8}\ln\left|t^2+t+2\right|+\frac{3}{4\sqrt{7}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{7}}\right]+C$$

c) Đặt $t=\sqrt[3]{x}\Rightarrow t^3=x\Rightarrow dx=3t^2dt\Rightarrow I=\int_1^2 \frac{3t^2dt}{t^3\sqrt[3]{1+t}}=3\int_1^2 \frac{dt}{t\cdot\sqrt[3]{1+t}}$

Đặt $u=\sqrt[3]{1+t}\Rightarrow u^3=1+t\Rightarrow dt=3u^2du$

$$\Rightarrow I=3\int_1^2 \frac{dt}{t\cdot\sqrt[3]{1+t}}=3\int_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{3}} \frac{3u^2du}{\left(u^3-1\right)u}=3\int_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{3}} \frac{3udu}{(u-1)\left(u^2+u+1\right)}$$

$$=\frac{3}{2}\ln\frac{\left(\sqrt[3]{3}-1\right)^3}{2\left(\sqrt[3]{2}-1\right)^3}+3\sqrt{3}\arctan\frac{2\sqrt[3]{3}+1}{\sqrt{3}}-3\sqrt{3}\arctan\frac{2\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt{3}}$$

Dạng 11. Nguyên hàm $I=\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{n}{n}},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx$ với $m,n,\ldots,r,s$ là các số nguyên dương.

Phương pháp.

Đặt $\frac{ax+b}{cx+d}=t\Rightarrow x=\frac{td-b}{a-ct};dx=\frac{ad-bc}{(a-ct)^2}dt\Rightarrow I=\int R\left(\frac{td-b}{a-ct},t^{\frac{m}{n}},\ldots,t^{\frac{r}{s}}\right)\frac{ad-bc}{(a-ct)^2}dt$

Gọi k là bội số chung nhỏ nhất của các số $\{n,\ldots s\}$. Đặt $t=u^k$ khi đó

$$I=\int R\left(\frac{td-b}{a-ct},t^{\frac{m}{n}},\ldots,t^{\frac{r}{s}}\right)\frac{ad-bc}{(a-ct)^2}dt=\int R\left(\frac{u^ktd-b}{a-ct},u^{m_1},\ldots,u^{r_i}\right)\frac{ad-bc}{\left(a-cu^k\right)^2}ku^{k-1}du$$

Nhìn chung phương pháp chỉ có đơn giản thế thôi, sau đây ta sẽ cùng đi vào các ví dụ.

Câu 11.

Tìm nguyên hàm của các hàm số sau

a) $I=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$

b) $I=\int\frac{1}{x^2-1}\left[\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}-\sqrt[6]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^5}\right]dx$

c) $I=\int\frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}$

Lời giải

a) Biến đổi nguyên hàm ta được $I=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}=\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{1}{x+1}dx$

Đặt $t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\Rightarrow t^3=\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}\Rightarrow x=\frac{t^3+1}{t^3-1}\Rightarrow dx=\frac{-6t^2dt}{\left(t^3-1\right)^2}$

$$\Rightarrow I=\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{dx}{x+1}=\int t\cdot\frac{t^3-1}{2t^3}\cdot\frac{-6t^2dt}{\left(t^3-1\right)^2}=-3\int\frac{dt}{t^3-1}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}+\sqrt{3}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+c=\frac{1}{2}\ln\frac{t^3-1}{(t-1)^3}+\sqrt{3}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{2}{\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}\right)^3}+\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{x-1}}+C$$

b) Ta có $I=\int\frac{1}{x^2-1}\left[\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}-\sqrt[6]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^5}\right]dx=\int\frac{1}{x^2-1}\left[\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{5}{6}}\right]dx$

Đặt $t=\sqrt[6]{\frac{x+1}{x-1}}\Rightarrow t^6=\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}\Rightarrow x-1=\frac{2}{t^6-1}\Rightarrow dx=\frac{-12t^5dt}{\left(t^6-1\right)^2}$

$$\Rightarrow I=\int\frac{\left(t^4-t^5\right)}{\left(\frac{2}{t^6-1}+1\right)^2-1}\cdot\frac{-12t^5dt}{\left(t^6-1\right)^2}=-12\int\frac{\left(t^4-t^5\right)t^5dt}{\left(t^6+1\right)^2-\left(t^6-1\right)^2}=-12\int\frac{(1-t)t^9dt}{4t^6}$$

$$=-3\int(1-t)t^3dt=3\int\left(t^4-t^3\right)dt=\frac{3t^5}{5}-\frac{3t^4}{4}+C=\frac{3}{5}\cdot\sqrt[6]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^5}-\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}+C$$

c) Ta có $I=\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}=\int \frac{dx}{\sqrt[n]{\left(\frac{x-b}{x-a}\right)^{n-1}}(x-a)^2}$

Đặt $t=\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}} \Rightarrow t^n=\frac{x-b}{x-a}=1+\frac{a-b}{x-a} \Rightarrow x-a=\frac{a-b}{t^n-1} \Rightarrow dx=\frac{(b-a)nt^{n-1}dt}{(t^n-1)^2}$

$$\Rightarrow I=\int \frac{1}{t^{n-1}\left(\frac{a-b}{t^n-1}\right)^2}\cdot\frac{(b-a)nt^{n-1}dt}{b-a}\int dt=\frac{nt}{b-a}+C$$

KỸ THUẬT LƯỢNG GIÁC HÓA

Đôi khi trong những bài tính tích phân ta sẽ gặp một số bài toán dưới dấu căn thức chứa một số hàm có dạng đặc biệt mà khó có thể tính như bình thường được (đặt ẩn phụ không ra,...), khi đó ta sẽ nghĩ tới phương pháp lượng giác hóa. Với những dạng sau thì ta sẽ sử dụng phương pháp này.

Dấu hiệu	***Cách đặt***
$\sqrt{a^2-x^2}$	$\left[\begin{array}{ll} x=\|a\|\sin t & t\in\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \\ x=\|a\|\cos t & t\in[0;\pi]\end{array}\right.$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$\left[\begin{array}{ll} x=\frac{\|a\|}{\sin t} & t\in\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\backslash\{0\} \\ x=\frac{\|a\|}{\cos t} & t\in[0;\pi]\backslash\left\{\frac{\pi}{2}\right\}\end{array}\right.$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$\left[\begin{array}{ll} x=\|a\|\tan t & t\in\left(\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \\ x=\|a\|\cot t & t\in(0;\pi)\end{array}\right.$
$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ (hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$)	$x=a.\cos 2t$ với $t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$ (hoặc $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$)
$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	$x=a+(b-a)\sin^2 t$ với $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Sau đây ta sẽ cùng đi tìm hiểu các ví dụ sau để hiểu rõ hơn về các bài toán dạng này.

TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC

Câu 1.

Tính các tích phân sau:

1. $I=\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$
2. $I=\int_0^1 \dfrac{dx}{\left(4-x^2\right)\sqrt{4-x^2}}$
3. $I=\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$
4. $I=\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{x^2dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$
5. $I=\int_0^{\frac{5}{2}} \sqrt{\dfrac{5+x}{5-x}}\,dx$

Lời giải

1. *Hãy thử đặt bút làm câu này theo cách bình thường xem vấn đề ở đây là gì nhé!*

Trước tiên ta thấy đây là dấu hiệu 1, vậy ta sẽ áp công thức vào!

Đặt $x=2\sin t, t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dx=2\cos tdt$

$$\Rightarrow I=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 2t\right)dt=2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi$$

2. Đặt $x=2\sin t, t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dx=2\cos tdt$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos tdt}{\sqrt{\left(4-4\sin^2 t\right)^3}}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dt}{4\cos^2 t}=\frac{1}{4}\tan t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{4\sqrt{3}}$$

3. Đặt $x=\sin t\Rightarrow dx=\cos tdt$. Ta được:

$$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 tdt=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos 4t\right)dt=\frac{1}{8}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{16}$$

4. Đặt $x=\sin t, t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dx=\cos tdt$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^2 t\cos tdt}{\sqrt{\left(1-\sin^2 t\right)^3}}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^2 tdt}{\cos^2 t}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\tan^2 tdt=\left(\tan t-t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{6}$$

5. Đặt $x=5\cos 2t, t\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dx=-10\sin 2tdt$

$$\Rightarrow I=-10\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{\frac{5(1+\cos 2t)}{5(1-\cos 2t)}}\sin 2tdt=10\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}2\cos^2 t=10\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)dt=10\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=10\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2-\sqrt{3}}{4}\right)$$

Câu 2.

Tìm các nguyên hàm sau:

1. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$
2. $I=\int\frac{dx}{a^2+x^2}$
3. $I=\int\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$
4. $I=\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}$
5. $\int\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx$

Lời giải

1. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$. Đặt $x=a\sin t$, $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\cos t>0$, $\Rightarrow dx=a\cos tdt$, $t=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$

Do đó $I=\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{a\cos tdt}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}}=\int dt=t+C$

Vậy $I=\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+C$

2. $I=\int\frac{dx}{a^2+x^2}$. Đặt $x=a\tan t$, $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ $\Rightarrow dx=\frac{adt}{\cos^2 t}=a\left(\tan^2 t+1\right)dt$, $t=\arctan\frac{x}{a}$

Do đó $I=\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\int\frac{a(\tan^2 t+1)dt}{a^2+a^2\tan^2 t}=\int\frac{dt}{a}=\frac{t}{a}+C$

Vậy $I=\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{\arctan\frac{x}{a}}{a}+C$

3. $I=\int\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$. Đặt $x=2\cos t$ với $t\in(0;\pi)$, $dx=-2\sin tdt$

$$\Rightarrow I=\int\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx=-\int\frac{4\cos^2 t.2\sin tdt}{\sqrt{4\left(1-\cos^2 t\right)}}=-\int\frac{4\cos^2 t.2\sin tdt}{2\sin t}=-\int 4\cos^2 tdt$$

$$=-2\int(1+\cos 2t)dt=-2t-\sin 2t+C.$$

Ta có $x = 2\cos t$ với $t \in (0;\pi) \Rightarrow \sin t > 0$. Nên $\sin 2t = 2\sin t.\cos t = 2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}.\frac{x}{2} = \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}$

Vậy $I = \int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx = -2\arccos\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + C$

4. $I = \int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Đặt $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos tdt$ với $\frac{-\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos t > 0 \Rightarrow \cos t = \sqrt{1-x^2}$

$$\Rightarrow I = \int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\sin^3 t.\cos t}{\cos t}dt = \int \sin^3 tdt = \int \left(\sin^2 t.\sin t\right)dt = -\int \left(1-\cos^2 t\right)d\left(\cos t\right)$$

$$= -\cos t + \frac{\cos^3 t}{3} + C.$$

Vậy $I = \int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + \frac{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}{3} + C$ (*có thể giải bằng cách đặt* $t = \sqrt{1-x^2}$)

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$. Đặt $x = \tan t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos t > 0$, $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$

$$\Rightarrow I = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}} = \int \frac{dt}{\cos^2 t\sqrt{\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^3}} = \int \cos tdt = \sin t + C$$

Ta có $\begin{cases} \sin^2 t + \cos^2 t = 1 \\ \frac{\sin t}{\cos t} = x \end{cases}, t \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos t > 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ \cos t = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases}$

Vậy $I = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$

Câu 3.

Tính các tích phân hoặc tìm các nguyên hàm sau:

1. $I = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}{x^3}dx$
2. $I = \int_{1-\sqrt{3}}^{1-\sqrt{2}} \frac{xdx}{(x-1)^2\sqrt{3+2x-x^2}}$
3. $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^5}}$
4. $I = \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$
6. $I = \int \frac{dx}{\left(x^2-a^2\right)\sqrt{x^2-a^2}} (a > 0)$
7. $I = \int_{a\sqrt{2}}^{2a} \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx$
8. $I = \int_{a\sqrt{2}}^{2a} \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}dx$
9. $I = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^5}}{x^8}dx$
10. $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$

5. $I=\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-1}}$

Lời giải

1. Đặt $x=\sin t;t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}$

$$\Rightarrow I_1=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\left(1-\sin^2 t\right)^3}\cos tdt}{\sin^3 t}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^4 tdt}{\sin^3 t}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^4 tdt}{\sin^3 t}=-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^4 td\left(\cos t\right)}{\sin^4 t}$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos^4 td\left(\cos t\right)}{\left(1-\cos^2 t\right)^2}=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{u^4du}{\left(1-u^2\right)^2}=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1-\left(1-u^4\right)}{\left(1-u^2\right)^2}du=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{du}{\left(1-u^2\right)^2}-\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1+u^2}{1-u^2}du$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left[\frac{(1+u)+(1-u)}{(1+u)(1-u)}\right]^2du-\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1+u^2}{1-u^2}du=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}\right)^2du-\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1+u^2}{1-u^2}du$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{1}{(1-u)^2}+\frac{1}{(1+u)^2}+\frac{2}{1-u^2}\right)du-\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{2}{1-u^2}-1\right)du$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{1-u}-\frac{1}{1+u}-3\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+4u\right]\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{3}-\frac{3}{4}\ln\left|\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right|+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}\left[\sqrt{3}-\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right]$$

2. Ta có $I=\int_{1-\sqrt{3}}^{1-\sqrt{2}}\frac{xdx}{(x-1)^2\sqrt{3+2x-x^2}}=\int_{1-\sqrt{3}}^{1-\sqrt{2}}\frac{xdx}{(x-1)^2\sqrt{4-(x-1)^2}}=\int_{-\sqrt{3}}^{-\sqrt{2}}\frac{(u+1)du}{u^2\sqrt{4-u^2}}$

Đặt $u=2\sin t;t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\setminus\{0\}$

$$\Rightarrow I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{4}}\frac{(1+2\sin t)2\cos tdt}{4\sin^2 t\sqrt{4\cos^2 t}}=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{4}}\frac{(1+2\sin t)dt}{4\sin^2 t}=-\left(\frac{1}{4}\cot t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{\sin t}$$

$$=\frac{3-\sqrt{3}}{12}+\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{4}}\frac{\sin tdt}{1-\cos^2 t}=\frac{3-\sqrt{3}}{12}-\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{4}}\frac{d(\cos t)}{1-\cos^2 t}=\frac{3-\sqrt{3}}{12}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\cos t}{1-\cos t}\right|\Bigg|_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{3-\sqrt{3}}{12}-\frac{1}{4}\left(\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}-\ln 3\right)=\frac{3-\sqrt{3}}{12}-\frac{1}{4}\ln\frac{3+2\sqrt{2}}{3}$$

3. Đặt $u=\sin t;t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^2 t\cos tdt}{\sqrt{\left(1-\sin^2 t\right)^5}}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^2 tdt}{\cos^4 t}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\tan^2 td(\tan t)=\frac{1}{3}\tan^3 t\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{9\sqrt{3}}$$

4. Đặt $x=\frac{1}{\cos t};t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$

$$\Rightarrow I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt}{\frac{1}{\cos t}\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin tdt}{\cos t\sqrt{\tan^2 t}}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin tdt}{\cos t.\tan t}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}dt=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$$

5. $I=\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-1}}$, đặt $x=\frac{1}{\cos t};t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$

$$\Rightarrow I=\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-1}}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\frac{1}{\cos^2 t}\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\frac{\sin t}{\cos^4 t}}{\sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos tdt}{\cos^4 t}$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos tdt}{\cos^4 t}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{d(\sin t)}{\left(1-\sin^2 t\right)^2}=\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left[\frac{(1+\sin t)+(1-\sin t)}{(1+\sin t)(1-\sin t)}\right]^2 d(\sin t)$$

$$=\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{1-\sin t}+\frac{1}{1+\sin t}\right)^2 d(\sin t)=\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left[\frac{1}{(1-\sin t)^2}+\frac{1}{(1+\sin t)^2}+\frac{2}{1-\sin^2 t}\right]d(\sin t)$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{1-\sin t}-\frac{1}{1+\sin t}+\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right|\right]\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{2-\sqrt{3}}-\frac{2}{2+\sqrt{3}}+\ln\left|\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right|\right)-$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{2}{2-\sqrt{2}}-\frac{2}{2+\sqrt{2}}+\ln\left|\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right|\right)=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{4}\ln\frac{7+4\sqrt{3}}{3+2\sqrt{2}}$$

6. Đặt $x=\frac{a}{\cos t};t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$

$$\Rightarrow I=\int\frac{1}{a^2\left(\frac{1}{\cos^2 t}-1\right)\sqrt{a^2\left(\frac{1}{\cos^2 t}-1\right)}}\cdot\frac{a\sin tdt}{\cos^2 t}=\int\frac{a\tan tdt}{\varepsilon\cdot a^3\cos t\tan^3 t}$$

$$=\int\frac{dt}{\varepsilon a^2\cos t\tan^2 t}=\frac{1}{\varepsilon a^2}\int\frac{\cos tdt}{\sin^2 t}=\frac{1}{\varepsilon.a^2}\int\frac{d(\sin t)}{\sin^2 t}=\frac{-1}{\varepsilon.a^2\sin t}+C$$

Trong đó nếu $\tan t>0\Rightarrow\varepsilon=1,\tan t<0\Rightarrow\varepsilon=-1$

7. Đặt $x=\frac{a}{\cos t};t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$

$$\Rightarrow I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{a^2\left(\frac{1}{\cos^2 t}-1\right)}\cdot\frac{a\sin tdt}{\cos^2 t}}{\frac{a}{\cos t}}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{a^2\tan^2 t}\cdot\sin tdt}{\cos t}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}a\tan^2 tdt$$

$$=a\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left[\left(1+\tan^2 t\right)-1\right]dt=a\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d(\tan t)-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}dt\right)=a(\tan t-t)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=a\left(\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{12}\right)$$

8. Đặt $x=\frac{a}{\cos t};t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$

$$\Rightarrow I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{a^2\left(\frac{1}{\cos^2 t}-1\right)}\cdot\frac{a\sin t dt}{\cos^2 t}}{\left(\frac{a}{\cos t}\right)^2}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{a^2\tan^2 t}\cdot\sin t dt}{a}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 t}{\cos t}dt$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}d(\sin t)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{1-\sin^2 t}\right)d(\sin t)-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d(\sin t)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}-\sin t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{7+4\sqrt{3}}{3+2\sqrt{2}}\right)-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$$

9. Ta có $I=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\frac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^5}}{x^8}dx$, đặt $x=\tan t; t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$

$$\Rightarrow I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{\left(1+\tan^2 t\right)^5}\frac{dt}{\cos^2 t}}{\tan^8 t}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\left(\frac{1}{\cos t}\right)^5\frac{dt}{\cos^2 t}}{\tan^8 t}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos t dt}{\sin^8 t}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\left(\sin t\right)}{\sin^8 t}$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin t\right)^{-8}d\left(\sin t\right)=-\frac{1}{7\sin^7 t}\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{-1}{7}\left(8\sqrt{2}-128\right)=\frac{128-8\sqrt{2}}{7}$$

10. Ta có $I=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$, đặt $u=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\Rightarrow x=\frac{u^2-1}{u^2+1}; dx=\frac{4udu}{\left(u^2+1\right)^2}\Rightarrow I=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{4u^2du}{\left(u^2+1\right)^2}$

Đặt $u=\tan t; t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$

$$\Rightarrow I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}4\sin^2 udu=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(1-\cos 2u\right)du=2\left(u-\frac{1}{2}\sin 2u\right)\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/3}=\frac{\pi}{6}+1-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Câu 4.

Tính các tích phân sau:

1. $I=\int_1^2\frac{x-\sqrt{x^2-2x+2}}{x+\sqrt{x^2-2x+2}}\cdot\frac{dx}{x^2-2x+2}$
2. $I=\int_0^1\frac{x^2dx}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$
3. $I=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\frac{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}{x^3}dx$
4. $I=\int_0^{\frac{3}{2}}x^2\sqrt{\frac{3+x}{3-x}}dx$
5. $I=\int_{\frac{3a+b}{4}}^{\frac{a+b}{2}}\frac{dx}{\sqrt{\left(x-a\right)\left(b-x\right)}}\left(a<b\right)$

Lời giải

1. Ta có

$$I=\int_1^2 \frac{x-\sqrt{x^2-2x+2}}{x+\sqrt{x^2-2x+2}}\cdot\frac{dx}{x^2-2x+2}=\int_1^2 \frac{x-\sqrt{(x-1)^2+1}}{x+\sqrt{(x-1)^2+1}}\cdot\frac{dx}{(x-1)^2+1}=\int_0^1 \frac{u+1-\sqrt{u^2+1}}{u+1+\sqrt{u^2+1}}\cdot\frac{du}{u^2+1}$$

Đặt $u=\tan t; t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan t+1-\sqrt{\tan^2 t+1}}{\tan t+1+\sqrt{\tan^2 t+1}}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t\left(\tan^2 t+1\right)}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin t+\cos t-1}{\sin t+\cos t+1}dt$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-\frac{2}{\sin t+\cos t+1}\right)dt=\frac{\pi}{4}-2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{\sin t+\cos t+1}=\frac{\pi}{4}-2J$$

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{\sin t+\cos t+1}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}+2\cos^2\frac{t}{2}}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{2\cos^2\frac{t}{2}\left(1+\tan\frac{t}{2}\right)}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\left(\tan\frac{t}{2}\right)}{1+\tan\frac{t}{2}}=\ln\left|1+\tan\frac{t}{2}\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln\left(1+\tan\frac{\pi}{8}\right)=\ln\sqrt{2}\Rightarrow I_{12}=\frac{\pi}{4}-2\ln\sqrt{2}=\frac{\pi}{4}-\ln 2$$

2. Đặt $x=\tan t; t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2 t}{\left(1+\tan^2 t\right)\sqrt{1+\tan^2 t}}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 t}{\cos t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 t\cos t}{\cos^2 t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 t}{1-\sin^2 t}d(\sin t)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{1-\sin^2 t}-1\right)d(\sin t)=\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right|-\sin t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. Đặt $x=\tan t; t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\left(1+\tan^2 t\right)\sqrt{1+\tan^2 t}}{\tan^3 t}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{\sin^3 t.\cos^2 t}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin t}{\sin^4 t\cos^2 t}dt$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\cos t}{1-\cos^2 t}+\frac{1}{\cos t}\right)^2 d(\cos t)=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{d(\cos t)}{1-\cos^2 t}+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{d(\cos t)}{\cos^2 t}+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\cos t}{1-\cos^2 t}\right)^2 d(\cos t)$$

$$=\left[2\ln\left|\frac{1+\cos t}{1-\cos t}\right|-\frac{1}{\cos t}\right]\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{1-\cos t}-\frac{1}{1+\cos t}\right)^2 d(\cos t)$$

$$=\left[\frac{9}{4}\ln\left|\frac{1+\cos t}{1-\cos t}\right|-\frac{1}{\cos t}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\cos t}-\frac{1}{1+\cos t}\right)\right]\Bigg|_{-\frac{9}{2}}^{\pi/4}=\frac{9}{2}\ln\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}-1-\sqrt{2}$$

4. Đặt $x=3\cos 2t; t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$

$$\Rightarrow I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}\left(9\cos^2 2t\right)\sqrt{\frac{3(1+\cos 2t)}{3(1-\cos 2t)}}(-6\sin 2t)dt=54\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2t\sqrt{\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}}(2\sin t\cos t)dt$$

$$=54\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2t\left(2\cos^2 t\right)dt=54\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2t\left(1+\cos 2t\right)dt=54\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^2 2t+\cos^3 2t\right)dt$$

$$=54\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1+\cos 4t}{2}+\frac{\cos 6t+3\cos 2t}{4}\right)dt=\frac{27}{2}\left[2t+\frac{1}{2}\sin 4t+\frac{1}{6}\sin 6t+\frac{3}{2}\sin 2t\right]\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{27}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{6}+\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)\right]=\frac{27}{2}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4}{3}-\sqrt{3}\right)$$

5. Ta có $I=\int_{\frac{3a+b}{4}}^{\frac{a+b}{2}}\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\left(a<b\right)$, đặt $\begin{cases}x=a+(b-a)\sin^2 t\\ t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{(b-a)\sin 2tdt}{\sqrt{(b-a)^2\sin^2 t\left(1-\sin^2 t\right)}}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\sin t\cos tdt}{\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t}}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}2dt=2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}$$

Tổng kết lại. *Cùng nhìn lại phương pháp này ta sẽ thấy nó chỉ là một dạng tích phân đưa về hàm lượng giác mà những hàm này ta đã được cùng nhau tìm hiểu ở chương trước nên không có gì quá mới mẻ và lạ lẫm. Mấu chốt của các bài toán này là phát hiện ra dấu hiện để đặt ẩn phụ, còn việc phát hiện ra được không thì đó là việc của chính các bạn* ☺.

TỔNG KẾT

Ở trên ta đã tìm hiểu các dạng toán hay gặp nhất của dạng tính nguyên hàm tích phân hàm vô tỷ và ta rút ra: thường sẽ có 2 loại bài tập tính tích phân hàm vô tỉ với cách giải đặc thù sau:

- Phân tích, biến đổi để làm mất căn thức (biến đổi thành bình phương dưới căn rồi đưa ra ngoài; nhân lượng liên hợp để mất căn).
- Sử dụng phương pháp đổi biến, đây là phương pháp phổ biến nhất để giải một bài toán tích phân hàm vô tỷ, ta thường gặp các dạng sau đây:

Dạng 1. $I=\int_{\alpha}^{\beta}R\left(x,\sqrt[n]{ax+b}\right)dx$ (với $R(x)$ là hàm số hữu tỉ của biến x)

Cách giải. Đặt $t=\sqrt[n]{ax+b}$

Dạng 2. $I=\int_{\alpha}^{\beta}R\left(x,\sqrt[m]{x^p},\sqrt[n]{x^q},...,\sqrt[s]{x^r}\right)dx$ (với $R(x)$ là hàm số hữu tỉ của biến x)

Cách giải. Với $k=BCNN(m,n,...,s)$ ta đặt $t=\sqrt[k]{x}\Rightarrow x=t^k$

Dạng 3. $I=\int_{\alpha}^{\beta}R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$

+ *Cách 1.* Đặt $t=\sqrt{ax^2+bx+c}$ (nếu giải được)

+ *Cách 2.* Biến đổi $\sqrt{ax^2+bx+c}$ và đặt theo 3 hướng sau:

$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{A^2-u^2}$ thì đặt $u=A\cos t$ với $0\le t\le\pi$ (hoặc $u=A\sin t$ với $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$)

$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{u^2+A^2}$ thì đặt $u=A\tan t$ với $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$ (*)

$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{u^2-A^2}$ thì đặt $u=\frac{A}{\cos t}$ với $0\le t\le\pi$ và $t\ne\frac{\pi}{2}$ (**)

(với *u* là biểu thức chứa biến *x* và A là hằng số)

+ *Cách 3.* Sử dụng những cách biến đổi như ở phần trên.

Dạng 4. $I=\int_\alpha^\beta R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ (với $R(x)$ là hàm số hữu tỉ của biến x)

Cách giải. Đặt $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\Rightarrow t^n=\frac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow x=\frac{b-dt^n}{ct^n-a}\Rightarrow dx=\left(\frac{b-dt^n}{ct^n-a}\right)'dt$

Dạng 5. $I=\int_\alpha^\beta R\left(x,\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right)dx$ hoặc $I=\int_\alpha^\beta R\left(x,\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\right)dx$

Cách giải. Đặt $x=a\cos 2t$ và sử dụng công thức $1-\cos 2t=2\sin^2 t$, $1+\cos 2t=2\cos^2 t$.

Dạng 6. $I=\int_\alpha^\beta R\left(x,\frac{1}{\sqrt{(ax+b)(cx+d)}}\right)dx$ (với $R(x)$ là hàm số hữu tỉ của biến x)

Cách giải: Đặt $t=\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}$

Các em có thể xem thêm các cách đặt biến số của hàm vô tỉ ở phần phương pháp đổi biến số dạng 1 và dạng 2.

Chú ý. Đối với bài toán tính $\int_\alpha^\beta \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm k}}$ thì ta có thể không cần lượng giác hóa như cách đặt như ở phần $(*),(**)$ ta có thể trình bày như sau:

Cách 1: Biến đổi $\int_\alpha^\beta \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm k}}=\frac{\left(x+\sqrt{x^2\pm k}\right)dx}{\left(x+\sqrt{x^2\pm k}\right)\sqrt{x^2\pm k}}=\frac{d\left(x+\sqrt{x^2\pm k}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2\pm k}\right)}=\ln\left(x+\sqrt{x^2\pm k}\right)\Big|_\alpha^\beta=...$

Cách 2: Đặt $t=x+\sqrt{x^2\pm k}\Rightarrow dt=1+\frac{x}{\sqrt{x^2\pm k}}dx=\frac{x+\sqrt{x^2\pm k}}{\sqrt{x^2\pm k}}dx=\frac{tdx}{\sqrt{x^2\pm k}}\Rightarrow\frac{dt}{t}=\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm k}}$

Đổi cận $\begin{cases}x=\alpha\Rightarrow t=t_1\\x=\beta\Rightarrow t=t_2\end{cases}\Rightarrow\int_\alpha^\beta\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm k}}=\int_{t_1}^{t_2}\frac{dt}{t}=\ln|t|\Big|_{t_1}^{t_2}=\ln\left|\frac{t_2}{t_1}\right|.$

CÁC BÀI TOÁN TỔNG HỢP

ĐỀ BÀI.

Câu 1. Tính tích phân của các hàm số sau

a) $I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ b) $I=\int_0^1 \frac{x^3dx}{x+\sqrt{1+x^2}}$ c) $I=\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}$

Câu 2. Tính tích phân của các hàm số sau

a) $I=\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx$ b) $I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}}$

Câu 3. Thực hiện các yêu cầu dưới đây

a) Cho $I=\int_a^2\left(4+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}\right)dx=\frac{28}{3}$, tính $6a+\sqrt{1+a^3}$

b) Cho $I=\int_{\sqrt{5}}^a \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}=\frac{1}{4}\ln\frac{5}{3}$, $\left(a>\sqrt{5}\right)$, tính a^2

Câu 4. Tính các tích phân sau

a) $I=\int_4^6 \sqrt{\frac{x-4}{x+2}}.\frac{1}{x+2}dx$ b) $I=\int_{-1}^1 \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}.\frac{1}{(2-x)^2}dx$

c) $I=\int_5^{3\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}dx$ d) $I=\int_0^1 \frac{a}{\sqrt{3x^2+12}}dx$.

Câu 5. Cho tích phân $\int_0^1 \sqrt{\frac{x+3}{(x+1)^5}}dx=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{c}$, với a,b,c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Giá trị biểu thức $a+b+c$ bằng

A. 14 **B.** 20 **C.** 28 **D.** 38

Câu 6. Đặt $I_n=\int_0^1\left(\sqrt[n]{\frac{(x+1)^{2n}(2x^2+1)}{(x^2+1)^{2n+1}}}-\sqrt[n]{\frac{2x^2+1}{(x^2+1)^{n+1}}}\right)dx$. Tính $\lim\frac{I_n}{I_{n+1}}$.

A. 1 **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** -1 **D.** $\frac{3}{2}$

Câu 7. Cho tích phân $\int_1^2 \frac{\sqrt[3]{x-x^3}}{x^4}dx=-\frac{a}{b}.\sqrt[3]{\frac{c}{d}}$ và a,b,c,d là các số nguyên dương, $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Giá trị biểu thức $a+b+c+d$ bằng

A. 48 **B.** 66 **C.** 41 **D.** 61

Câu 8. Cho $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Biết $f(x)=\int\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}-\frac{1}{x^2\sqrt{x^4+1}}\right)dx$.

Biết $f\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\sqrt{30}+15}{3}$, GTNN của $f(x)$ bằng

A. $2\sqrt{2}+5$ **B.** 6 **C.** $\sqrt{2}+5$ **D.** 10

Câu 9. Đâu là họ các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{(x+1)\sqrt{x^2+2x-1}}{|x^2+2x-2|}$.

A. $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{x^2+2x-1}+1}{\sqrt{x^2+2x-1}-1}\right|-\sqrt{x^2+2x-1}+C$

B. $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{x^2+2x-1}+1}{\sqrt{x^2+2x-1}-1}\right|+\sqrt{x^2+2x-1}+C$

C. $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{x^2+2x-1}-1}{\sqrt{x^2+2x-1}+1}\right|-\sqrt{x^2+2x-1}+C$

D. $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{x^2+2x-1}-1}{\sqrt{x^2+2x-1}+1}\right|+\sqrt{x^2+2x-1}+C$

Câu 10. Cho $\int_{\frac{7}{8}}^{\frac{5}{3}}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}dx=\dfrac{a}{b}+\ln\sqrt{\dfrac{c}{d}}$, với a,b,c,d là các số nguyên dương, $\dfrac{a}{b},\dfrac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Giá trị biểu thức $a+b+c+d$ bằng

A. 104 **B.** 238 **C.** 204 **D.** 190

Câu 11. Cho tích phân $I=\int_1^{\frac{3}{2}}\sqrt{\sqrt{\sqrt{3-2x}+1}+\sqrt{2}}dx=a^{\frac{1}{4}}\left(\dfrac{b}{c}-\dfrac{\cos\frac{9\pi}{8}}{a+1}-\dfrac{\cos\frac{7\pi}{8}}{a-1}\right)$, với a,b,c là các số nguyên dương và $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản. Biểu thức $a+b+c$ có giá trị bằng

A. 38 **B.** 53 **C.** 87 **D.** 58

Câu 12. Cho $F(x)=\int\dfrac{x-2}{(x+2)\sqrt{4x^2+6x+5}}dx$. Biết $F(0)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{3}{2}+\sqrt{5}\right)+\dfrac{4}{3}\ln\left(\sqrt{\dfrac{5}{4}}-\dfrac{1}{6}\right)$. Gọi M là GTNN của $F(x)$ trên đoạn $[1;3]$. M có giá trị xấp xỉ bằng

A. 0.3364 **B.** 0.3365 **C.** 0.3367 **D.** 0.3368

Câu 13. Cho $F(m)=3\int_{-1}^{m}\dfrac{x^4-x-1}{x^2+\sqrt{x+1}}dx$. Tìm khoảng đồng biến của $\dfrac{F(m)}{m+1}$

A. $(-1;0)$ **B.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ **C.** $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **D.** $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};+\infty\right)$

Câu 14. Cho $I=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\dfrac{dx}{x+1+\sqrt{2x+1}}=\dfrac{8}{3}-2\sqrt{2}+\ln a-\ln\left(b+\sqrt{c}\right)$. Với a,b,c là các số nguyên dương. Biểu thức $a+b+c$ có giá trị bằng

A. 10 **B.** 25 **C.** 15 **D.** 20

Câu 15. Cho $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $I=\int_1^a f'(x)\sqrt{f(x)}dx$. Biết $f(x)+f(y)=\frac{x^3}{2018y}+\frac{2018x}{y^3}$ và $f(1)=m$ là hằng số. Tìm GTNN của I theo m

A. m **B.** $1-m\sqrt{m}$ **C.** $\frac{2}{3}\left(1-m\sqrt{m}\right)$ **D.** $\frac{3}{2}\left(1-m\sqrt{m}\right)$

Câu 16. Tính nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2\sqrt{x^2+a}$ theo a.

A. $\frac{\left(2x^3+ax\right)\sqrt{x^2+a}-a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|}{6}+C$

B. $\frac{\left(2x^3+ax\right)\sqrt{x^2+a}+a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|}{6}+C$

C. $\frac{\left(2x^3+ax\right)\sqrt{x^2+a}-a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|}{8}+C$

D. $\frac{\left(2x^3+ax\right)\sqrt{x^2+a}+a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|}{8}+C$

Câu 17. Cho $I=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x+1\right)}=\frac{a\pi+b\ln 2+c\ln 3}{6}$ với a,b,c là các số nguyên. Tính $a+b+c$

A. 6 **B.** 4 **C.** 0 **D.** –2

Câu 18. Cho $\int_0^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}dx=a-\frac{b}{c}\sqrt{3}-\frac{\pi}{d}$ với a,b,c,d là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $ac+bd$

A. 22 **B.** 24 **C.** 26 **D.** 28

Câu 19. Giả sử tồn tại $f(x)$ và $g(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)g'(x)=g(x)f'(x)$. Biết rằng $f(1)=2g(1)=4$ và $f(0)=3g(0)=9$, tính giá trị của biểu thức tích phân $\int_0^1\frac{g'(x)\sqrt{f(x)}\ln\sqrt{g(x)}}{g(x)}dx$.

A. $\ln 4+\ln 9-2$ **B.** $\ln 4-\ln 27+2$ **C.** $\ln 4-\ln 9+2$ **D.** $\ln 4-\ln 27-2$

Câu 20. Ta đặt $F_n(x)=\int\frac{\sqrt[n]{x-x^n}}{x^{n+1}}dx$. Biết $F_n(1)=0\ \forall n$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}F_n(2)$.

A. 1 **B.** $-\infty$ **C.** -1 **D.** $+\infty$

Câu 21. Cho tích phân $\int_{\ln 3}^{\ln 8}\sqrt{e^x+1}dx=a\ln 3+b\ln 2+c$ với a,b,c là các số nguyên dương. Tính $-a+b+c$

A. 2 **B.** 0 **C.** –2 **D.** 4

Câu 22. Tính tích phân $I=\int_{-2}^{2}\frac{\sqrt{4-x^2}}{4^x+1}dx$

A. 4 **B.** π **C.** 2π **D.** 2

Câu 23. Tính nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x^2+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x\sqrt{x}}}$.

A. $\frac{4}{9}\left(\sqrt{1+x\sqrt{x}}\right)^3+C$ **B.** $\frac{2}{9}\left(\sqrt{1+x\sqrt{x}}\right)^3+C$

C. $\frac{4}{3}\left(\sqrt{1+x\sqrt{x}}\right)^3+C$ **D.** $\frac{2}{3}\left(\sqrt{1+x\sqrt{x}}\right)^3+C$

Câu 24. Cho tích phân $\int_0^3\frac{x^2}{\left(1+\sqrt{1+x}\right)^2\left(2+\sqrt{1+x}\right)^2}dx=a+b\ln\frac{4}{3}$. Tính ab.

A. -634 **B.** 504 **C.** 634 **D.** -504

Câu 25. Biết $\int_1^2\left(\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}+2\sqrt[3]{\frac{1}{x^8}-\frac{1}{x^{11}}}\right)dx=\frac{a}{b}\sqrt[3]{c}$, với a,b,c nguyên dương, $\frac{a}{b}$ tối giản và $c<a$. Tính $S=a+b+c$?

A. $S=51$ **B.** $S=67$ **C.** $S=39$ **D.** $S=75$

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\frac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}dx=\frac{2\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{x+5}+C$. Nguyên hàm của hàm số $f(2x)$ trên tập $\mathbb{R}^+$ là:

A. $\frac{x+3}{2\left(x^2+4\right)}+C$ **B.** $\frac{x+3}{x^2+4}+C$ **C.** $\frac{2x+3}{4\left(x^2+1\right)}+C$ **D.** $\frac{2x+3}{8\left(x^2+1\right)}+C$

Câu 27. Tìm tất cả các giá trị dương của tham số m sao cho $\int_0^m xe^{\sqrt{x^2+1}}dx=2^{500}.e^{\sqrt{m^2+1}}$.

A. $m=2^{250}\sqrt{2^{500}-2}$ **B.** $m=\sqrt{2^{1000}+1}$ **C.** $m=2^{250}\sqrt{2^{500}+2}$ **D.** $m=\sqrt{2^{1000}-1}$

Câu 28. Giả sử a,b,c là các số nguyên thỏa mãn $\int_0^4\frac{2x^2+4x+1}{\sqrt{2x+1}}dx=\frac{1}{2}\int_1^3\left(au^4+bu^2+c\right)du$, trong đó $u=\sqrt{2x+1}$. Tính giá trị $S=a+b+c$

A. $S=3$ **B.** $S=0$ **C.** $S=1$ **D.** $S=2$

Câu 29. Biết $\int_0^4\frac{\sqrt{2x+1}dx}{2x+3\sqrt{2x+1}+3}=a+b\ln 2+c\ln\frac{5}{3}\ (a,b,c\in\mathbb{Z})$. Tính $T=2a+b+c$.

A. $T=4$ **B.** $T=2$ **C.** $T=1$ **D.** $T=3$

Câu 30. Biết tích phân $\int_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}}\frac{1}{\sqrt{e^{2x}+1}-e^x}dx=1+\frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}+a\sqrt{a}-\sqrt{b}$ với $a,\ b\in\mathbb{Z}^+$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b$

A. $P=-1$. **B.** $P=1$. **C.** $P=3$. **D.** $P=5$.

Câu 31. Biết $\int_1^4 \sqrt{\frac{1}{4x}+\frac{\sqrt{x}+e^x}{\sqrt{x}e^{2x}}}dx = a+e^b-e^c$ với a, b, $c \in \mathbb{Z}$. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=-5$. **B.** $P=-4$. **C.** $P=-3$. **D.** $P=3$.

Câu 32. Biết $\int_0^2 \sqrt{\frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}}dx = a\pi+b\sqrt{2}+c$ với a, b, $c \in \mathbb{Z}$. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=-1$. **B.** $P=2$. **C.** $P=3$. **D.** $P=4$.

Câu 33. Trong giải tích, $I=\int x^m\left(ax^n+b\right)^p dx$ với $a,b\in\mathbb{R}$ và $m,n,p\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ được gọi là tính được (*có thể biểu diễn bởi các hàm như đa thức, hữu tỷ, lượng giác, logarit, ...*) khi một trong các số $p,\frac{m+1}{n},p+\frac{m+1}{n}$ là số nguyên. Xét nguyên hàm $I=\int\frac{x^a dx}{\left(\sqrt[a]{x^5+1}\right)^6}$, hỏi có bao nhiêu số $a\in\{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ để I có thể tính được?

A. 5 **B.** 9 **C.** 4 **D.** 6

TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

Tính tích phân của các hàm số sau

a) $I=\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

b) $I=\int\limits_0^1 \frac{x^3dx}{x+\sqrt{1+x^2}}$

c) $I=\int\limits_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}$

Lời giải

a) Ta có $I=\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)}dx=\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x+1-x}dx$

$$=\int\limits_0^1 \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)dx=\frac{2}{3}\left[(x+1)^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-2\right)$$

b) Ta có $\int\limits_0^1 \frac{x^3dx}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{x^3\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)dx}{x^2-\left(1+x^2\right)}=\int\limits_0^1\left(x^3\sqrt{1+x^2}-x^4\right)dx=\int\limits_0^1 x^3\sqrt{1+x^2}dx-\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^1=J-\frac{1}{5}.$

Tính $J=\int\limits_0^1 x^3\sqrt{1+x^2}dx=\int\limits_0^1 x^2\sqrt{1+x^2}xdx$.

Đặt $t=\sqrt{1+x^2}\Rightarrow t^2=1+x^2\Rightarrow tdt=xdx$. Đổi cận: $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=1 \\ x=1\Rightarrow t=\sqrt{2}\end{cases}$

$$\Rightarrow J=\int\limits_1^{\sqrt{2}}\left(t^2-1\right)t.tdt=\int\limits_1^{\sqrt{2}}\left(t^4-t^2\right)dt=\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{2}}=\left(\frac{4\sqrt{2}}{5}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{15}+\frac{2}{15}$$

$$\Rightarrow I=\frac{2\sqrt{2}}{15}+\frac{2}{15}-\frac{1}{5}=\frac{2\sqrt{2}}{15}-\frac{1}{15}.$$

Nhận xét. Ở câu a) và câu b) ta đều nhân lượng liên hiệp để khử mẫu đưa về bài toán dễ tính hơn.

c) Do $\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=1$ nên ta có

$$=\int\limits_1^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)dx=\left(2\sqrt{x}-2\sqrt{x+1}\right)\Big|_1^2=4\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2$$

$$=\int\limits_1^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)dx=\left(2\sqrt{x}-2\sqrt{x+1}\right)\Big|_1^2=4\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2$$

Câu 2.

Tính tích phân của các hàm số sau

a) $I=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx$ b) $I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}}$

Lời giải

a) Đặt $t=\sqrt{1+x^2}\Rightarrow t^2=1+x^2\Rightarrow tdt=xdx$. Đổi cận $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=\sqrt{2}\\ x=\sqrt{3}\Rightarrow t=2\end{cases}$

Khi đó $I=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}xdx=\int_{\sqrt{2}}^2\frac{t}{t^2-1}.tdt=\int_{\sqrt{2}}^2\frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt=\int_{\sqrt{2}}^2\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt$

$$=\int_{\sqrt{2}}^2\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\right]dt=\left(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^2=2-\sqrt{2}+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)-\frac{1}{2}\ln 3$$

b) Đặt $t=\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}$. Đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=1+\sqrt{3}\\ x=1\Rightarrow t=2+\sqrt{2}\end{cases}$.

$$\Rightarrow dt=\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{1}{2\sqrt{x+3}}\right)dx=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}}{2\sqrt{(x+1)(x+3)}}dx=t.\frac{dx}{2\sqrt{(x+1)(x+3)}}$$

$$\Rightarrow\frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+3)}}=\frac{2dt}{t}\Rightarrow I=2\int_{1+\sqrt{3}}^{2+\sqrt{2}}\frac{dt}{t}=2\ln|t|\Big|_{1+\sqrt{3}}^{2+\sqrt{2}}=2\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}\right)$$

Câu 3.

Thực hiện các yêu cầu dưới đây

a) Cho $I=\int_a^2\left(4+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}\right)dx=\frac{28}{3}$, tính $6a+\sqrt{1+a^3}$

b) Cho $I=\int_{\sqrt{5}}^a\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}=\frac{1}{4}\ln\frac{5}{3},\ \left(a>\sqrt{5}\right)$, tính a^2

Lời giải

a) Ta có $I=\int_a^2 4dx+\int_a^2\frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx$

Tính $B=\int_a^2\frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx$. Đặt $\sqrt{1+x^3}=t\Rightarrow 1+x^3=t^2\Rightarrow x^2dx=\frac{2}{3}tdt$

Khi đó $B=\int_a^2\frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx=\frac{2}{3}\sqrt{1+x^3}\Big|_a^2=2-\frac{2}{3}\sqrt{1+b^3}$

Ta có $I=4x+\frac{2}{3}\sqrt{1+x^3}\Big|_a^2=10-\left(4a+\frac{2}{3}\sqrt{1+a^3}\right)$

$$\Leftrightarrow\frac{28}{3}=10-\left(4a+\frac{2}{3}\sqrt{1+a^3}\right)\Leftrightarrow 4a+\frac{2}{3}\sqrt{1+a^3}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow 6a+\sqrt{1+a^3}=1.$$

Vậy $P=6a+\sqrt{1+a^3}=1$.

b) Đặt $t=\sqrt{x^2+4}\Rightarrow t^2=x^2+4\Rightarrow tdt=xdx$. Đổi cận: $\begin{cases}x=\sqrt{5}\\x=a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=3\\t=\sqrt{a^2+4}\end{cases}$.

$$\Rightarrow I=\int_{\sqrt{5}}^{a}\frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2+4}}=\int_{3}^{\sqrt{a^2+4}}\frac{dt}{t^2-4}=\int_{3}^{\sqrt{a^2+4}}\frac{dt}{(t-2)(t+2)}=\frac{1}{4}\int_{3}^{\sqrt{a^2+4}}\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\right)dt$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|\Bigg|_3^{\sqrt{a^2+4}}=\frac{1}{4}\ln\left(5\cdot\frac{\sqrt{a^2+4}-2}{\sqrt{a^2+4}+2}\right)$$

Ta có $I=\frac{1}{4}\ln\frac{5}{3}\Leftrightarrow\frac{1}{4}\ln\left(5\cdot\frac{\sqrt{a^2+4}-2}{\sqrt{a^2+4}+2}\right)=\frac{1}{4}\ln\frac{5}{3},\left(a>\sqrt{5}\right)$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{a^2+4}-2}{\sqrt{a^2+4}+2}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow3\left(\sqrt{a^2+4}-2\right)=\sqrt{a^2+4}+2\Leftrightarrow\sqrt{a^2+4}=4\Leftrightarrow a=2\sqrt{3}\Rightarrow a^2=12.$$

Câu 4.

Tính các tích phân sau

a) $I=\int_4^6\sqrt{\frac{x-4}{x+2}}.\frac{1}{x+2}dx$

b) $I=\int_{-1}^1\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}.\frac{1}{(2-x)^2}dx$

c) $I=\int_5^{3\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{x^2-9}}dx$

d) $I=\int_0^1\frac{a}{\sqrt{3x^2+12}}dx$

Lời giải

a) Đặt $t=\sqrt{\frac{x-4}{x+2}}\Rightarrow t^2=\frac{x-4}{x+2}\Rightarrow x=\frac{2t^2+4}{1-t^2}\Leftrightarrow x=\frac{6}{1-t^2}-2\ (*)\Rightarrow dx=\frac{12tdt}{(1-t^2)^2}$

Từ $(*)\Rightarrow x+2=\frac{6}{1-t^2}\Rightarrow\frac{1}{x+2}=\frac{1-t^2}{6}$. Đổi cận $\begin{cases}x=4\Rightarrow t=0\\x=6\Rightarrow t=\frac{1}{2}\end{cases}$

$$\text{Vậy } I=\int_4^6\sqrt{\frac{x-4}{x+2}}.\frac{dx}{x+2}=\int_0^{\frac{1}{2}}t\frac{1-t^2}{6}.\frac{12tdt}{\left(1-t^2\right)^2}$$

$$=2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t^2}{1-t^2}dt=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1-t^2}-1\right)dt=2\left(\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-t\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=2\ln3-1.$$

b) Đặt $t=\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\Rightarrow t^3=\frac{2-x}{2+x}\ ,(*)\Rightarrow x=\frac{2-2t^3}{1+t^3}\Leftrightarrow x=\frac{4}{1+t^3}-2\ ,(**)\Rightarrow dx=\frac{-12t^2dt}{\left(1+t^3\right)^2}$

Từ $(*),(**)\Rightarrow 2-x=(2+x)t^3=\frac{4t^3}{1+t^3}\Rightarrow\frac{1}{(2-x)^2}=\frac{\left(1+t^3\right)^2}{16t^6}$. Đổi cận $\begin{cases}x=-1\Rightarrow t=\sqrt[3]{3}\\x=1\Rightarrow t=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\end{cases}$

Vậy $I=\int_{-1}^{1}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}.\frac{1}{(2-x)^2}dx=\int_{\sqrt[3]{3}}^{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}}t.\frac{(1+t^3)^2}{16t^6}.\frac{-12t^2dt}{(1+t^3)^2}=-\frac{3}{4}\int_{\sqrt[3]{3}}^{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}}\frac{dt}{t^3}=\frac{3}{8t^2}\Big|_{\sqrt[3]{3}}^{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}}=\frac{3}{8}\left(\sqrt[3]{9}-\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\right)$

c) Đặt $u=x+\sqrt{x^2-9}\Rightarrow du=\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}\right)dx=\frac{x+\sqrt{x^2-9}}{\sqrt{x^2-9}}dx=\frac{udx}{\sqrt{x^2-9}}\Rightarrow\frac{du}{u}=\frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}$.

Đổi cận $\begin{cases}x=5\Rightarrow u=9\\x=3\sqrt{5}\Rightarrow u=6+3\sqrt{5}\end{cases}\Rightarrow I=\int_9^{6+3\sqrt{5}}\frac{du}{u}=\left(\ln|u|\right)\Big|_9^{6+3\sqrt{5}}=\ln\left(\frac{2+\sqrt{5}}{3}\right)$.

d) $I=\int_0^1\frac{a}{\sqrt{3x^2+12}}dx=\frac{a}{\sqrt{3}}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx$

Đặt $u=x+\sqrt{x^2+4}\Rightarrow du=\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}}dx\Rightarrow\frac{du}{u}=\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$.

$$\Rightarrow I=\frac{a}{\sqrt{3}}\int_2^{1+\sqrt{5}}\frac{1}{u}du=\frac{a}{\sqrt{3}}(\ln u)\Big|_2^{1+\sqrt{5}}=\frac{a}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right|.$$

Câu 5.

Cho tích phân $\int_0^1\sqrt{\frac{x+3}{(x+1)^5}}dx=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{c}$, với a,b,c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Giá trị biểu thức $a+b+c$ bằng

A. 14 **B.** 20 **C.** 28 **D.** 38

Lời giải

Ta tách $I=\int_0^1\sqrt{\frac{x+3}{(x+1)^5}}dx=\int_0^1\sqrt{\frac{x+3}{x+1}}.\frac{dx}{(x+1)^2}$

Đổi biến, đặt $u=\frac{x+3}{x+1}\Rightarrow du=\frac{-2dx}{(x+1)^2}\Rightarrow\frac{dx}{(x+1)^2}=\frac{-du}{2}$

$$\Rightarrow I=\int_3^2\sqrt{u}.\frac{-du}{2}=\frac{1}{2}\int_2^3u^{\frac{1}{2}}du=\frac{1}{2}.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_2^3=\frac{1}{2}.\left(\frac{2\sqrt{27}}{3}-\frac{2\sqrt{8}}{3}\right)=\frac{\sqrt{27}-\sqrt{8}}{3}$$

$$\Rightarrow a=27,b=8,c=3\Rightarrow a+b+c=38.$$

Chọn ý **B**.

Câu 6.

Đặt $I_n=\int_0^1\left(\sqrt[n]{\frac{(x+1)^{2n}(2x^2+1)}{(x^2+1)^{2n+1}}}-\sqrt[n]{\frac{2x^2+1}{(x^2+1)^{n+1}}}\right)dx$. Tính $\lim\frac{I_n}{I_{n+1}}$.

A. 1 **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** -1 **D.** $\frac{3}{2}$

Lời giải

Ta có bước biến đổi sau $I_n = \int_0^1 \left(\sqrt[n]{\frac{2x^2+1}{x^2+1}} \cdot \frac{(x+1)^2}{(x^2+1)^2} - \sqrt[n]{\frac{2x^2+1}{x^2+1}} \cdot \frac{1}{x^2+1} \right) dx$

$$= \int_0^1 \sqrt[n]{\frac{2x^2+1}{x^2+1}} \cdot \frac{(x+1)^2 - (x^2+1)}{(x^2+1)^2} dx = \int_0^1 \sqrt[n]{\frac{2x^2+1}{x^2+1}} \cdot \frac{2x dx}{(x^2+1)^2}$$

Đến lúc này ta sẽ đổi biến. Đặt $u = \frac{2x^2+1}{x^2+1} \Rightarrow du = \frac{2x dx}{(x^2+1)}$

$$\Rightarrow I_n = \int_1^{\frac{3}{2}} \sqrt[n]{u} du = \int_1^{\frac{3}{2}} u^{\frac{1}{n}} du = \left. \frac{u^{\frac{n+1}{n}}}{\frac{n+1}{n}} \right|_1^{\frac{3}{2}} = \frac{n}{n+1} \cdot \left(\frac{3}{2}^{\frac{n+1}{n}} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{I_n}{I_{n+1}} = \frac{\frac{n}{n+1} \cdot \left(\frac{3}{2}^{\frac{n+1}{n}} - 1 \right)}{\frac{n+1}{n+2} \cdot \left(\frac{3}{2}^{\frac{n+2}{n+1}} - 1 \right)} \Rightarrow \lim \frac{I_n}{I_{n+1}} = 1$$

Chọn ý **A.**

Câu 7.

Cho tích phân $\int_1^2 \frac{\sqrt[3]{x-x^3}}{x^4} dx = -\frac{a}{b} \cdot \sqrt[3]{\frac{c}{d}}$ và a, b, c, d là các số nguyên dương, $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Giá trị biểu thức $a+b+c+d$ bằng

A. 48 **B.** 66 **C.** 41 **D.** 61

Lời giải

Ta có phép biến đổi sau $I = \int_1^2 \frac{\sqrt[3]{x-x^3}}{x^4} dx = \int_1^2 \sqrt[3]{\frac{x-x^3}{x^3}} \cdot \frac{1}{x^3} dx = \int_1^2 \sqrt[3]{\frac{1}{x^2} - 1} \cdot \frac{dx}{x^3}$

Đặt $y = \frac{1}{x^2} - 1 \Rightarrow dy = \frac{-2}{x^3} dx \Rightarrow \frac{dx}{x^3} = \frac{-dy}{2} \Rightarrow I = \int_0^{-\frac{3}{4}} \sqrt[3]{y} \cdot \frac{-dy}{2} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{3}{4}}^0 y^{\frac{1}{3}} dy = \frac{1}{2} \cdot \left. \frac{y^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} \right|_{-\frac{3}{4}}^0$

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\left(-\frac{3}{4} \right)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{-3}{8} \cdot \sqrt[3]{\frac{81}{256}} = \frac{-9}{32} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$$

$$\Rightarrow a = 9, b = 32, c = 3, d = 4 \Rightarrow a+b+c+d = 48$$

Chọn ý **A**.

Câu 8.

Cho $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Biết $f(x)=\int\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}-\frac{1}{x^2\sqrt{x^4+1}}\right)dx$. Biết $f\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\sqrt{30}+15}{3}$, GTNN của $f(x)$ bằng

A. $2\sqrt{2}+5$ **B.** 6 **C.** $\sqrt{2}+5$ **D.** 10

Lời giải

Ta có $f(x)=\int\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}-\frac{1}{x^2\sqrt{x^4+1}}\right)dx=\int\frac{x^4-1}{x^2\sqrt{x^4+1}}dx=\int\frac{x-\frac{1}{x^3}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}dx$

Đặt $x^2+\frac{1}{x^2}=y\Rightarrow dy=2\left(x-\frac{1}{x^3}\right)dx \Rightarrow f(x)=\int\frac{\frac{dy}{2}}{\sqrt{y}}=\int\frac{dy}{2\sqrt{y}}=\sqrt{y}+C=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+C$

Mà $f\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\sqrt{30}+5}{3}\Rightarrow C=5\Rightarrow f(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+5\geq\sqrt{2}+5\Rightarrow \min f(x)=\sqrt{2}+5.$

Chọn ý **C**.

Câu 9.

Đâu là họ các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{(x+1)\sqrt{x^2+2x-1}}{\left|x^2+2x-2\right|}$.

A. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2x-1}+1}{\sqrt{x^2+2x-1}-1}\right|-\sqrt{x^2+2x-1}+C$

B. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2x-1}+1}{\sqrt{x^2+2x-1}-1}\right|+\sqrt{x^2+2x-1}+C$

C. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2x-1}-1}{\sqrt{x^2+2x-1}+1}\right|-\sqrt{x^2+2x-1}+C$

D. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2x-1}-1}{\sqrt{x^2+2x-1}+1}\right|+\sqrt{x^2+2x-1}+C$

Lời giải

Nhận thấy $F(x)=\int\frac{(x+1)\sqrt{x^2+2x-1}}{\left|x^2+2x-2\right|}=\int\sqrt{\frac{x^2+2x-1}{\left(\left(x^2+2x-1\right)-1\right)^2}}.(x+1)dx$

Đặt $x^2+2x-1=\sin^2 t, t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow(x+1)dx=\sin t.\cos tdt$

$$\Rightarrow F(x)=G(t)=\int\sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^4 t}}.\sin t.\cos tdt=\int\frac{\sin^2 t}{\cos t}dt=\int\frac{1-\cos^2 t}{\cos t}dt$$

$$=\int\frac{1}{\cos t}dt-\int\cos tdt=\frac{\ln|\sin t+1|-\ln|\sin t-1|}{2}-\sin t+C$$

Bây giờ, ta mới "trả lại tên cho em"

$$\Rightarrow F(x)=\frac{\ln\left|\sqrt{x^2+2x-1}+1\right|-\ln\left|\sqrt{x^2+2x-1}-1\right|}{2}-\sqrt{x^2+2x-1}+C$$

$$\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2x-1}+1}{\sqrt{x^2+2x-1}-1}\right|-\sqrt{x^2+2x-1}+C$$

Chọn ý **A.**

Câu 10.

Cho $\int_{\frac{7}{8}}^{\frac{5}{3}}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}dx=\frac{a}{b}+\ln\sqrt{\frac{c}{d}}$, với a,b,c,d là các số nguyên dương, $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Giá trị biểu thức $a+b+c+d$ bằng

A. 104 **B.** 238 **C.** 204 **D.** 190

Lời giải

Có $I=\int_{\frac{7}{8}}^{\frac{5}{3}}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}dx=\int_{\frac{7}{8}}^{\frac{5}{3}}\frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2+x+1}}dx$

$$=\int_{\frac{7}{8}}^{\frac{5}{3}}\frac{xdx}{\sqrt{x^2+x+1}}+\int_{\frac{7}{8}}^{\frac{5}{3}}\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}+\int_{\frac{7}{8}}^{\frac{5}{3}}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}=M+N+P$$

Xét bổ đề $\int\frac{dx}{x^2+x+1}=\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|$ (Bổ đề này để các bạn tự chứng minh nhé).

$$M=\int_{\frac{7}{8}}^{\frac{5}{3}}\frac{xdx}{\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{1}{2}\int_{\frac{7}{8}}^{\frac{5}{3}}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx-\frac{1}{2}\int_{\frac{7}{8}}^{\frac{5}{3}}\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$\Rightarrow M+N=\frac{1}{2}\int_{\frac{7}{8}}^{\frac{5}{3}}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx+\frac{1}{2}\int_{\frac{7}{8}}^{\frac{5}{3}}\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}=\sqrt{x^2+x+1}\Big|_{\frac{7}{8}}^{\frac{5}{3}}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|\Big|_{\frac{7}{8}}^{\frac{5}{3}}$$

$$\Rightarrow M+N=\frac{17}{24}+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{9}{2}-\ln 3\right)=\frac{17}{24}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$$

$P=\int_{\frac{7}{8}}^{\frac{5}{3}}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$. Đặt $x=\frac{1}{t}\Rightarrow dx=\frac{-dt}{t^2}$

$$\Rightarrow P=-\int_{\frac{8}{7}}^{\frac{3}{5}}\frac{tdt}{t^2.\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}+1}}=\int_{\frac{3}{5}}^{\frac{8}{7}}\frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}}=\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+1}\right|\Big|_{\frac{3}{5}}^{\frac{8}{7}}=\ln\frac{7}{2}-\ln\frac{5}{2}=\ln\frac{7}{5}$$

$$\Rightarrow I=M+N+P=\frac{17}{24}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{7}{5}=\frac{17}{24}+\ln\sqrt{\frac{147}{50}}$$

$$\Rightarrow a=17,b=24,c=147,d=50\Rightarrow a+b+c+d=238$$

Chọn ý **B**.

Câu 11.

Cho tích phân $I=\int_1^{\frac{3}{2}}\sqrt{\sqrt{\sqrt{3-2x}+1}+\sqrt{2}}dx=a^{\frac{1}{4}}\left(\frac{b}{c}-\frac{\cos\frac{9\pi}{8}}{a+1}-\frac{\cos\frac{7\pi}{8}}{a-1}\right)$, với a,b,c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Biểu thức $a+b+c$ có giá trị bằng

A. 38 **B.** 53 **C.** 87 **D.** 58

Lời giải

Nhận thấy $3-2x=1-(2x-2)$ nên ta đặt $2x-2=\sin^2 t, t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dx=\frac{\sin 2t}{2}dt$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sqrt{\cos t+1}+\sqrt{2}}\sin 2tdt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sqrt{2}.\cos\frac{t}{2}+\sqrt{2}}\sin 2tdt=\frac{\sqrt[4]{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos\frac{t}{2}+1}\sin 2tdt$$

$$=\frac{\sqrt[4]{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\cos\frac{t}{4}.\sin 2tdt=\frac{\sqrt[4]{8}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\frac{9t}{4}+\sin\frac{7t}{4}}{2}dt=-\frac{\sqrt[4]{8}}{4}\left(\frac{\cos\frac{9t}{4}}{\frac{9}{4}}+\frac{\cos\frac{7t}{4}}{\frac{7}{4}}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\sqrt[4]{8}\left(\left(\frac{\cos\frac{9\pi}{8}}{9}+\frac{\cos\frac{7\pi}{8}}{7}\right)-\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{7}\right)\right)=8^{\frac{1}{4}}\left(\frac{16}{63}-\frac{\cos\frac{9\pi}{8}}{9}-\frac{\cos\frac{7\pi}{8}}{7}\right)$$

$$\Rightarrow a=8,b=16,c=63\Rightarrow a+b+c=87$$

Chọn ý **C.**

Câu 12.

Cho $F(x)=\int\frac{x-2}{(x+2)\sqrt{4x^2+6x+5}}dx$. Biết $F(0)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}+\sqrt{5}\right)+\frac{4}{3}\ln\left(\sqrt{\frac{5}{4}}-\frac{1}{6}\right)$. Gọi M là GTNN của $F(x)$ trên đoạn $[1;3]$. M có giá trị xấp xỉ bằng

A. 0.3364 **B.** 0.3365 **C.** 0.3367 **D.** 0.3368

Lời giải

Có $F(x)=\int\frac{x-2}{(x+2)\sqrt{4x^2+6x+5}}dx=\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+6x+5}}-4\int\frac{dx}{(x+2)\sqrt{4x^2+6x+5}}=I-4J$

Bổ đề $\int\frac{dx}{\sqrt{(ax+b)^2+c}}=\frac{1}{a}\ln\left|ax+b+\sqrt{(ax+b)^2+c}\right|+C$ (Các bạn tự chứng minh bổ đề nhé)

Có $I=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(2x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}}=\frac{1}{2}\ln\left|2x+\frac{3}{2}+\sqrt{4x^2+6x+5}\right|+C$

Ta có $J=\int\frac{dx}{(x+2)\sqrt{4x^2+6x+5}}$. Đặt $x+2=\frac{1}{t}\Rightarrow\begin{cases}dx=\frac{-dt}{t^2}\\x=\frac{1}{t}-2\end{cases}$

$$\Rightarrow J=\int\frac{1}{\frac{1}{t}\cdot\sqrt{4\left(\frac{1}{t}-2\right)^2+6\left(\frac{1}{t}-2\right)+5}}\cdot\frac{-dt}{t^2}=-\int\frac{dt}{t\sqrt{\frac{4}{t^2}-\frac{10}{t}+9}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{9t^2-10t+4}}$$

$$\Rightarrow J=-\int\frac{dt}{\sqrt{\left(3t-\frac{5}{3}\right)^2+\frac{11}{9}}}=-\frac{1}{3}\ln\left|3t-\frac{5}{3}+\sqrt{9t^2-10t+4}\right|$$

$$=-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{3}{x+2}-\frac{5}{3}+\sqrt{\frac{9}{(x+2)^2}-\frac{10}{x+2}+4}\right|$$

$$\Rightarrow F(x)=I-4J=\frac{1}{2}\ln\left|2x+\frac{3}{2}+\sqrt{4x^2+6x+5}\right|+\frac{4}{3}\ln\left|\frac{3}{x+2}-\frac{5}{3}+\sqrt{\frac{9}{(x+2)^2}-\frac{10}{x+2}+4}\right|$$

(Vì $F(0)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}+\sqrt{5}\right)+\frac{4}{3}\ln\left(\sqrt{\frac{5}{4}}-\frac{1}{6}\right)\Rightarrow C=0$)

Xét $F'(x)=\frac{x-2}{(x+2)\sqrt{4x^2+6x+5}}$

$\Rightarrow F'(x)=0\Leftrightarrow x=2, F'(x)<0\Leftrightarrow x\in[1;2), F'(x)>0\Leftrightarrow x\in(2;3]$

$\Rightarrow F(x)$ đạt min tại $x=2$. Bấm máy tính ta được $F(2)\approx 0.3367$

Chọn ý **C.**

Câu 13.

Cho $F(m)=3\int_{-1}^{m}\frac{x^4-x-1}{x^2+\sqrt{x+1}}dx$. Tìm khoảng đồng biến của $\frac{F(m)}{m+1}$

A. $(-1;0)$ **B.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ **C.** $\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **D.** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};+\infty\right)$

Lời giải

Ta có $F(m)=3\int_{-1}^{m}\frac{x^4-x-1}{x^2+\sqrt{x+1}}dx=3\int_{-1}^{m}\frac{(x^4-x-1)(x^2-\sqrt{x+1})}{(x^2+\sqrt{x+1})(x^2-\sqrt{x+1})}dx$

$$=\int_{-1}^{m}\left(x^2-\sqrt{x+1}\right)dx=3\left.\left(\frac{x^3}{3}-\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\right|_{-1}^{m}=\left.\left(x^3-2(x+1)\sqrt{x+1}\right)\right|_{-1}^{m}$$

$$\Rightarrow F(m)=m^3-2(m+1)\sqrt{m+1}+1\Rightarrow\frac{F(m)}{m+1}=m^2-m+1-2\sqrt{m+1}=G(m)$$

Có $G'(m)=2m-1-\dfrac{1}{\sqrt{m+1}}$, $G(m)$ đồng biến $\Leftrightarrow G'(m)>0$

$\Rightarrow (2m-1)\sqrt{m+1}>0 \Rightarrow m>\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m\in\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2};+\infty\right]$

Chọn ý **D.**

Câu 14.

Cho $I=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\dfrac{dx}{x+1+\sqrt{2x+1}}=\dfrac{8}{3}-2\sqrt{2}+\ln a-\ln\left(b+\sqrt{c}\right)$. Với a,b,c là các số nguyên dương. Biểu thức $a+b+c$ có giá trị bằng

A. 10 **B.** 25 **C.** 15 **D.** 20

Lời giải

Ta có $I=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\dfrac{dx}{x+1+\sqrt{2x+1}}=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\dfrac{x+1-\sqrt{2x+1}}{x^2}dx=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\sqrt{2x+1}}{x^2}\right)dx$

$$=\ln|x|\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}-\dfrac{1}{x}\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}-\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\dfrac{\sqrt{2x+1}}{x^2}dx=\ln 3+\dfrac{4}{3}-J$$

Đặt $2x=\tan^2 t, t\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dx=\dfrac{\tan t}{\cos^2 t}dt$

$$\Rightarrow J=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sqrt{\tan^2 t+1}}{\dfrac{\tan^2 t}{4}}.\dfrac{\tan t}{\cos^2 t}dt=4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{dt}{\sin^3 t}$$

Đặt $\begin{cases}u=\dfrac{1}{\sin t}\\ dv=\dfrac{1}{\sin^2 t}dt\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{-\cos t}{\sin^2 t}dt\\ v=-\cot t=\dfrac{-\cos t}{\sin t}\end{cases}\Rightarrow \dfrac{J}{4}=\dfrac{-\cos t}{\sin^2 t}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\cos^2 t}{\sin^3 t}dt$

$$\Rightarrow\dfrac{J}{4}=\sqrt{2}-\dfrac{2}{3}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-\sin^2 t}{\sin^3 t}dt=\sqrt{2}-\dfrac{2}{3}-\dfrac{J}{4}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{dt}{\sin t}$$

$$\Rightarrow\dfrac{J}{2}=\left(\sqrt{2}-\dfrac{2}{3}\right)-\ln\left|\dfrac{\cos t+1}{\sin t}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\Rightarrow J=2\sqrt{2}-\dfrac{4}{3}-2\left(\ln\sqrt{3}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow I=2\ln 3-2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\dfrac{8}{3}-2\sqrt{2}=\dfrac{8}{3}-2\sqrt{2}+\ln 9-\ln\left(3+\sqrt{8}\right)$$

$$\Rightarrow a=9,b=3,c=8\Rightarrow a+b+c=20$$

Chọn ý **D.**

TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC

Câu 15.

Cho $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $I=\int_1^a f'(x)\sqrt{f(x)}dx$. Biết rằng

$$f(x)+f(y)=\frac{x^3}{2018y}+\frac{2018x}{y^3} \text{ và } f(1)=m \text{ là hằng số.}$$

Tìm GTNN của I theo m

A. m **B.** $1-m\sqrt{m}$ **C.** $\frac{2}{3}\left(1-m\sqrt{m}\right)$ **D.** $\frac{3}{2}\left(1-m\sqrt{m}\right)$

Lời giải

Thay $y=x \Rightarrow 2f(x)=\frac{x^2}{2018}+\frac{2018}{x^2}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2018}+\frac{2018}{x^2}\right)\ge 1$

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{x} \\ dv=f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}dx \\ v=f(x) \end{cases}$

$$\Rightarrow I=f(x)\sqrt{f(x)}\Big|_1^a-\int_1^a \frac{f'(x)f(x)}{2\sqrt{f(x)}}dx=f(a)\sqrt{f(a)}-m\sqrt{m}-\frac{1}{2}I$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}I=f(a)\sqrt{f(a)}-m\sqrt{m}\ge 1-m\sqrt{m}\Rightarrow I\ge\frac{2}{3}\left(1-m\sqrt{m}\right)\Rightarrow \min I=\frac{2}{3}\left(1-m\sqrt{m}\right)$$

Chọn ý **C.**

Câu 16.

Tính nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2\sqrt{x^2+a}$ theo a.

A. $\dfrac{\left(2x^3+ax\right)\sqrt{x^2+a}-a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|}{6}+C$

B. $\dfrac{\left(2x^3+ax\right)\sqrt{x^2+a}+a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|}{6}+C$

C. $\dfrac{\left(2x^3+ax\right)\sqrt{x^2+a}-a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|}{8}+C$

D. $\dfrac{\left(2x^3+ax\right)\sqrt{x^2+a}+a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|}{8}+C$

Lời giải

Ta đi tính $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\int\frac{\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\right)dx}{\sqrt{x^2+a}.\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\right)}=\int\frac{d\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)}{x+\sqrt{x^2+a}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C$

Tiếp tục tính $J=\sqrt{x^2+a}dx$. Đặt $\begin{cases}u=\sqrt{x^2+a}\\ dv=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+a}}\\ v=x\end{cases}$

$$\Rightarrow J=x\sqrt{x^2+a}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a}}=x\sqrt{x^2+a}-\int\frac{x^2+a-a}{\sqrt{x^2+a}}dx=$$

$$=x\sqrt{x^2+a}-\int\sqrt{x^2+a}+a\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=x\sqrt{x^2+a}-J+aI$$

$$\Rightarrow 2J=x\sqrt{x^2+a}+a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C\Rightarrow J=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a}+\frac{a}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C$$

Cuối cùng tính $K=\int x^2\sqrt{x^2+a}dx$. Đặt $\begin{cases}u=x\\ dv=x\sqrt{x^2+a}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=\dfrac{1}{3}\left(x^2+a\right)\sqrt{x^2+a}\end{cases}$

$$\Rightarrow K=\frac{x}{3}\left(x^2+a\right)\sqrt{x^2+a}-\frac{1}{3}\int\left(x^2+a\right)\sqrt{x^2+a}dx=\frac{x}{3}\left(x^2+a\right)\sqrt{x^2+a}-\frac{1}{3}K-\frac{a}{3}J$$

$$\Rightarrow 4K=x\left(x^2+a\right)\sqrt{x^2+a}-a\left(\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a}+\frac{a}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right)$$

$$\Rightarrow K=\frac{x^3+ax}{4}\sqrt{x^2+a}-\frac{ax}{8}\sqrt{x^2+a}-\frac{a^2}{8}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|=\frac{\left(2x^3+ax\right)\sqrt{x^2+a}-a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|}{8}+C$$

Chọn ý **C.**

Câu 17.

Cho $I=\int_0^{\sqrt{3}}\dfrac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x+1\right)}=\dfrac{a\pi+b\ln 2+c\ln 3}{6}$ với a,b,c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $a+b+c$

A. 6 **B.** 4 **C.** 0 **D.** –2

Lời giải

Ta thử sử dụng lượng giác để phá căn như sau

Đặt $x=\cot u,u\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dx=\dfrac{-du}{\sin^2 u}$

$$\Rightarrow I=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\frac{du}{\sin^2 u}}{\left(\cot^2 u+1\right)\left(\sqrt{\cot^2 u+1}+\cot u+1\right)}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{\sin^2 u.\dfrac{1}{\sin^2 u}\left(\dfrac{1}{\sin u}+\dfrac{\cos u}{\sin u}+1\right)}$$

$$\Rightarrow I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u}{\sin u+\cos u+1}du=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin\frac{u}{2}.\cos\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}.\cos\frac{u}{2}+2\cos^2\frac{u}{2}}du=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}+\cos\frac{u}{2}}du$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\frac{u}{2}+\cos\frac{u}{2}+\sin\frac{u}{2}-\cos\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}+\cos\frac{u}{2}}du=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{\cos\frac{u}{2}-\sin\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}+\cos\frac{u}{2}}\right)du=\frac{x}{2}\bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}-\ln\left|\sin\frac{u}{2}+\cos\frac{u}{2}\right|\bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow 2I=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}-\ln(1+\sin u)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{3}-\left(\ln 2-\ln\frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow I=\frac{\pi}{6}-\ln 2+\ln\frac{3}{2}=\frac{\pi-6\ln 2+3\ln 3}{6}\Rightarrow a=1,b=-6,c=3\Rightarrow a+b+c=-2$$

Chọn ý **D.**

Câu 18.

Cho $\int_0^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}dx=a-\frac{b}{c}\sqrt{3}-\frac{\pi}{d}$ với a,b,c,d là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $ac+bd$

A. 22 **B.** 24 **C.** 26 **D.** 28

Lời giải

Đặt $\sqrt{x}=\cos u,u\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dx=d\left(\cos^2 u\right)=-2\sin u.\cos udu$

$$\Rightarrow\int_0^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\frac{1-\cos u}{1+\cos u}}.-2\sin u.\cos udu=2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{u}{2}}{2\cos^2\frac{u}{2}}}\sin u.\cos udu$$

$$=2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\frac{u}{2}}{\cos\frac{u}{2}}\sin u.\cos udu=2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2\frac{u}{2}.\cos udu=2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos u).\cos udu$$

$$=2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos udu-\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2 udu=2\sin u\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2u+1)du$$

$$=2-\sqrt{3}-\left(\frac{\sin 2u}{2}+x\right)\bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=2-\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{6}\Rightarrow a=2,b=3,c=4,d=6\Rightarrow ac+bd=26$$

Chọn ý **C.**

Câu 19.

Giả sử tồn tại $f(x)$ và $g(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)g'(x)=g(x)f'(x)$. Biết rằng $f(1)=2g(1)=4$ và $f(0)=3g(0)=9$, tính giá trị của biểu thức tích phân $\int_0^1 \frac{g'(x)\sqrt{f(x)}\ln\sqrt{g(x)}}{g(x)}dx$.

A. $\ln 4+\ln 9-2$ **B.** $\ln 4-\ln 27+2$ **C.** $\ln 4-\ln 9+2$ **D.** $\ln 4-\ln 27-2$

Lời giải

Ta có $f(x)g'(x)=g(x)f'(x)\Rightarrow \frac{g'(x)}{g(x)}=\frac{f'(x)}{f(x)}$

$$\Rightarrow I=\int_0^1 \frac{g'(x)\sqrt{f(x)}\ln\sqrt{g(x)}}{g(x)}dx=\int_0^1 \frac{f'(x)\sqrt{f(x)}\ln\sqrt{g(x)}}{f(x)}dx=\int_0^1 \frac{f'(x)\ln\sqrt{g(x)}}{\sqrt{f(x)}}dx$$

Đặt $\begin{cases} u=\ln\sqrt{g(x)} \\ dv=\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} du=\frac{\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}}{\sqrt{g(x)}}dx=\frac{g'(x)}{2g(x)}dx \\ v=2\sqrt{f(x)} \end{cases}$

$$\Rightarrow I=2\sqrt{f(x)}.\ln\sqrt{g(x)}\Big|_0^1-\int_0^1\sqrt{f(x)}.\frac{g'(x)}{g(x)}dx=\sqrt{f(x)}.\ln g(x)\Big|_0^1-\int_0^1\sqrt{f(x)}.\frac{f'(x)}{f(x)}dx$$

$$=\sqrt{f(1)}.\ln g(1)-\sqrt{f(0)}.\ln g(0)-\int_0^1\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx=2\ln 2-3\ln 3-2\sqrt{f(x)}\Big|_0^1=\ln 4-\ln 27+2$$

Chọn ý **B.**

Câu 20.

Ta đặt $F_n(x)=\int\frac{\sqrt[n]{x-x^n}}{x^{n+1}}dx$. Biết $F_n(1)=0\ \forall n$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}F_n(2)$.

A. 1 **B.** $-\infty$ **C.** -1 **D.** $+\infty$

Lời giải

Ta có $F_n(x)=\int\frac{\sqrt[n]{x-x^n}}{x^{n+1}}dx=\int\frac{\sqrt[n]{x^n\left(\frac{1}{x^{n-1}}-1\right)}}{x^{n+1}}dx=\int\frac{\sqrt[n]{\frac{1}{x^{n-1}}-1}}{x^n}dx$

Đặt $u=\frac{1}{x^{n-1}}-1\Rightarrow du=\frac{1-n}{x^n}dx\Rightarrow\frac{dx}{x^n}=\frac{du}{1-n}$

$$\Rightarrow F_n(x)=G_n(u)=\int\frac{\sqrt[n]{u}}{1-n}du=\frac{1}{1-n}.\frac{u^{\frac{n+1}{n}}}{\frac{n+1}{n}}+C$$

$$\Rightarrow F_n(x)=\frac{n}{1-n^2}.\left(\frac{1}{x^{n-1}}-1\right)^{\frac{n+1}{n}}+C.\ \text{Mà } F_n(1)=0\ \forall n\Rightarrow C=0\ \forall n$$

$$\Rightarrow F_n(2)=\frac{n}{1-n^2}\left(\frac{1}{2^{n-1}}-1\right)^{\frac{n+1}{n}}.\text{ Có }\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{1-n^2}=-\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}}-1\right)=-1\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}F_n(2)=+\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}=1\end{cases}$$

Chọn ý **D.**

Câu 21.

Cho tích phân $\int_{\ln3}^{\ln8}\sqrt{e^x+1}dx=a\ln3+b\ln2+c$ với a,b,c là các số nguyên dương. Tính $-a+b+c$

A. 2 **B.** 0 **C.** -2 **D.** 4

Lời giải

Ta có phép biết đổi rất linh hoạt như sau

$$I=\int_{\ln3}^{\ln8}\sqrt{e^x+1}dx=\int_{\ln3}^{\ln8}\frac{e^x+1}{\sqrt{e^x+1}}dx=\int_{\ln3}^{\ln8}\frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx+\int_{\ln3}^{\ln8}\frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}.\frac{dx}{e^x+1-1}$$

$$\Rightarrow I=2\sqrt{e^x+1}\Big|_{\ln3}^{\ln8}+\int_{\ln3}^{\ln8}\frac{e^x}{2\sqrt{e^x+1}}\left(\frac{1}{\sqrt{e^x+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right)dx$$

$$\Rightarrow I=6-4+\int_{\ln3}^{\ln8}\left(\frac{1}{\sqrt{e^x+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right).d\left(\sqrt{e^x+1}\right)=2+\ln\left(\sqrt{e^x+1}-1\right)\Big|_{\ln3}^{\ln8}-\ln\left(\sqrt{e^x+1}+1\right)\Big|_{\ln3}^{\ln8}$$

$$\Rightarrow I=2+\ln2-(\ln4-\ln3)=\ln3-\ln2+2\Rightarrow a=1,b=-1,c=2\Rightarrow -a+b+c=0$$

Chọn ý **B.**

Câu 22.

Tính tích phân $I=\int_{-2}^{2}\frac{\sqrt{4-x^2}}{4^x+1}dx$

A. 4 **B.** π **C.** 2π **D.** 2

Lời giải

Đặt $x=-t\Rightarrow dx=-dt$

$$\Rightarrow I=\int_{2}^{-2}\frac{\sqrt{4-t^2}}{4^{-t}+1}dt=\int_{-2}^{2}\frac{4^t\sqrt{4-t^2}}{4^t+1}dt=\int_{-2}^{2}\frac{4^x\sqrt{4-x^2}}{4^x+1}dx$$

$$\Rightarrow 2I=\int_{-2}^{2}\frac{4^x\sqrt{4-x^2}}{4^x+1}dx+\int_{-2}^{2}\frac{\sqrt{4-x^2}}{4^x+1}dx=\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx$$

Đặt $x=2\sin u,\ u\in\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dx=2\cos udu$

$$\Rightarrow 2I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2u}.2\cos udu=2\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}2\cos^2udu$$

$$\Rightarrow I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}(\cos 2u+1)du=\frac{\sin 2u}{2}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}+x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}=\pi$$

Chọn ý **B.**

Câu 23.

Tính nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x\sqrt{x}}}$.

A. $\frac{4}{9}\left(\sqrt{1+x\sqrt{x}}\right)^3+C$

B. $\frac{2}{9}\left(\sqrt{1+x\sqrt{x}}\right)^3+C$

C. $\frac{4}{3}\left(\sqrt{1+x\sqrt{x}}\right)^3+C$

D. $\frac{2}{3}\left(\sqrt{1+x\sqrt{x}}\right)^3+C$

Lời giải

Ta có $I=\int\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x\sqrt{x}}}dx=\int\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sqrt{x}}}dx+\int\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x\sqrt{x}}}dx$

$I_1=\int\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sqrt{x}}}dx$. Đặt $t=\sqrt{1+x\sqrt{x}}\Rightarrow t^2-1=x\sqrt{x}\Rightarrow x^3=(t^2-1)^2\Rightarrow x^2dx=\frac{4}{3}t(t^2-1)dt$

$$\Rightarrow I_1=\int\frac{4}{3}(t^2-1)dt=\frac{4}{9}t^3-\frac{4}{3}t+C_1=\frac{4}{9}\left(\sqrt{1+x\sqrt{x}}\right)^3-\frac{4}{3}\sqrt{1+x\sqrt{x}}+C_1$$

$I_2=\int\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x\sqrt{x}}}dx=\dfrac{2}{3}\int\dfrac{d\left(1+x\sqrt{x}\right)}{1+x\sqrt{x}}=\dfrac{4}{3}\sqrt{1+x\sqrt{x}}+C_2$

$\Rightarrow I=I_1+I_2=\frac{4}{9}\left(\sqrt{1+x\sqrt{x}}\right)^3+C$

Chọn ý **A.**

Câu 24.

Cho tích phân $\int_0^3\dfrac{x^2}{\left(1+\sqrt{1+x}\right)^2\left(2+\sqrt{1+x}\right)^2}dx=a+b\ln\dfrac{4}{3}$. Tính ab.

A. -634 **B.** 504 **C.** 634 **D.** -504

Lời giải

Ta đặt $2+\sqrt{1+x}=t\Rightarrow 1+x=t^2-4t+4\Rightarrow dx=2(t-2)dt$

$\Rightarrow I=\int_3^4\dfrac{(t^2-4t+3)^2}{(t-1)^2t^2}.2(t-2)dx=2\int_3^4\dfrac{(t-3)^2(t-2)}{t^2}dt$.

Bằng phương pháp giải hàm phân thứ hữu tỉ quen thuộc ta tách được

$$I=2\int_3^4\left(t-8+\frac{21}{t}-\frac{18}{t^2}\right)dt=2.\left(\frac{t^2}{2}-8t+21\ln|t|+\frac{18}{t}\right)\Big|_3^4=-12+42\ln\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow a=-12, b=42\Rightarrow ab=-504$$

Chọn ý **D.**

Câu 25.

Biết $\int_1^2\left(\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}+2\sqrt[3]{\frac{1}{x^8}-\frac{1}{x^{11}}}\right)dx=\frac{a}{b}\sqrt[3]{c}$, với a,b,c nguyên dương, $\frac{a}{b}$ tối giản và $c<a$. Tính $S=a+b+c$?

A. $S=51$ **B.** $S=67$ **C.** $S=39$ **D.** $S=75$

Lời giải

Ta có $\int_1^2\left(\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}+2\sqrt[3]{\frac{1}{x^8}-\frac{1}{x^{11}}}\right)dx=\int_1^2\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}\left(1+\frac{2}{x^3}\right)dx$.

Đặt $t=\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}\Rightarrow t^3=x-\frac{1}{x^2}\Rightarrow 3t^2dt=\left(1+\frac{2}{x^3}\right)dx$.

Khi đó $\int_1^2\left(\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}+2\sqrt[3]{\frac{1}{x^8}-\frac{1}{x^{11}}}\right)dx=\int_0^{\sqrt[3]{\frac{7}{4}}}3t^3dt=\left.\frac{3}{4}t^4\right|_0^{\sqrt[3]{\frac{7}{4}}}=\frac{21}{32}\sqrt[3]{14}$.

Chọn ý **B.**

Câu 26.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\frac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}dx=\frac{2\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{x+5}+C$. Nguyên hàm của hàm số $f(2x)$ trên tập $\mathbb{R}^+$ là:

A. $\frac{x+3}{2\left(x^2+4\right)}+C$ **B.** $\frac{x+3}{x^2+4}+C$ **C.** $\frac{2x+3}{4\left(x^2+1\right)}+C$ **D.** $\frac{2x+3}{8\left(x^2+1\right)}+C$

Lời giải

Theo giả thiết ta có :

$$\int\frac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}dx=\frac{2\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{x+5}+C\Leftrightarrow 2\int f\left(\sqrt{x+1}\right)d\left(\sqrt{x+1}\right)=\frac{2\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2+4}+C.$$

Hay $2\int f(t)dt=\frac{2(t+3)}{t^2+4}+C\Rightarrow\int f(t)dt=\frac{t+3}{t^2+4}+\frac{C}{2}$.

Suy ra $\int f(2x)dx=\frac{1}{2}\int f(2x)d(2x)=\frac{1}{2}\left(\frac{2x+3}{(2x)^2+4}+\frac{C}{2}\right)=\frac{2x+3}{8x^2+8}+\frac{C}{4}$

Chọn ý **D.**

Câu 27.

Tìm tất cả các giá trị dương của tham số m sao cho $\int_0^m xe^{\sqrt{x^2+1}}dx=2^{500}.e^{\sqrt{m^2+1}}$.

A. $m=2^{250}\sqrt{2^{500}-2}$ **B.** $m=\sqrt{2^{1000}+1}$ **C.** $m=2^{250}\sqrt{2^{500}+2}$ **D.** $m=\sqrt{2^{1000}-1}$

Lời giải

Ta có $\int_0^m xe^{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_1^{\sqrt{m^2+1}} te^t dt = \left(te^t - e^t\right)\Big|_1^{\sqrt{m^2+1}} = \left(\sqrt{m^2+1}-1\right)e^{\sqrt{m^2+1}}$

Theo giả thiết ta có

$$\int_0^m xe^{\sqrt{x^2+1}}dx = 2^{500}.e^{\sqrt{m^2+1}} \Leftrightarrow 2^{500}.e^{\sqrt{m^2+1}} = \left(\sqrt{m^2+1}-1\right)e^{\sqrt{m^2+1}} \Leftrightarrow 2^{500} = \sqrt{m^2+1}-1$$

$$\Leftrightarrow m^2+1 = \left(2^{500}+1\right)^2 \Leftrightarrow m^2 = 2^{1000}+2^{501} = 2^{500}\left(2^{500}+2\right) \Rightarrow m = 2^{250}\sqrt{2^{500}+2}.$$

Chọn ý **C.**

Câu 28.

Giả sử a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $\int\limits_0^4 \frac{2x^2+4x+1}{\sqrt{2x+1}}dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^3 \left(au^4+bu^2+c\right)du$, trong đó $u = \sqrt{2x+1}$. Tính giá trị $S = a+b+c$

A. $S = 3$ **B.** $S = 0$ **C.** $S = 1$ **D.** $S = 2$

Lời giải

Đặt $u = \sqrt{2x+1} \Rightarrow u^2 = 2x+1 \Rightarrow \begin{cases} udu = dx \\ x = \dfrac{u^2-1}{2} \end{cases}$

Khi đó tích phân cần tính trở thành

$$\int\limits_0^4 \frac{2x^2+4x+1}{\sqrt{2x+1}}dx = \int\limits_1^3 \frac{2\left(\frac{u^2-1}{2}\right)^2+4\left(\frac{u^2-1}{2}\right)+1}{u}u.du = \frac{1}{2}\int\limits_1^3 \left(u^4+2u^2-1\right).du$$

Vậy $S = a+b+c = 1+2-1 = 2$.

Chọn ý **D.**

Câu 29.

Biết $\int\limits_0^4 \frac{\sqrt{2x+1}dx}{2x+3\sqrt{2x+1}+3} = a+b\ln 2+c\ln\frac{5}{3}\left(a,b,c\in\mathbb{Z}\right)$. Tính $T = 2a+b+c$.

A. $T = 4$ **B.** $T = 2$ **C.** $T = 1$ **D.** $T = 3$

Lời giải

Biến đổi tích phân cần tính ta được:

$$I = \int\limits_0^4 \frac{\sqrt{2x+1}dx}{2x+3\sqrt{2x+1}+3} = \int\limits_0^4 \frac{\sqrt{2x+1}dx}{\left(\sqrt{2x+1}+1\right)\left(\sqrt{2x+1}+2\right)}$$

$$= \int\limits_0^4 \frac{2\left(\sqrt{2x+1}+1\right)-\left(\sqrt{2x+1}+2\right)dx}{\left(\sqrt{2x+1}+1\right)\left(\sqrt{2x+1}+2\right)} = \int\limits_0^4 \frac{2dx}{\left(\sqrt{2x+1}+2\right)} - \int\limits_0^4 \frac{dx}{\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}.$$

Đặt $u = \sqrt{2x+1} \Rightarrow udu = dx$. Với $x = 0 \Rightarrow u = 1$, với $x = 4 \Rightarrow u = 3$.

Suy ra $I=\int_1^3 \frac{2udu}{u+2}-\int_1^3 \frac{udu}{u+1}=\int_1^3\left(2-\frac{4}{u+2}\right)du-\int_1^3\left(1-\frac{1}{u+1}\right)du$

$$=\left(u-4\ln|u+2|+\ln|u+1|\right)\Big|_1^3=2-4\ln\frac{5}{3}+\ln 2$$

$$\Rightarrow a=2,\ b=1,\ c=1\Rightarrow T=2.1+1-4=1.$$

Chọn ý **C.**

Câu 30.

Biết tích phân $\int_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}} \frac{1}{\sqrt{e^{2x}+1}-e^x}dx=1+\frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}+a\sqrt{a}-\sqrt{b}$ với $a,\ b\in\mathbb{Z}^+$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b$

A. $P=-1$. **B.** $P=1$. **C.** $P=3$. **D.** $P=5$.

Lời giải

Biến đổi tích phân ban đầu ta được

$$I=\int_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}} \frac{1}{\sqrt{e^{2x}+1}-e^x}dx=\int_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}}\left(\sqrt{e^{2x}+1}+e^x\right)dx=\int_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}}\sqrt{e^{2x}+1}dx+\int_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}}e^xdx$$

- Xét tích phân $\int_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}} e^xdx=e^x\Big|_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}}=2\sqrt{2}-\sqrt{3}$
- Xét tích phân $\int_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}}\sqrt{e^{2x}+1}dx$. Đặt $t=\sqrt{e^{2x}+1}\Leftrightarrow t^2=e^{2x}+1$

$\Rightarrow 2tdt=2e^{2x}dx\Leftrightarrow dx=\frac{tdt}{e^{2x}}=\frac{tdt}{t^2-1}$. Đổi cận: $\begin{cases}x=\ln\sqrt{3}\Rightarrow t=2\\ x=\ln\sqrt{8}\Rightarrow t=3\end{cases}$

Khi đó $\int_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}}\sqrt{e^{2x}+1}dx=\int_2^3\frac{t^2dt}{t^2-1}dt=\int_2^3\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=\left(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Bigg|_2^3=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$

Vậy $I=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}+2\sqrt{2}-\sqrt{3}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=3\end{cases}\Rightarrow P=a+b=5$

Chọn ý **D.**

Câu 31.

Biết $\int_1^4\sqrt{\frac{1}{4x}+\frac{\sqrt{x}+e^x}{\sqrt{x}e^{2x}}}dx=a+e^b-e^c$ với $a,\ b,\ c\in\mathbb{Z}$. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=-5$. **B.** $P=-4$. **C.** $P=-3$. **D.** $P=3$.

Lời giải

Biến đổi tích phân ban đầu ta có:

$$\int_1^4 \sqrt{\frac{1}{4x}+\frac{\sqrt{x}+e^x}{\sqrt{x}e^{2x}}}dx=\int_1^4 \sqrt{\frac{e^{2x}+4x+4e^x\sqrt{x}}{4xe^{2x}}}dx=\int_1^4 \sqrt{\frac{\left(e^x+2\sqrt{x}\right)^2}{\left(2e^x\sqrt{x}\right)^2}}dx$$

$$=\int_1^4 \frac{e^x+2\sqrt{x}}{2e^x\sqrt{x}}dx=\int_1^4\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{e^x}\right)dx=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{e^x}\right)\Bigg|_1^4=1-\frac{1}{e^4}+\frac{1}{e}=1+e^{-1}-e^{-4}$$

Vậy ta được $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-4 \end{cases} \Rightarrow P=a+b+c=-4.$

Chọn ý **B.**

Câu 32.

Biết $\int_0^2 \sqrt{\frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}}dx=a\pi+b\sqrt{2}+c$ với a, b, $c\in\mathbb{Z}$. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=-1$. **B.** $P=2$. **C.** $P=3$. **D.** $P=4$.

Lời giải

Đặt $\sqrt{x}=2\cos u$ với $u\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Suy ra $x=4\cos^2 u\Rightarrow dx=-4\sin 2udu$.

Khi đó tích phân ban đầu trở thành:

$$I=4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{2+2\cos u}{2-2\cos u}}\sin 2udu=8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}.\sin u.\cos udu$$

$$=16\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\frac{u}{2}.\cos udu=8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos u).\cos udu=8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos udu+4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2u)du$$

$$=8\sin u\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}+(4x+2.\sin 2u)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\pi-4\sqrt{2}+6\Rightarrow\begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ c=6 \end{cases}\Rightarrow P=3$$

Chọn ý **C.**

Câu 33.

Trong giải tích, $I=\int x^m\left(ax^n+b\right)^p dx$ với $a,b\in\mathbb{R}$ và $m,n,p\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ được gọi là tính được (*có thể biểu diễn bởi các hàm như đa thức, hữu tỷ, lượng giác, logarit, ...*) khi một trong các số $p,\frac{m+1}{n},p+\frac{m+1}{n}$ là số nguyên. Xét nguyên hàm $I=\int\frac{x^a dx}{\left(\sqrt[a]{x^5+1}\right)^6}$, hỏi có bao nhiêu số $a\in\{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ để I có thể tính được?

A. 5 **B.** 9 **C.** 4 **D.** 6

Lời giải

Ta viết lại nguyên hàm đã cho thành $I=\int x^{a}\left(x^{5}+1\right)^{-\frac{6}{a}}dx$ nên $m=a, n=5, p=-\dfrac{6}{a}$.

Theo đề bài ta chỉ cần có $-\dfrac{6}{a}\in\mathbb{Z}, \dfrac{a+1}{5}\in\mathbb{Z}, -\dfrac{6}{a}+\dfrac{a+1}{5}\in\mathbb{Z}$, suy ra $a\in\{2,3,4,5,6,9\}$

Chú ý. Đây là một bài toán về biến đổi lũy thừa, yếu tố nguyên hàm chỉ là phụ. Công thức trên có tên là định lý Chebyshev.

CHƯƠNG 5 NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN HÀM ĐẶC BIỆT

Ngoài các phương pháp tính nguyên hàm tích phân mà chúng ta đã biết và các dạng toán liên quen thì chương này ta sẽ cùng tìm hiểu một số phương pháp khác và một số loại tích phân đặc biệt có thể mà ta có thể gặp khác. Sau đây chúng ta sẽ cùng bắt đầu tìm hiểu!

I. TÍCH PHÂN LIÊN KẾT.

Có rất nhiều bài toán tích phân ta không thể sử dụng cách tính trực tiếp hoặc tính trực tiếp tương đối khó, với những bài toán như vậy ta thường sử dụng tới một kỹ thuật đó là tìm tích phân liên kết. Chủ yếu các bài toán sử dụng phương pháp này là các tích phân lượng giác hoặc có thể là hàm phân thức. Để hiểu rõ hơn, ta cùng tìm hiểu phương pháp sau.

Xét tích phân $I=\int_a^b f(x)dx$, ta sẽ tìm liên kết với tích phân $K=\int_a^b g(x)dx$ và tìm các mối liên hệ giữa I, K. Ta đi thiết lập mối liên hệ giữa I, K $\begin{cases} cI+dK=m \\ eI+vK=n \end{cases}$. Giải hệ này ta sẽ tìm được cả I và K.

Kinh nghiệm. *Ta thường gặp các trường hợp sau:*

- Hai tích phân $I=K$, tính được $I+K$ từ đó suy ra *I.*
- K là một tích phân tính đơn giản, khi đó từ $mI+nK=a$ ta sẽ tính được *I.*

Cách tìm tích phân K. Việc tìm tích phân này chủ yếu dựa vào kinh nghiệm, riêng đối với tích phân lượng giác thì ta thường hay chú ý đến việc đổi chỗ sinx cho cosx để tạo tích phân liên kết!

Câu 1.

Tính các tích phân sau:

1. $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos 2x\sin^2 xdx$
2. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)^3}dx$
3. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x\sin x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$

4. $I=\int_0^1 \frac{dx}{e^{2x}+3}$

5. $I=\int_0^1 \frac{x^4+1}{x^6+1}dx$

Lời giải

1. Ở ngay câu đầu ta đã thấy ngay sự khó khăn rồi phải không? Bây giờ sẽ nghĩ tới tích phân liên kết. Chú ý tới đẳng thức $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ ta sẽ thử tạo tích phân liên kết với tích phân $K=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos 2x\cos^2 xdx$

Ta có: $I+K=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos 2xdx=\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

Mặt khác ta lại có:

$$K-I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 2xdx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 4x)dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

Từ đây suy ra được $I=\frac{1}{8}\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{3}\right)$

2. *Chú ý tích phân liên kết của ta là* $K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)^3}dx$.

Ta có: $I+\sqrt{3}K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)^2}dx=\frac{1}{4}I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{1}{4}\cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Giờ cần tìm một mối liên hệ nữa giữa *I,K*. Chú ý đến kiến thức kiến thức phần trước – đưa biểu thức vào trong dấu vi phân, ở đây ta thấy rằng $(\sin x)'=\cos x,(\cos x)'=-\sin x$, do đó nghĩ cách làm sao đó để có thể đưa một biểu thức vào trong dấu vi phân. Ta có:

$$K-I\sqrt{3}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sqrt{3}\sin x}{\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)^3}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)}{\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)^3}=\frac{1}{2\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{3}-3}{6}$$

Từ đây suy ra $I=\frac{1+\sqrt{3}}{6}$.

3. *Chú ý nếu tính được tích phân* $K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$

Ta có: $\left(\cos^4 x\right)'=-4\cos^3 x\sin x,\left(\sin^4 x\right)'=4\sin^3 x\cos x\Rightarrow\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)=-\sin 4x$

$$\Rightarrow 4(I-K)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 4x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx=-\ln\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=0\Rightarrow I=K$$

Để ý rằng $I+K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{1+\cos^2 2x}dx=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\cos 2x)}{1+\cos^2 2x}=\frac{\pi}{4}$

Vậy $I=\frac{\pi}{8}$

4. *Chọn tích phân liên kết* $K=\int_0^1\frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+3}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d\left(e^{2x}\right)}{e^{2x}+3}=\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+3\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^2+3}{4}\right)$

Ta có $3I+K=\int_0^1 dx=1\Rightarrow I=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\ln\left(\frac{e^2+3}{4}\right)$

5. *Ta chú ý tới hằng đẳng thức sau* $x^6+1=\left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)$, *ta chọn* $K=\int_0^1\frac{x^2}{x^6+1}dx$

Ta có:

- $I-K=\int_0^1\frac{x^4-x^2+1}{x^6+1}dx=\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=\arctan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$
- $K=\int_0^1\frac{x^2}{x^6+1}dx=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{d\left(x^3\right)}{\left(x^3\right)^2+1}=\frac{1}{3}\arctan x^3\Big|_0^1=\frac{\pi}{12}$

Vậy $I=\frac{\pi}{3}$

LUYỆN TẬP

Tính các tích phân sau:

1. $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$ 2. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{100}x}{\sin^{100}x+\cos^{100}x}dx$ 3. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\left(\sin x+\cos x\right)^3}dx$

4. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx$ 5. $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x}{\sin x+\sqrt{3}\cos x}dx$ 6. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx$

6. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx$ 8. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^{n+2}x dx$ 9. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x+1}{\sin x+\cos x+1}dx$

10. $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos^2 2x}{\cos 2x}dx$ 11. $I=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^6\left(1+x^2\right)}dx$ 12. $I=\int_0^1\frac{x^2e^x}{\left(x+2\right)^2}dx$

13. $I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos 5x}{\sin 2x}dx$ 14. $I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin 5x}{\cos x}dx$ 15. $I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{2\cot x-3\tan x}{\cot x+\tan x}dx$

II. KỸ THUẬT ĐƯA BIỂU THỨC VÀO DẤU VI PHÂN

Ở nội dung bài viết này ta sẽ nhắc tới một số bài toán sử dụng kỹ thuật đưa một biểu thức vào trong dấu vi phân, để làm được những bài toán này cần chú ý đến kỹ năng biến đổi đạo hàm. Sau đây sẽ cùng xét các ví dụ sau.

Câu 1.

Biết $\int_0^1 \frac{\pi x^3 + 2^x + ex^3 2^x}{\pi + e.2^x}dx = \frac{1}{m} + \frac{1}{e\ln n}.\ln\left(p + \frac{e}{e+\pi}\right)$ với m, n, p là các số nguyên dương. Tính tổng $P = m + n + p$

A. $P = 5.$ **B.** $P = 6.$ **C.** $P = 7.$ **D.** $P = 8.$

Lời giải

Những bài toán cần đến kỹ thuật này đa phần sẽ được phát biểu một cách khá lằng nhằng sẽ gây khó khăn cho người làm bài. Tuy nhiên hầu hết sẽ được đơn giản hóa bằng cách tách thành 2 tích phân khác, mà để làm được điều này thì trên tử phải tách theo mẫu số.

Ta có $I = \int_0^1 \frac{\pi x^3 + 2^x + ex^3 2^x}{\pi + e.2^x}dx = \int_0^1 \left(x^3 + \frac{2^x}{\pi + e.2^x}\right)dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_0^1 + A = \frac{1}{4} + A$

Tính $A = \int_0^1 \frac{2^x}{\pi + e.2^x}dx$ Đặt $t = \pi + e.2^x \Rightarrow dt = e.\ln 2.2^x dx \Rightarrow 2^x dx = \frac{1}{e\ln 2}dt$

Khi đó $A = \frac{1}{e.\ln 2}.\int_{\pi+e}^{\pi+2e}\frac{dt}{t} = \frac{1}{e.\ln 2}\ln|t|\Big|_{\pi+e}^{\pi+2e} = \frac{1}{e\ln 2}\ln\frac{\pi+2e}{\pi+e} = \frac{1}{e\ln 2}\ln\left(1 + \frac{e}{e+\pi}\right)$

Vậy $I = \frac{1}{4} + \frac{1}{e\ln 2}\ln\left(1 + \frac{e}{e+\pi}\right) \Rightarrow \begin{cases} m = 4 \\ n = 2 \\ p = 1 \end{cases} \Rightarrow P = m + n + p = 7.$

Nhận xét:

- Mấu chốt của bài toán là ta nhận ra được đạo hàm của mẫu là một phần của tử từ đó rút ra phép đặt mẫu để lấy vi phân.
- Ngoài ra nếu trình bày tự luận thì ta cũng không cần phải đặt mẫu làm gì cả, đưa trực tiếp tử vào trong dấu vi phân rồi nhân thêm hằng số bên ngoài.

Chọn ý **C.**

Câu 2.

Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 + (2x + \cos x)\cos x + 1 - \sin x}{x + \cos x}dx = a\pi^2 + b - \ln\frac{c}{\pi}$ với *a,b,c* là các số hữu tỉ. Tính $P = ac^3 + b.$

A. $P = \frac{5}{4}$ **B.** $P = \frac{3}{2}$ **C.** $P = 2$ **D.** $P = 3$

Lời giải

Vẫn là một bài toán với cách phát biểu không hề dễ chịu, mấu chốt vẫn là đưa biểu thức vào trong dấu vi phân và tách thành 2 tích phân như bài trước !

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(x^2+2x\cos x+\cos^2 x\right)+\left(1-\sin x\right)}{x+\cos x}dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(x+\cos x\right)^2}{x+\cos x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x+\cos x\right)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\left(x+\cos x\right)}{x+\cos x}$$

$$=\left(\frac{1}{2}x^2+\sin x+\ln\left|x+\cos x\right|\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{8}\pi^2+1+\ln\frac{\pi}{2}=\frac{1}{8}\pi^2+1-\ln\frac{2}{\pi}$$

Vậy $\begin{cases}a=\dfrac{1}{8}\\ b=1\Rightarrow P=ac^3+b=2.\\ c=2\end{cases}$

Chọn ý **C.**

Câu 3.

Biết $I=\int_1^e\frac{\ln^2 x+\ln x}{\left(\ln x+x+1\right)^3}dx=\frac{1}{a}-\frac{b}{\left(e+2\right)^2}$ với $a,\ b\in\mathbb{Z}^+$. Tính $P=b-a$.

A. $P=-8$ **B.** $P=-6$ **C.** $P=6$ **D.** $P=10$

Lời giải

Bài toán này không còn đơn giản như 2 bài toán trước nữa. Vẫn bám sát phương pháp làm ta sẽ phải đơn giản và làm xuất hiện biểu thức hợp lí để đưa vào trong dấu vi phân. Vậy biến đổi như thế nào để xuất hiện biểu thức đó?

Ta có $\int_1^e\frac{\ln^2 x+\ln x}{\left(\ln x+x+1\right)^3}dx=\int_1^e\frac{\ln x+1}{\ln x+x+1}.\frac{\ln x}{\left(\ln x+x+1\right)^2}dx$

Chú ý rằng $\left(\frac{\ln x+1}{\ln x+x+1}\right)'=\frac{\ln x}{\left(\ln x+x+1\right)^2}$. Khi đó tích phân cần tính trở thành:

$$\int_1^e\frac{\ln^2 x+\ln x}{\left(\ln x+x+1\right)^3}dx=\int_1^e\frac{\ln x+1}{\ln x+x+1}d\left(\frac{\ln x+1}{\ln x+x+1}\right)=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{e+2}}udu=-\frac{1}{2}t^2\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{e+2}}=\frac{1}{8}-\frac{2}{\left(e+2\right)^2}$$

Chọn ý **B.**

Câu 4.

Biết $I=\int_{-2}^{-1}\frac{x^2-1}{x^4-4x^3+6x^2-4x+1}dx=\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $P=b-36a$.

A. $P=0$ **B.** $P=1$ **C.** $P=2$ **D.** $P=5$

Lời giải

Sau đây ta sẽ tìm hiểu một số bài toán đưa biểu thức vào trong dấu vi phân với hàm phân thức hữu tỉ. Cách làm không phải là chỉ đưa tử vào trong dấu vi phân mà cần phải biến đổi bằng cách sau.

Chia cả hai vế cho x^2 ta được:

$$I=\int_{-2}^{-1}\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx}{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+6}=\int_{-2}^{-1}\frac{d\left(x+\frac{1}{x}-2\right)}{\left(x+\frac{1}{x}-2\right)^2}=-\left.\frac{1}{x+\frac{1}{x}-2}\right|_{-2}^{-1}=\frac{1}{36}$$

Nhận xét:

- Kỹ thuật chia cả hai vế cho số hạng bậc cao nhất của tử sẽ được áp dụng khá nhiều trong những bài toán đưa biểu thức vào trong dấu vi phân với hàm phân thức hữu tỉ.
- Các bài toán này hầu hết cần phải biến đổi mẫu số để phân tích tử số một cách hợp lí từ đó mới có thể đưa vào trong dấu vi phân.

Chọn ý **A.**

Câu 5.

Biết $I=\int_{1}^{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}\left(\frac{4x^3+2x}{x^4+x^2+1}+\frac{9\left(x^2+1\right)}{x^4+x^2+1}\right)dx=\pi\sqrt{a}+\ln\left(b+6\sqrt{c}\right)$. Tính $\frac{ab}{c}$.

A. $\frac{22}{13}$ **B.** $\frac{48}{13}$ **C.** $\frac{37}{13}$ **D.** $\frac{28}{13}$

Lời giải

Bài toán này nhìn hình thức khá khủng bố, do yêu cầu của những bài toán này là làm đơn giản tích phân nên tránh việc cộng cả hai biểu thức trong dấu tích phân, ta cần phải tách chúng ra để tính đơn giản hơn.

Ta có $I=\int_{1}^{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}\left(\frac{4x^3+2x}{x^4+x^2+1}+\frac{9\left(x^2+1\right)}{x^4+x^2+1}\right)dx=\int_{1}^{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}\frac{d\left(x^4+x^2+1\right)}{x^4+x^2+1}+\int_{1}^{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}\frac{9\left(x^2+1\right)}{x^4+x^2+1}dx$

Tích phân thứ nhất tính rất dễ dàng bằng cách đưa biểu thức vào trong dấu vi phân , còn tích phân thứ 2 ta sẽ xử lý thế nào? Như bài trước ta sẽ chia cả tử và mẫu cho x^2, ta có:

$$9\int_{1}^{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx=9\int_{1}^{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+1+\frac{1}{x^2}}dx=9\int_{1}^{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}dx=\left.\frac{9}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{3}}\right|_{1}^{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}$$

Đến đây dễ dàng tính được:

$$I=\left.\ln\left(x^4+x^2+1\right)\right|_{0}^{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}+\left.\frac{9}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{3}}\right|_{1}^{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}=\ln\left(66+18\sqrt{13}\right)+\sqrt{3}\pi$$

Chọn ý **A.**

Nhận xét: Ở bài toán trên ta đã sử dụng một tính chất của hàm phân thức hữu tỉ.

$$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + C$$

Câu 6.

Tính các tích phân sau

1. $I_1 = \int_1^e \frac{x+1+\left(x^2+1\right)\ln x}{1+x\ln x}dx$

2. $I_2 = \int_1^e \frac{2x^2+1+\left(x^2+1\right)\ln x}{2+x\ln x}dx$

3. $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(x+1)\sin 2x + x\sin x}{1+2\cos x}dx$

4. $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x+2\sin x(\cos x+2\sin x)}{1+\sin x\sin 3x}dx$

Lời giải

1. $I_1 = \int_1^e \frac{x+1+\left(x^2+1\right)\ln x}{1+x\ln x}dx = \int_1^e \frac{x(1+x\ln x)+1+\ln x}{1+x\ln x}dx = \int_1^e \left(x + \frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\right)dx = \int_1^e xdx + I \quad (*)$

Ta có $\int_1^e xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_1^e = \frac{e^2-1}{2} \quad (1)$

Ta có $I = \int_1^e \frac{1+\ln x}{1+x\ln x}dx = \int_1^e \frac{d(1+x\ln x)}{1+x\ln x} = \ln|1+x\ln x|\Big|_1^e = \ln(e+1) \quad (2)$

Thay $(1),(2)$ và $(*) \Rightarrow I_1 = \frac{e^2-1}{2}\ln(e+1)$

2. $I_2 = \int_1^e \frac{2x^3+1\left(x^4+1\right)\ln x}{2+x\ln x}dx = \int_1^e \frac{x^3(2+x\ln x)+\ln x}{2+x\ln x}dx = \int_1^e \left(x^3 + \frac{1+\ln x}{2+x\ln x}\right)dx$

$$= \int_1^e x^3dx + \int_1^e \frac{d(2+x\ln x)}{2+x\ln x} = \left.\left(\frac{x^4}{4} + \ln|2+x\ln x|\right)\right|_1^e = \frac{e^2-1}{4} + \ln\frac{e+2}{2}$$

Chú ý. Nếu biểu thức dưới dấu tích phân đơn giản, các em có thể bỏ qua bước đổi biến bằng kỹ thuật vi phân. Ở tích phân I_1, I_2 ta đã sử dụng: $I = \int_\alpha^\beta \frac{u'}{u}dx = \int_\alpha^\beta \frac{u'}{u} = \ln|u|\Big|_\alpha^\beta = ?$

3. Ta biến đổi $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(x+1)\sin 2x + x\sin x}{1+2\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x(1+2\cos x)+\sin 2x}{1+2\cos x}dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin xdx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2x}{1+2\cos x}dx = A + B\,(*)$$

- Tính $A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin xdx$ Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin xdx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

  Khi đó $A = -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \quad (1)$

- Tính $B=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 2x}{1+2\cos x}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{2\sin x\cos x}{1+2\cos x}dx$

Đặt $t=1+2\cos x\Rightarrow dt=-2\sin xdx\Leftrightarrow \sin xdx=-\frac{dt}{2}$

Khi đó $B=\int\limits_2^3\frac{t-1}{t}.\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int\limits_2^3\left(1-\frac{1}{t}\right).dt=\frac{1}{2}\left(t-\ln|t|\right)\Big|_2^3=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$ (2)

Thay (1),(2) và (*) ta được $I_1=\frac{\sqrt{3}+1}{2}-\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

4. $I_2=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x+2\sin x\left(\cos x+2\sin x\right)}{1+\sin x\sin 3x}dx$ ta có

- $x+2\sin x\left(\cos x+2x\sin x\right)=x\left(4\sin^2 x+1\right)+\sin 2x$
- $1+\sin x\sin 3x=1-\frac{1}{2}\left(\cos 4x-\cos 2x\right)=\frac{1-\cos 4x+1+\cos 2x}{2}$

$=\frac{\sin^2 2x+\cos^2 x}{4}=\frac{\left(4\sin^2 x+1\right)\cos^2 x}{4}$

$$\Rightarrow I_2=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x.\left(4\sin^2 x+1\right)+\sin 2x}{\left(4\sin^2 x+1\right)\cos^2 x}dx=4\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\cos^2 x}dx+\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 2x}{\left(4\sin^2 x+1\right)\cos^2 x}dx\right)=4\left(A+B\right)\quad (*)$$

- Tính $A=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\cos^2 x}dx$. Đặt $\begin{cases}u=x\\ dv=\sin xdx\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=x\\ dv=\dfrac{1}{\cos^2 x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=\tan x\end{cases}$

Khi đó $A=x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos x}dx=\frac{\pi}{\sqrt{3}}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\cos x}{\cos x}dx=\frac{\pi}{\sqrt{3}}+\ln|\cos|\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}=\ln 2$ (1)

- Tính $B=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 2x}{\left(4\sin^2 x+1\right)\cos^2 x}dx=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x}}{\frac{4\sin^2 x+1}{\cos^2 x}\cdot\cos^2 x}dx$

$=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\tan x}{\left(1+5\tan^2 x\right)}d\left(\tan x\right)=\frac{1}{5}\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\left(1+5\tan^2 x\right)}{\left(1+5\tan^2 x\right)}==\frac{1}{5}\ln\left|1+5\tan^2 x\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{4}{5}\ln 2$ (2)

Thay ta được (1),(2) và (*) ta có $I_2=4\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\ln 2+\frac{4}{5}\ln 2\right)=\frac{4\sqrt{3}\pi}{3}-\frac{4}{5}\ln 2$

Câu 7.

Tính các tích phân sau

1. $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2+\sin^2x-\sin x}{x+\cos x}dx$

2. $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2+\sin^2x-3\cos^2x-2\sin x}{x+2\cos x}dx$

3. $I_3=\int_1^{e}\frac{1+x^2\ln x}{x+x^2\ln x}dx$

4. $I_4=\int_1^{e}\frac{2x^2+(1+2\ln x)x+\ln^2x}{(x^2+x\ln x)^2}dx$

Lời giải

1. Ta có $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2+\sin^2x-\sin x}{x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2-\cos^2x+\cos^2x+\sin^2x-\sin x}{x+\cos x}dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(x+\cos x)(x-\cos x)+1-\sin x}{x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-\cos x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{x+\cos x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-\cos x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(x+\cos x)}{x+\cos x}=\left(\frac{x^2}{2}-\sin x+\ln|x+\cos x|\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{8}-1+\ln\frac{\pi}{2}$$

2. $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2+\sin^2x-3\cos^2x-2\sin x}{x+2\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2-4\cos^2x+\sin^2x+\cos^2x-2\sin x}{x+2\cos x}dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(x-2\cos x)(x+2\cos x)+1-2\sin x}{x+2\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-2\cos x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-2\sin x}{x+2\cos x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-2\cos x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(x+2\cos x)}{x+2\cos x}=\left(\frac{x^2}{2}-2\sin x+\ln|x+2\cos x|\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{8}-2+\ln\frac{\pi}{4}$$

3. $I_3=\int_1^{e}\frac{1+x^2\ln x}{x+x^2\ln x}dx=\int_1^{e}\frac{(x+x^2\ln x)+1-x}{x+x^2\ln x}dx=\int_1^{e}\left(1+\frac{1-x}{x+x^2\ln x}\right)dx$

$$=\int_1^{e}\left(1+\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\ln x}\right)dx=\int_1^{e}dx-\int_1^{e}\frac{d\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)}{\frac{1}{x}+\ln x}=\left(x-\ln\left|\frac{1}{x}+\ln x\right|\right)\Bigg|_1^{e}=e-\ln(e+1)$$

4. $I_4=\int_1^{e}\frac{2x^2+(1+2\ln x)x+\ln^2x}{(x^2+x\ln x)^2}dx=\int_1^{e}\frac{(x^2+2x\ln x+\ln^2x)+x^2+x}{x^2(x+\ln x)^2}dx$

$$=\int_1^{e}\frac{(x+\ln x)^2+x.(x+1)}{x^2(x+\ln x)^2}dx=\int_1^{e}\left[\frac{1}{x^2}+\frac{x+1}{x(x+\ln x)^2}\right]dx=\int_1^{e}\left[\frac{1}{x^2}+\frac{1+\frac{1}{x}}{(x+\ln x)^2}\right]dx$$

$$=\int_1^{e}\frac{dx}{x^2}+\int_1^{e}\frac{d(x+\ln x)}{(x+\ln x)^2}==-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+\ln x}\right)\Bigg|_1^{e}=\frac{2e^2-1}{e^2+e}$$

III. KỸ THUẬT ĐÁNH GIÁ HÀM SỐ.

Trong các bài toán tính tích phân ta sẽ gặp phải một số trường hợp hàm cho bởi 2 công thức phải sử dụng đến đánh giá để so sánh 2 biểu thức từ đó chia tích phân cần tính ra thành 2 phần.

Ta xét bài toán tổng quát. Tính tích phân $I=\int_a^b \min\left(f(x),g(x)\right)dx$

- Bước 1: Giải phương trình $f(x)=g(x)$
- Bước 2: Xét dấu cho hàm $h(x)=f(x)-g(x)$ trên $[a;b]$
- Bước 3: Chia tích phân cần tính ra thành các tích phân nhỏ.

Chú ý: *Yêu cầu bài toán có thể thay min bằng max.*

Câu 1.

Tính các tích phân sau:

1. $I=\int_0^2 \min\left\{x^2,\sqrt{x}\right\}dx$
2. $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \min\left\{\tan x,x\right\}dx$
3. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \max\left\{\sin x,\cos x\right\}dx$
4. $I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \min\left\{\tan x+2\sin x,3x\right\}dx$
5. $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \max\left\{e^x+\cos x,2+x-\dfrac{x^2}{2}\right\}dx$

Lời giải

1. Xét phương trình $x^2=\sqrt{x}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\x=0\end{array}\right.$

Ta thấy rằng khi $\begin{cases}x\in[0;1]\Rightarrow x^2\le\sqrt{x}\Rightarrow \min\left\{x^2;\sqrt{x}\right\}=x^2\\ x\in[1;2]\Rightarrow x^2\ge\sqrt{x}\Rightarrow \min\left\{x^2;\sqrt{x}\right\}=\sqrt{x}\end{cases}$

Vậy $I=\int_0^2 \min\left\{x^2,\sqrt{x}\right\}dx=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2\sqrt{x}\,dx=\dfrac{4\sqrt{2}-1}{3}$

2. Xét hàm số $f(x)=\tan x-x$. Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1\ge 0$. Vậy $f(x)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác ta lại có $f(0)=0$ nên $x=0$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x)=0$.

- Nếu $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]\Rightarrow f(x)\ge f(0)=0\Rightarrow \tan x\ge x$
- Nếu $x\in\left[-\dfrac{\pi}{4};0\right]\Rightarrow f(x)\le f(0)=0\Rightarrow \tan x\le x$

Vậy $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\min\{\tan x,x\}dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\tan xdx+\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}xdx=\frac{\pi^2}{32}+\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

3. Xét phương trình $\sin x=\cos x\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}$.

- Nếu $x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]\Rightarrow\sin x\le\cos x$
- Nếu $x\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\sin x\ge\cos x$

Vậy $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\max\{\sin x,\cos x\}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos xdx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=\sqrt{2}$

4. Xét hàm số: $f(x)=\tan x+2\sin x-3x$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}+2\cos x-3=\frac{(\cos x-1)^2(2\cos x+1)}{\cos^2 x}\ge 0\forall x\in\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$$

Vậy $f(x)$ đồng biến trên $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$, từ đó suy ra phương trình $f(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x=0$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$.

$$\Rightarrow I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\min\{\tan x+2\sin x,3x\}dx=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0}(\tan x+2\sin x)dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}3xdx=-1-\ln 2+\frac{\pi^2}{6}$$

5. Xét hàm số $f(x)=e^x+\cos x-2-x+\frac{x^2}{2}\Rightarrow f'(x)=x+e^x-\sin x-1\Rightarrow f''(x)=1+e^x+\cos x$

Ta thấy rằng $f''(x)\ge 0\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]\Rightarrow f(x)'\ge f(0)=0\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

Mà $f(0)=0$ nên $x=0$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x)=0$ trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$

Vậy $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(e^x+\cos x)dx=-1+\frac{1}{\sqrt{2}}+e^{\frac{\pi}{4}}$

IV. TÍCH PHÂN HÀM TRỊ TUYỆT ĐỐI.

Ở phần ứng dụng tính diện tích hình phẳng và thể thể tích khối tròn xoay, các công thức tính toán sẽ liên quan đến tích phân chứa trị tuyết đối. Cho nên, trong phân này chúng ta sẽ tìm hiểu về tích phân chứa giá trị tuyệt đối.

Phương pháp. Nếu dưới dấu tích phân có dấu trị tuyệt đối $I=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|dx$ thì tìm cách phá trị tuyệt đối bằng cách đi xét dấu của $f(x)$ trong đoạn $[\alpha;\beta]$. Cụ thể:

- **Bước 1.** Giải phương trình $f(x)=0\Rightarrow x_i=?$
- **Bước 2.** Lập bảng xét dấu của $f(x)$ trong các khoảng thuộc $[\alpha;\beta]$.
- **Bước 3.** Ta dựa vào công thức $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=\int_{\alpha}^{\gamma}f(x)dx+\int_{\gamma}^{\beta}f(x)dx$ $(\alpha<\gamma<\beta)$ để tách tích phân ban đầu thành $\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|dx=\int_{\alpha}^{x_i}|f(x)|dx+\int_{x_i}^{\beta}|f(x)|dx$

  Sau đó phá trị tuyệt đối, trở về tích phân cơ bản.

Chú ý. *Đối với bài toán có nhiều dấu trị tuyệt đối lồng vào nhau thị ta sẽ mượn bảng xét dấu để phá trị tuyệt đối.*

CÁC BÀI TOÁN MINH HỌA.

Câu 1.

Tính các tích phân sau:

a) $I=\int_{-2}^{2}|x^2-1|dx$ b) $\int_{0}^{3}\sqrt{x^3-2x^2+x}dx$ c) $\int_{-3}^{5}(|x+2|-|x-2|)dx$

d) $\int_{-1}^{2}(x+|1-x|-|x+2|)dx$ e) $I=\int_{-1}^{1}\frac{|x|}{x^4-x^2-12}dx$ f) $I=\int_{1}^{5}\frac{2|x-2|+1}{x}dx$

Lời giải

a) Lập bảng xét dấu của x^2-1 trên đoạn $[-2;2]$

x	-2		-1		1		2
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

Do đó $I=\int_{-2}^{2}|x^2-1|dx=\int_{-2}^{-1}(x^2-1)dx+\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx+\int_{1}^{2}(x^2-1)dx$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Bigg|_{-2}^{-1}+\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}+\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Bigg|_{1}^{2}=4.$$

b) Ta có $I=\int_{0}^{3}\sqrt{x^3-2x^2+x}dx=\int_{0}^{3}\sqrt{x(x^2-2x+1)}dx=\int_{0}^{3}|x-1|\sqrt{x}dx$

$$=\int_0^1 |x-1|\sqrt{x}dx+\int_1^3 |x-1|\sqrt{x}dx=\int_0^1 (1-x)\sqrt{x}dx+\int_1^3 (x-1)\sqrt{x}dx$$

$$=\int_0^1\left(x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}\right)dx+\int_1^3\left(x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)dx=\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}\right)\Bigg|_0^1+\left(\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)\Bigg|_1^3=\frac{24\sqrt{3}+8}{15}.$$

c) Ta sẽ dùng bảng xét dấu để phá trị tuyệt đối:

x	-3		-2		2		5
$\lvert x+2\rvert$		$-x-2$	0	$x+2$		$x+2$	
$\lvert x-2\rvert$		$-x+2$		$-x+2$	0	$x-2$	
$\lvert x+2\rvert-\lvert x-2\rvert$		-4		$2x$		4	

$$\Rightarrow I=\int_{-3}^{-2}\left(|x+2|-|x-2|\right)dx+\int_{-2}^{2}\left(|x+2|-|x-2|\right)dx+\int_{2}^{5}\left(|x+2|-|x-2|\right)dx$$

$$=-4\int_{-3}^{-2}dx+2\int_{-2}^{2}xdx+4\int_{2}^{5}dx=-4x\Big|_{-3}^{-2}+x^2\Big|_{-2}^{2}+4x\Big|_{2}^{5}=8.$$

d) Ta sẽ dùng bảng xét dấu để phá trị tuyệt đối:

x	-1		1		2
$\lvert 1-x\rvert$		$1-x$	0	$x-1$	
$\lvert x+2\rvert$		$x+2$		$x+2$	
$x+\lvert 1-x\rvert-\lvert x+2\rvert$		$-x-1$		$x-3$	

$$\Rightarrow I=\int_{-1}^{1}\left(x+|1-x|-|x+2|\right)dx+\int_{1}^{2}\left(x+|1-x|-|x+2|\right)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(-x-1)dx+\int_{1}^{2}(x-3)dx=-\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Bigg|_{-1}^{1}+\left(\frac{x^2}{2}-3x\right)\Bigg|_{1}^{2}=\frac{1}{2}.$$

e) Ta có $I=\int_{-1}^{1}\frac{|x|}{x^4-x^2-12}dx=\int_{-1}^{0}\frac{|x|}{x^4-x^2-12}dx+\int_{0}^{1}\frac{|x|}{x^4-x^2-12}dx$

$$=-\int_{-1}^{0}\frac{x}{x^4-x^2-12}dx+\int_{0}^{1}\frac{x}{x^4-x^2-12}dx$$

Đặt $t=x^2\Rightarrow dt=2xdx\Rightarrow I=-\frac{1}{2}\int_1^0\frac{dt}{t^2-t-12}+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dt}{t^2-t-12}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dt}{t^2-t-12}+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dt}{t^2-t-12}$

$$=\int_0^1\frac{dt}{t^2-t-12}=\frac{1}{7}\int\frac{(t+3)-(t-4)}{(t+3)(t-4)}dt=\frac{1}{7}\int\left(\frac{1}{t-4}-\frac{1}{t+3}\right)dt=\frac{1}{7}\ln\left|\frac{t-4}{t+3}\right|\Bigg|_0^1=\frac{2}{7}\ln\frac{3}{4}.$$

f) Ta có $I=\int_1^5\frac{2|x-2|+1}{x}dx=\int_1^2\frac{2|x-2|+1}{x}dx+\int_2^5\frac{2|x-2|+1}{x}dx$

$$=\int_1^2\frac{2(2-x)+1}{x}dx+\int_2^5\frac{2(x-2)+1}{x}dx=\int_1^2\frac{5-2x}{x}dx+\int_2^5\frac{2x-3}{x}dx$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{5}{x} - x\right)dx + \int_2^5 \left(2 - \frac{3}{x}\right)dx = \left(5\ln|x| - x\right)\Big|_1^2 + \left(2x - 3\ln|x|\right)\Big|_2^5 = 8\ln 2 - 3\ln 5 + 4.$$

Câu 2.

Tính các tích phân sau:

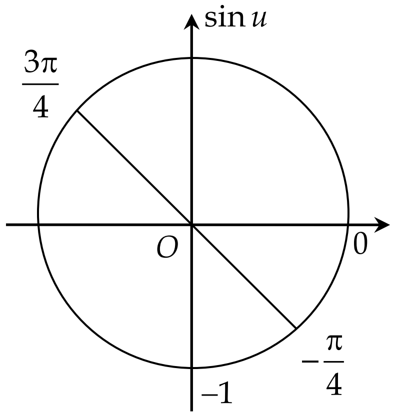
1. $I = \int\limits_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin 2x}\,dx$ 2. $I = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin x}\,dx$ 3. $I = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\tan^2 x + \cot^2 x - 2}\,dx$

Lời giải

1. Ta có $\sqrt{1 - \sin 2x} = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x}$

$$= \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} = |\sin x - \cos x| = \sqrt{2}\left|\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|$$

Với $x \in [0;\pi] \Rightarrow x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$. Dựa vào đường tròn đơn vị



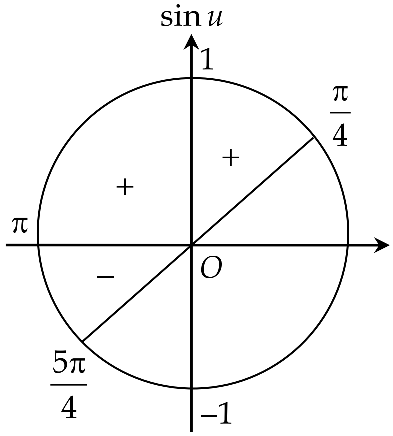
- Với $x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4};0\right]$ thì $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < 0$ hay $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < 0$ khi $x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]$
- Với $x - \frac{\pi}{4} \in \left[0;\frac{3\pi}{4}\right]$ thì $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$ hay $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$ khi $x \in \left[\frac{\pi}{4};\pi\right]$

$$\Rightarrow I = -\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)dx + \sqrt{2}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)dx = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} - \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = 2\sqrt{2}$$

11. Ta có $\sqrt{1 + \sin x} = \sqrt{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$$= \sqrt{\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2} = \left|\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{2}\left|\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$$

Với $x \in [0;2\pi] \Rightarrow \frac{x}{2} \in [0;\pi] \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]$. Dựa vào vòng tròn đơn vị ta có



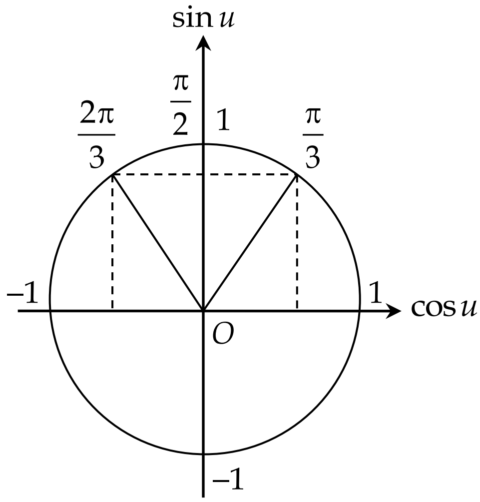
- Với $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4};\pi\right]$ thì $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)>0$ hay $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)>0$ khi $x\in\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$
- Với $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\in\left[\pi;\frac{5\pi}{4}\right]$ thì $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)<0$ hay $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)<0$ khi $x\in\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$

$$\Rightarrow I=\sqrt{2}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)dx-\sqrt{2}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)dx$$

$$=-2\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{3\pi}{2}}+2\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}=4\sqrt{2}$$

4. Ta có $\sqrt{\tan^2 x+\cot^2 x-2}=\sqrt{\left(\tan x-\cot x\right)^2}=\left|\tan x-\cot x\right|=\left|\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin x\cos x}\right|=2\left|\frac{\cos 2x}{\sin 2x}\right|$

Vì $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{3}\Rightarrow\frac{\pi}{3}\le 2x\le\frac{2\pi}{3}$, Dựa vào đường tròn đơn vị ta có:



- Với $2x\in\left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$ thì $\begin{cases}\sin 2x>0\\ \cos 2x>0\end{cases}$ hay $\frac{\cos 2x}{\sin 2x}>0$ khi $x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right]$
- Với $2x\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right]$ thì $\begin{cases}\sin 2x>0\\ \cos 2x<0\end{cases}$ hay $\frac{\cos 2x}{\sin 2x}<0$ khi $x\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right]$

$$\Rightarrow I = 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin 2x}dx - 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\left(\sin 2x\right)}{\sin 2x} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\left(\sin 2x\right)}{\sin 2x} = \ln\left|\sin 2x\right|\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} - \ln\left|\sin 2x\right|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = 2\ln\frac{2}{\sqrt{3}}$$

CHINH PHỤC OLYMPIC TOÁN

V. TÍCH PHÂN CÓ CẬN THAY ĐỔI.

Nếu như bình thường ta hay xét với những bài tích phân có cận là các hằng số cố định thì trong phần này ta sẽ cùng tìm hiểu các bài toán có cận là các hàm theo biến *x*. Trước tiên để làm được những bài toán này ta cần nhớ kiến thức sau:

Định lý: Nếu $f(x)$ là hàm khả tích trên $[a;b]$, liên tục tại mọi $x\in[a;b]$ thì hàm số $F(x)$ xác định bởi $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ khả vi tại *x* và $F'(x)=f(x)$.

Tổng quát ta có $F'(x)=\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt\right)'=v'(x)f(v(x))-u'(x)f(u(x))$

Phương pháp chung: Để giải những bài toán ở phần này tất cả đều theo 2 bước chính:

- Bước 1: Đạo hàm giả thiết
- Bước 2: Biến đổi kết quả của đạo hàm để suy ra yêu cầu của bài toán.

Sau đây là những ví dụ minh họa:

Câu 1.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $3x^5+96=\int_a^x f(t)dt$. Tìm a?

A. -96 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 15

Lời giải

Những ai lần đầu gặp bài này ắt hẳn sẽ rất khó khăn, tuy nhiên ta đã có phương pháp rồi do đó sẽ bám sát nó!

Lấy đạo hàm hai vế ta được $15x^4=f(x)$

Từ đây suy ra $3x^5+96=\int_a^x 15x^4dt=3t^5\Big|_a^x=3\left(x^5-a^5\right)\Rightarrow a=-2$

Chọn ý **B.**

Câu 2.

Cho $\left[f(x)\right]^3=\int_0^x\left(\left[f(t)\right]^3-\left[f'(t)\right]^3+3f(t)\left[f'(t)\right]^2\right)dt+2018$. Tính $f(1)$.

A. $2018e$ **B.** $-2018e$ **C.** $\sqrt[3]{2018e}$ **D.** $-\sqrt[3]{2018e}$

Lời giải

Lấy đạo hàm 2 vế ta được

$$\left[f(x)\right]^3=\left[f(x)\right]^3-\left[f'(x)\right]^3+3f(x)\left[f'(x)\right]^2$$
$$\Leftrightarrow\left(f(x)-f'(x)\right)^3=0\Leftrightarrow f(x)=f'(x)\Rightarrow f(x)=ce^x$$

Thay vào giả thiết ta có:

$$\left(ce^x\right)^3=\int_0^x\left(\left(ce^t\right)^3-\left(ce^t\right)^3+3ce^t\left(ce^t\right)^2\right)dt+2018$$
$$\Leftrightarrow\left(ce^x\right)^3=\int_0^x\left(3c^3e^{3t}\right)dt+2018=3c^3.\frac{e^{3t}}{3}\Big|_0^x+2018$$
$$\Rightarrow c=\sqrt[3]{2018}\Rightarrow f(1)=e\sqrt[3]{2018}$$

Chú ý:

- Ở lời giải trên có chỗ $f(x)=f'(x)\Rightarrow f(x)=ce^{x}$ vấn đề này ta sẽ được tìm hiểu ở phần sau!
- Bước tìm hằng số c ở đoạn sau chú ý là ta đang coi x cố định để tính tích phân cho ra một hàm theo biến x.

Chọn ý **C.**

Câu 3.

Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\int_0^x \frac{t}{\sqrt{t^{2018}+1}}dt>0$

A. $(-\infty;+\infty)$ **B.** $(-\infty;0)$ **C.** $(-\infty;+\infty)\setminus\{0\}$ **D.** $(0;+\infty)$

Lời giải

Đặt $f(x)=\int_0^x \frac{t}{\sqrt{t^{2018}+1}}dt\Rightarrow f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^{2018}+1}}, f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$

Ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$-\infty$

Nhìn vào bảng biến thiên ta suy ra được $x\in(-\infty;+\infty)\setminus\{0\}$.

Chọn ý **C.**

Câu 4.

Cho hàm số $f(x)>0$ xác định và có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn đồng thời điều kiện $\begin{cases} g(x)=1+2018\int\limits_0^x f(t)dt \\ g(x)=f^2(x) \end{cases}$. Tính $I=\int\limits_0^1\sqrt{g(x)}dx$

A. $I=\frac{1009}{2}$. **B.** $I=505$. **C.** $I=\frac{1011}{2}$. **D.** $I=\frac{2019}{2}$.

Lời giải

Theo cách làm chung thì ta vẫn đi lấy đạo hàm hai vế!

Từ giả thiết, ta có $\begin{cases} g'(x)=2018f(x) \\ g'(x)=2f'(x).f(x) \end{cases}\Rightarrow 2018f(x)=2f'(x).f(x)$

$$\Leftrightarrow 2f(x)[1009-f'(x)]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)=0\ \ (L) \\ f'(x)=1009\Rightarrow f(x)=1009x+C \end{array}\right..$$

Thay ngược lại, ta được $1+2018\int_0^x (1009t+C)dt = (1009x+C)^2$

$$\Leftrightarrow 1+2018\left(\frac{1009}{2}t^2+Ct\right)\Bigg|_0^x = (1009x+C)^2 \Leftrightarrow C^2 = 1.$$

Suy ra $f(x)=1009x+1$ hoặc $f(x)=1009x-1$ (loại vì $f(x)=1009x-1$) .

Khi đó $I=\int_0^1 \sqrt{g(x)}dx=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (1009x+1)dx=\frac{1011}{2}$

Chọn ý **C.**

Câu 5.

Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $f^2(x)\le 1+3\int_0^x f(t)dt = g(x)$ với mọi $x\in[0;1]$, tích phân $\int_0^1 \sqrt{g(x)}dx$ có giá trị lớn nhất là?

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{7}{4}$. **C.** $\frac{9}{5}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Từ giả thiết $g(x)=1+3\int_0^x f(t)dt$ ta có $\begin{cases} g(0)=1 \\ g'(x)=3f(x) \end{cases}$ và $g(x)>0,\ \forall x\in[0;1]$.

Theo giả thiết $g(x)\ge f^2(x) \Rightarrow g(x)\ge \frac{\left[g'(x)\right]^2}{9} \Leftrightarrow \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}\le\frac{3}{2}$.

Lấy tích phân cận từ $0\to t$ ta được:

$$\int_0^t \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}dx \le \int_0^t \frac{3}{2}dx \Leftrightarrow \sqrt{g(x)}\Big|_0^t \le \frac{3}{2}x\Big|_0^t$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{g(t)}-\sqrt{g(0)}\le\frac{3}{2}t \Leftrightarrow \sqrt{g(t)}\le\frac{3}{2}t+1.$$

Do đó $\int_0^1 \sqrt{g(x)}dx \le \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x+1\right)dx = \frac{7}{4}$

Chọn ý **B.**

Câu 6.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x)=\int_0^x \left[f^2(t)+2x\left(f(t)-f'(t)\right)+f'(t)f(t)\right]dt+\frac{1}{4}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $f(2)$ biết $f(0)=1$?

A. 5 **B.** e^2 **C.** $e+1$ **D.** 6

Lời giải

Lấy đạo hàm 2 vế ta có

$$f'(x)=f^2(x)+2x\left[f(x)-f'(x)\right]+f'(x)f(x)$$

$$\Leftrightarrow\left[f(x)-(2x+1)\right]\left(f'(x)-f(x)\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=2x+1\\f(x)=f'(x)\end{array}\right.$$

Trường hợp 1. $f(x)=2x+1\Rightarrow f(2)=5$

Trường hợp 2. $f(x)=f'(x)\Rightarrow f(x)=f'(x)=c.e^x$

Mặt khác $f(0)=1$ nên $f(x)=e^x\Rightarrow f(2)=e^2$

Câu 7.

Cho phương trình $\int_{\sqrt{2}}^{x}\frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}=\frac{\pi}{12}\left(x>\sqrt{2}\right)$ có nghiệm là $a\sqrt{b}$ với a,b là các số nguyên dương. Tính giá trị của a^2+b

A. 5 **B.** e^2 **C.** $e+1$ **D.** 6

Lời giải

Với các bài toán như thế này nhiệm vụ chính của chúng ta rất đơn giản đó là tính nguyên hàm của biểu thức trong dấu tích phân rồi sẽ thay cận vào để giải phương trình.

Ta có $\int_{\sqrt{2}}^{x}\frac{tdt}{t^2\sqrt{t^2-1}}=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{x}\frac{d\left(t^2-1\right)}{t^2\sqrt{t^2-1}}=\int_{\sqrt{2}}^{x}\frac{d\left(\sqrt{t^2-1}\right)}{t^2}=\int_{1}^{\sqrt{x^2-1}}\frac{du}{u^2+1}=\arctan u\Big|_{11}^{\sqrt{x^2-1}}$

$$=\arctan\sqrt{x^2-1}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}\Leftrightarrow\arctan\sqrt{x^2-1}=\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow\sqrt{x^2-1}=\sqrt{3}\Leftrightarrow x=2=1\sqrt{4}$$

Từ đó suy ra $a=1,b=4$.

Chọn ý **A.**

Câu 8.

Cho phương trình $\int_{\frac{1}{2}}^{x}\frac{dt}{t^2\sqrt{1-t^2}}=\sqrt{3}-1\left(x\in\left[\frac{1}{2},1\right)\right)$ có nghiệm là $\frac{\sqrt{a}}{b}$ với a,b là các số nguyên dương, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của a^2+b

A. 5 **B.** e^2 **C.** $e+1$ **D.** 6

Lời giải

Tương tự câu trên, đầu tiên ta sẽ đi tính nguyên hàm của biểu thức trong dấu tích phân.

Đặt $t=\sin u\Rightarrow dt=\cos udu\Rightarrow f(x)=\int_{\frac{1}{2}}^{x}\frac{dt}{t^2\sqrt{1-t^2}}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin x}\frac{\cos udu}{\sin^2u\sqrt{1-\sin^2u}}$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin x}\frac{du}{\sin^2u}=-\cot g\,u\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin x}=\frac{-\cos u}{\sin u}\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin x}=\frac{-\sqrt{1-t^2}}{t}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{x}=\frac{-\sqrt{1-x^2}}{x}+\sqrt{3}$$

Ta có $\int_{\frac{1}{2}}^{x}\frac{dt}{t^2\sqrt{1-t^2}}=\sqrt{3}-1\Leftrightarrow\frac{-\sqrt{1-x^2}}{x}+\sqrt{3}=\sqrt{3}-1\Leftrightarrow\sqrt{1-x^2}=x\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}\le x<1\\1-x^2=x^2\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Câu 9.

Cho hàm số $f(x)$ dương liên tục $[0;+\infty)$ thỏa mãn đồng thời điều kiện

$$f(x) \le 2018 + 2\int_0^x f(t)dt, \forall x \ge 0; \int_0^1 f(x)dx = 1009(e^2 - 1).$$

Tính tích phân $\int_0^1 \frac{f(x)}{e^x}dx$?

A. $2018(e-1)$ **B.** $1009(e+1)$ **C.** $2018(e-2)$ **D.** $1009(e-1)$

Lời giải

Ta có $f(x) \le 2018 + 2\int_0^x f(t)dt \Leftrightarrow f(x) - 2018 - 2\int_0^x f(t)dt \le 0 (1)$

Đặt $g(x) = e^{ax}\left(\int_0^x f(t)dt + b\right); g'(x) = e^{ax}\left(a\int_0^x f(t)dt + f(x) + ab\right)$

Từ (1) ta thực hiện phép đồng nhất ta được $\begin{cases} a = -2 \\ ab = -2018 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1009 \end{cases}$

Suy ra $g'(x) \le 0, \forall x \ge 0 \Rightarrow g(x)$ nghịch biến trên $[0;+\infty)$.

$$\Rightarrow e^{-2x}\left(\int_0^x f(t)dt + 1009\right) = g(x) \le g(0) \Rightarrow 2\int_0^x f(t)dt + 2018 \le 2018e^{2x}$$

Vậy $f(x) \le 2018e^{2x} \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx \le 1009e^2 - 1009$

VI. TÍCH PHÂN HÀM PHÂN NHÁNH.

Ta hiểu nôm na tích phân hàm phân nhánh tức là các phép tính tích phân những hàm cho bởi hai công thức, đây là một vấn đề dễ không có gì khó khăn cả nếu đã từng gặp và biết phương pháp làm.

Câu 1.

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{khi } x\ge 0 \\ e^{2x} & \text{khi } x\le 0 \end{cases}$ Tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^{2} f(x)dx$

A. $I=\dfrac{3e^2-1}{2e^2}$. **B.** $I=\dfrac{7e^2+1}{2e^2}$. **C.** $I=\dfrac{9e^2-1}{2e^2}$ **D.** $I=\dfrac{11e^2-11}{2e^2}$

Lời giải

Chú ý là đây là hàm cho bởi 2 công thức nên ta sẽ tách tích phân cần tính ra thành 2 tích phân khác

Ta có $I=\int\limits_{-1}^{0} f(x)dx+\int\limits_{0}^{2} f(x)dx=\int\limits_{-1}^{0} e^{2x}dx+\int\limits_{0}^{2}(x+1)dx=\dfrac{9e^2-1}{2e^2}$

Chọn ý **C.**

Câu 2.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$, thỏa $f'(x)=\dfrac{2}{2x-1}, f(0)=1$ và $f(1)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $\ln 15$ **B.** $2+\ln 15$ **C.** $3+\ln 15$ **D.** $4+\ln 15$

Lời giải

Ta có $f'(x)=\dfrac{2}{2x-1}\Rightarrow f(x)=\int\dfrac{2}{2x-1}dx=\ln|2x-1|+C=\begin{cases}\ln(1-2x)+C_1 & ;x<\dfrac{1}{2} \\ \ln(2x-1)+C_2 & ;x>\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Tới đây ta xét 2 trường hợp:

- Nếu $f(0)=1\Rightarrow \ln(1-2.0)+C_1=1\to C_1=1$.
- Nếu $f(1)=2\Rightarrow \ln(2.1-1)+C_2=2\to C_2=2$.

Do đó $f(x)=\begin{cases}\ln(1-2x)+1 \text{ khi } x<\dfrac{1}{2} \\ \ln(2x-1)+2 \text{ khi } x>\dfrac{1}{2}\end{cases}\to\begin{cases} f(-1)=\ln 3+1 \\ f(3)=\ln 5+2\end{cases}$

$$\Rightarrow f(-1)+f(3)=3+\ln 5+\ln 3=3+\ln 15$$

Chọn ý **C.**

Câu 3.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{-2;1\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+x-2}$, $f(-3)-f(3)=0$ và $f(0)=\dfrac{1}{3}$ Giá trị biểu thức $f(-4)+f(-1)-f(4)$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}\ln 20+\dfrac{1}{3}$ **B.** $\dfrac{1}{3}\ln 2+\dfrac{1}{3}$ **C.** $\ln 80+1$ **D.** $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{8}{5}+1$

Lời giải

Tương tự như những bài trên, đây là bài toán cũng yêu cầu tính tích phân hàm cho bởi 2 công thức, chỉ có điều bài toán này có tới 3 hàm thì ta vẫn xử lý tương tự như bài trước thôi!

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+x-2}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+2}\right)$

$$\Rightarrow f(x)=\int\frac{1}{x^2+x-2}dx=\begin{cases}\frac{1}{3}\left(\ln(1-x)-\ln(-x-2)\right)+C_1 & ;x<-2\\ \frac{1}{3}\left(\ln(1-x)-\ln(x+2)\right)+C_2 & ;-2<x<1\\ \frac{1}{3}\left(\ln(x-1)-\ln(x+2)\right)+C_3 & ;x>1\end{cases}$$

Xét 2 trường hợp:

- Nếu $f(0)=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\dfrac{1}{3}\left(\ln(1-0)-\ln(0+2)\right)+C_2=\dfrac{1}{3}\Rightarrow C_2=\dfrac{1}{3}\ln 2+\dfrac{1}{3}$.
- Nếu $f(-3)-f(3)=0\Rightarrow C_1-C_3=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{1}{10}$.

Ta có $f(-4)+f(-1)-f(4)=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{3}\ln 2-\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{1}{2}+C_2+C_1-C_3=\dfrac{1}{3}\ln 2+\dfrac{1}{3}$

Chọn ý **B.**

Câu 4.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(0;+\infty)\backslash\{e\}$, thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x(\ln x-1)}$, $f\left(\dfrac{1}{e^2}\right)=\ln 6$ và $f(e^2)=3$ Giá trị biểu thức $f\left(\dfrac{1}{e}\right)+f(e^3)$ bằng?

A. $3(\ln 2+1)$ **B.** $2\ln 2$ **C.** $3\ln 2+1$ **D.** $\ln 2+3$

Lời giải

Theo giả thiết ta có $f'(x)=\dfrac{1}{x(\ln x-1)}$ từ đây suy ra

$$\Rightarrow f(x)=\int\frac{1}{x(\ln x-1)}dx=\int\frac{d(\ln x-1)}{(\ln x-1)}=\ln\left|\ln x-1\right|+C=\begin{cases}\ln(1-\ln x)+C_1 \text{ khi } x\in(0;e)\\ \ln(\ln x-1)+C_2 \text{ khi } x\in(e;+\infty)\end{cases}$$

Ta xét 2 trường hợp:

- $f\left(\frac{1}{e^2}\right)=\ln 6\Rightarrow \ln\left(1-\ln\frac{1}{e^2}\right)+C_1=\ln 6\Rightarrow C_1=\ln 2$
- $f\left(e^2\right)=3\Rightarrow \ln\left(\ln e^2-1\right)+C_2=3\Rightarrow C_2=3$

Do đó $f(x)=\begin{cases}\ln(1-\ln x)+\ln 2 \text{ khi } x\in(0;e)\\ \ln(\ln x-1)+3 \text{ khi } x\in(e;+\infty)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}f\left(\frac{1}{e}\right)=\ln 2+\ln 2\\ f\left(e^3\right)=\ln 2+3\end{cases}$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{e}\right)+f\left(e^3\right)=3(\ln 2+1)$

Chọn ý **C.**

Câu 5.

Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=\frac{1}{1+\sin 2x}$ với $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Biết $F(0)=1$, $F(\pi)=0$, tính $P=F\left(-\frac{\pi}{12}\right)-F\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

A. $P=0$ **B.** $P=2-\sqrt{3}$ **C.** $P=1$ **D.** Không $\exists$

Lời giải

Với $x\in\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi;-\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$ ta có:

$$F(x)=\int\frac{dx}{1+\sin 2x}=\int\frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}=\int\frac{dx}{2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{2}\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+C$$

Ta xét 2 trường hợp sau:

- Ta có $0;-\frac{\pi}{12}\in\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)$ nên:

$$F(0)-F\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{2}\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^{-\frac{\pi}{12}}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\xrightarrow{F(0)=1}F\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

- Ta có $\pi;\frac{11\pi}{12}\in\left(\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right)$ nên:

$$F(\pi)-F\left(\frac{11\pi}{12}\right)=\frac{1}{2}\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_{\frac{11\pi}{12}}^{\pi}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\xrightarrow{F(\pi)=0}F\left(\frac{11\pi}{12}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vậy $P=F\left(-\frac{\pi}{12}\right)-F\left(\frac{11\pi}{12}\right)=1$

Chọn ý **C.**

Câu 6.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)=\sqrt{e^x+e^{-x}-2}$, $f(0)=5$ và $f\left(\ln\frac{1}{4}\right)=0$.

Giá trị của biểu thức $S=f(-\ln 16)+f(\ln 4)$ bằng?

A. $S=\frac{31}{2}$ **B.** $S=\frac{9}{2}$ **C.** $S=\frac{5}{2}$ **D.** $f(0).f(2)=1$

Lời giải

Ta có $f'(x)=\sqrt{e^x+e^{-x}-2}=\frac{\left|e^x-1\right|}{\sqrt{e^x}}=\begin{cases} e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}} & \text{khi} \quad x\ge 0 \\ e^{-\frac{x}{2}}-e^{\frac{x}{2}} & \text{khi} \quad x<0 \end{cases}$.

Do đó $f(x)=\begin{cases} 2e^{\frac{x}{2}}+2e^{-\frac{x}{2}}+C_1 & \text{khi} \quad x\ge 0 \\ -2e^{-\frac{x}{2}}-2e^{\frac{x}{2}}+C_2 & \text{khi} \quad x<0 \end{cases}$.

Theo giả thiết ta có:

$$f(0)=5 \text{ nên } 2e^0+2e^0+C_1=5 \Leftrightarrow C_1=1 \Rightarrow f(\ln 4)=2e^{\frac{\ln 4}{2}}+2e^{-\frac{\ln 4}{2}}+1=6$$

Tương tự ta có $f\left(\ln\frac{1}{4}\right)=0$ nên $-2e^{-\frac{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}{2}}-2e^{\frac{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}{2}}+C_2=0 \Leftrightarrow C_2=5$

$$\Rightarrow f(-\ln 16)=-2e^{-\frac{(-\ln 16)}{2}}-2e^{\frac{(-\ln 16)}{2}}+5=-\frac{7}{2}$$

Vậy $S=f(-\ln 16)+f(\ln 4)=\frac{5}{2}$.

VII. TÍCH PHÂN TRUY HỒI, CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN TỚI DÃY SỐ.

Trong bài viết này chủ yếu là các bài toán ở dạng tự luân, mình sẽ giới thiệu qua để có thể không may đề thi thử của các trường có thể ra thì ta có thể xử lý được. Ở phần này ta sẽ cùng tìm hiểu các dạng tích phân truy hồi dạng $I_n=\int_{\alpha}^{\beta} f(x,n)dx$ với các câu hỏi hay gặp là:

1. Thiết lập công thức truy hồi $I_n=g(I_{n\pm k})(k=\overline{1;n})$.
2. Chứng minh công thức truy hồi cho trước.
3. Sau khi thiết lập được công thức truy hồi yêu cầu đi tính I_n ứng với một vài giá trị *n* nào đó hoặc tính giới hạn của hàm số hoặc dãy số có liên quan với I_n.

Về phương pháp làm thì chủ yếu biến đổi để đưa về dạng truy hồi bằng cách sử dụng nguyên hàm từng phần, nhìn chung tùy vào bài toán mà sẽ có cách giải hợp lý, để hiểu rõ hơn ta cùng xét các ví dụ sau:

Câu 1.

Xét tích phân $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$ với $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Tìm mối quan hệ giữa I_n, I_{n+2}
2. Tính I_5, I_6.
3. Tìm công thức tổng quát của I_n.
4. Xét dãy số (u_n) cho bởi $u_n=(n+1)I_n.I_{n+1}$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

Lời giải

1. Tìm mối quan hệ giữa I_n, I_{n+2}

Ta có: $I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x(1-\cos^2 x)dx=I_n-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x.\cos^2 xdx\,(1)$

Sử dụng công thức nguyên hàm từng phần ta đặt $\begin{cases} du=-\sin xdx \\ v=\int\sin^n x.\cos xdx=\dfrac{\sin^{n+1}x}{n+1}\end{cases}$

$$\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin_n x.\cos^2 xdx=\left.\frac{\cos x\sin^{n+1}x}{n+1}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}xdx=\frac{I_{n+2}}{n+1}(2)$$

Thay (2) vào (1) ta được: $I_{n+2}=I_n-\dfrac{I_{n+2}}{n+1}\Leftrightarrow I_n=\dfrac{n+2}{n+1}I_{n+2}$

2. Tính I_5, I_6.

Sử dụng kết quả ở trên ta được: $\begin{cases} I_5 = \dfrac{4}{5}I_3 = \dfrac{8}{15}I_1 = \dfrac{8}{15}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \dfrac{8}{15} \\ I_6 = \dfrac{5}{6}I_4 = \dfrac{15}{24}I_2 = \dfrac{15}{24}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \dfrac{15\pi}{96} \end{cases}$

3. Tìm công thức tổng quát của I_n.

Ta có: $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1, I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{4}$

Ta đã có kết quả $I_n = \frac{n+2}{n+1}I_{n+2}$, đến đây xét 2 trường hợp:

+ Trường hợp 1: $n = 2k\left(k \in \mathbb{N}^*\right)$. Ta có: $I_2 = \frac{4}{3}I_4, I_4 = \frac{6}{5}I_6, ..., I_{2k-2} = \frac{2k}{2k-1}I_{2k}$.

Nhân theo vế các đẳng thức ta được:

$$I_2 = \frac{4.6...2k}{3.5...(2k-1)}I_{2k} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{4.6...2k}{3.5...(2k-1)}I_{2k} \Leftrightarrow I_{2k} = \frac{3.5...(2k-1)}{4.6...2k}\frac{\pi}{4}$$

+ Trường hợp 2: Với n lẻ hay $n = 2k-1$, ta có: $I_1 = \frac{3}{2}I_3, I_3 = \frac{5}{4}I_5, ..., I_{2k-3} = \frac{2k-1}{2k-3}I_{2k-1}$.

Nhân theo vế các đẳng thức ta được:

$$I_{2k-1} = \frac{2.4...(2k-2)}{3.5...(2k-1)}I_1 = \frac{2.4...(2k-2)}{3.5...(2k-1)}$$

4. Xét dãy số (u_n) cho bởi $u_n = (n+1)I_n.I_{n+1}$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Ta có: $u_n = (n+1)I_n.I_{n+1} = (n+1).\frac{n+2}{n+1}I_{n+2}I_{n+1} = (n+2)I_{n+1}.I_{n+2} = u_{n+1}$

Vậy $u_{n+1} = u_n = ... = u_1 = 2I_1I_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

Câu 2.

Tính tích phân $I_n = \int_0^{\pi} (\cos x)^n \cos nx dx$

Lời giải

Sử dụng công thức nguyên hàm từng phần ta có

$$I_n = \int_0^{\pi} (\cos x)^n \cos nx dx = \frac{1}{n}\int_0^{\pi} (\cos x)^n d(\sin nx) = \left.\frac{(\cos x)^n \sin nx}{n}\right|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \sin nx d(\cos x)^n$$

$$= \int_0^{\pi} \sin nx (\cos x)^{n-1} \sin x dx = \int_0^{\pi} (\cos x)^{n-1} \sin nx \sin x dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\cos x)^{n-1}\left(\cos(n-1)x - \cos(n+1)x\right)dx = \frac{1}{2}I_{n-1} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\cos x)^{n-1}\cos(n+1)x dx$$

$$= \frac{1}{2}I_{n-1} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\cos x)^{n-1}\left[\cos nx \cos x - \sin nx \sin x\right]xdx$$

$$= \frac{1}{2}I_{n-1} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\cos x)^n \cos nx dx + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\cos x)^{n-1}\sin nx \sin x = \frac{1}{2}I_{n-1} - \frac{1}{2}I_n + \frac{1}{2}I_n = \frac{1}{2}I_{n-1}$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{1}{2}I_{n-1} = \frac{1}{2^2}I_{n-2} = \ldots = \frac{1}{2^n}I_0 = \frac{1}{2^n}\int_0^{\pi} dx = \frac{\pi}{2^n}$$

Câu 3.

Xét tích phân $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Chứng minh rằng $I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1} - I_n$
2. Tính I_5, I_6

Lời giải

1. Ta có:

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\left(\tan^{n+2} x + \tan^n x \right) - \tan^n x \right) dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\tan^n x \left(\tan^2 x + 1 \right) - \tan^n x \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^n x}{\cos^2 x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x d\left(\tan x \right) - I_n = \frac{1}{n+1} - I_n$$

Ta có điều phải chứng minh!

2. Ta có:

- $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x}{\cos x} dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{d\left(\cos x \right)}{\cos x} = \dfrac{1}{2} \ln 2$
- $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \left(\tan x - x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{4-\pi}{4}$

Áp dụng công thức truy hồi $I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1} - I_n$ ta được:

- $I_5 = \dfrac{1}{4} - I_3 = \dfrac{1}{4} - \left(\dfrac{1}{2} - I_1 \right) = \dfrac{1}{2} \ln 2 - \dfrac{1}{4}$
- $I_6 = \dfrac{1}{5} - I_4 = \dfrac{1}{5} - \left(\dfrac{1}{3} - I_2 \right) = \dfrac{13}{15} - \dfrac{\pi}{4}$

Câu 4.

Xét tích phân $I_n = \int_0^1 \left(1 - x^2 \right)^n dx$

1. Tính I_n
2. Tính $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{I_{n+1}}{I_n}$

Lời giải

1. Tính I_n

Đặt $\begin{cases} u = \left(1 - x^2 \right)^n \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = n\left(1 - x^2 \right)^{n-1} (-2x) dx \\ v = x \end{cases}$

$$\Rightarrow I_n = x\left(1 - x^2 \right)^n \Big|_0^1 + 2n\int_0^1 x^2 \left(1 - x^2 \right)^{n-1} dx$$
$$= 2n\int_0^1 \left(1 - \left(1 - x^2 \right) \right)\left(1 - x^2 \right)^{n-1} dx = 2n\left(\int_0^1 \left(1 - x^2 \right)^{n-1} dx - \int_0^1 \left(1 - x^2 \right)^n dx \right) = 2n\left(I_{n-1} - I_n \right)$$

Vậy $I_n = 2n\left(I_{n-1} - I_n\right) \Leftrightarrow I_n = \dfrac{2n}{2n+1} I_{n-1} \; (*)$

Từ $(*)$ ta có $I_n = \dfrac{2n}{2n+1} I_{n-1} = \dfrac{2n}{2n+1} \cdot \dfrac{2n-2}{2n-1} I_{n-2} = \dfrac{4.6.8...2n}{5.7.9...(2n+1)} I_1$

Mặt khác ta lại có: $I_1 = \int_0^1 \left(1 - x^2\right) dx = \left(x - \dfrac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \dfrac{2}{3} \Rightarrow I_n = \dfrac{2.4.6.8...2n}{3.5.7.9...(2n+1)}$.

2. Tính $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{I_{n+1}}{I_n}$

Ta có: $I_n = \dfrac{2n}{2n+1} I_{n-1} \Rightarrow I_{n+1} = \dfrac{2(n+1)}{2(n+1)+1} I_n \Leftrightarrow \dfrac{I_{n+1}}{I_n} = \dfrac{2n+2}{2n+3} \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{I_{n+1}}{I_n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n+2}{2n+3} = 1$

Câu 5.

1. Xét tích phân $I_n = \int_0^1 \dfrac{e^{nx} dx}{1 + e^x}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng $I_n = \dfrac{e^{n-1} - 1}{n-1} - I_{n-1}$.
2. Xét tích phân $I_n = \int_0^3 (3-x)^n e^x dx$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng $I_n = -3^n + nI_{n-1}$

Lời giải

1. Ta có:

$$I_n + I_{n-1} = \int_0^1 \frac{e^{nx} dx}{1+e^x} + \int_0^1 \frac{e^{x(n-1)} dx}{1+e^x} = \int_0^1 \frac{e^{x(n-1)}\left(e^x + 1\right) dx}{1+e^x} = \frac{e^{x(n-1)}}{n-1}\Bigg|_0^1 = \frac{e^{n-1} - 1}{n-1}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh!

2. Xét tích phân $I_n = \int_0^3 (3-x)^n e^x dx$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng $I_n = -3^n + nI_{n-1}$

Đặt $\begin{cases} u = (3-x)^n \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -n(3-x)^{n-1} dx \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow I_n = (3-x)^n e^x \Big|_0^3 + n\int_0^3 (3-x)^{n-1} e^x dx = -3^n + nI_{n-1}$

Từ đây có điều phải chứng minh!

Câu 6.

Cho $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\, dx$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Biết (u_n) là dãy cho bởi $u_n = \dfrac{I_n}{I_{n+1}}$. Tìm $\lim u_n$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = v^n \\ dv = \sqrt{1-x}\, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = nx^{n-1} dx \\ v = \int \sqrt{1-x}\, dx = -\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{1-x}\right)^3 \end{cases}$

$$\Rightarrow I_n = -\frac{2}{3} x^n \left(\sqrt{1-x}\right)^3\Bigg|_0^1 + \frac{2}{3} n \int_0^1 \left(\sqrt{1-x}\right)^3 .x^{n-1} dx$$

$$= \frac{2}{3} n\left(\int_0^1 \sqrt{1-x}.x^{n-1} dx - \int_0^1 \sqrt{1-x}.x^n dx\right) = \frac{2}{3} n\left(I_{n-1} - I_n\right)$$

Vậy $I_n = \dfrac{2}{3} n\left(I_{n-1} - I_n\right) \Rightarrow I_n = \dfrac{2n}{2n+3} I_{n-1} \Rightarrow I_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+5} I_n \Rightarrow \lim u_n = \lim \dfrac{I_{n+1}}{I_n} = 1$

Mở rộng. Yêu cầu bài toán có thể cho thêm chứng minh rằng $I_n < \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n+2}}$

Trước hết ta đi tìm công thức tổng quát của dãy số này. Ta có

$$I_n = \frac{2n}{2n+3}I_{n-1};I_{n-1} = \frac{2n-2}{2n+1}I_{n-2};\ldots;I_2 = \frac{4}{7}I_1;I_1 = \frac{2}{5}I_0;I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}dx = \frac{2}{3}$$

Nhân các đẳng thức và rút gọn 2 vế ta có $I_n = \dfrac{2n}{2n+3}\cdot\dfrac{2n-2}{2n+1}\cdot\dfrac{2n-4}{2n-1}\cdot\ldots\dfrac{4}{7}\cdot\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{2}{3}$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$2k+1 = \frac{(2k+2)+(2k)}{2} > \sqrt{(2k+2)(2k)} \Rightarrow \frac{1}{2k+1} < \frac{1}{\sqrt{(2k+2)(2k)}}$$

$$\Rightarrow I_n < \frac{2n}{\sqrt{(2n+4)(2n+2)}}\cdot\frac{2n-2}{\sqrt{(2n+2)(2n)}}\cdot\frac{2n-4}{\sqrt{(2n)(2n-2)}}\cdots\frac{4}{\sqrt{8.6}}\cdot\frac{2}{\sqrt{6.4}}\cdot\frac{2}{\sqrt{4.2}}$$

$$= \frac{2.\sqrt{2}}{\sqrt{(2n+4)(2n+2)}\sqrt{2n+2}} = \frac{2\sqrt{2}}{(2n+2)\sqrt{2(n+2)}} = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+2}}$$

Câu 7.

Cho $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm hệ thức liên hệ giữa I_n, I_{n+1}

Lời giải

Áp dụng công thức nguyên hàm từng phần ta có

$$I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n} = \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} - \int x d\left(\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^n}\right)$$

$$= \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + 2n\int \frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}dx = \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + 2n\int \frac{\left(x^2+a^2\right)-a^2}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}dx$$

$$= \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + 2n\left[\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n} - a^2\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}\right] = \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + 2n\left(I_n - a^2 I_{n+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\,na^2 I_{n+1} = \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + (2n-1)I_n \Leftrightarrow I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\cdot\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}I_n$$

Câu 8.

Chứng minh rằng

1. $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos\left[(n+2)x\right]dx = 0$
2. $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin\left[(n+2)x\right]dx = \frac{1}{n+1}$
3. $I = \displaystyle\int_0^{\pi} (\sin x)^{n-1} \cos\left[(n+1)x\right]dx = 0$

Lời giải

1. Sử dụng công thức lượng giác biến đổi tích phân ban đầu ta được

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\cos\left[(n+2)x\right]dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\left(\cos\left[(n+1)x\right]\cos x-\sin\left[(n+1)x\right]\sin x\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+1}x\cos\left[(n+1)x\right]dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\sin\left[(n+1)x\right]\cos^n x\sin xdx=I_1-I_2$$

Xét tích phân $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+1}x\cos\left[(n+1)x\right]dx=\frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+1}xd\left(\sin\left[(n+1)x\right]\right)$

$$=\frac{1}{n+1}\cos^{n+1}x\sin\left[(n+1)x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\left[(n+1)x\right]d\left(\cos^{n+1}x\right)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\left[(n+1)x\right]\cos^n x\sin xdx=I_2\Rightarrow I=I_1-I_2=0$$

2. Sử dụng công thức lượng giác biến đổi tích phân ban đầu ta được

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\sin\left[(n+2)x\right]dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\left(\sin\left[(n+1)x\right]\cos x+\cos\left[(n+1)x\right]\sin x\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+1}x\sin\left[(n+1)x\right]dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\left[(n+1)x\right]\cos^n x\sin xdx=I_1+I_2$$

Xét tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+1}x\sin\left[(n+1)x\right]dx=\frac{-1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+1}xd\left(\cos\left[(n+1)x\right]\right)$

$$=\frac{-1}{n+1}\cos^{n+1}x\cos\left[(n+1)x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\left[(n+1)x\right]d\left(\cos^{n+1}x\right)$$

$$=\frac{1}{n+1}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\left[(n+1)x\right]\cos^n x\sin xdx=\frac{1}{n+1}-I_2\Rightarrow I=I_1+I_2=\frac{1}{n+1}$$

3. Tương tự 2 câu trên ta sẽ biến đổi giả thiết trở thành

$$I=\int_0^{\pi}(\sin x)^{n-1}\cos\left[(n+1)x\right]dx=\int_0^{\pi}(\sin x)^{n-1}(\cos nx\cos x-\sin nx\sin x)dx$$

$$=\int_0^{\pi}\cos nx(\sin x)^{n-1}\cos xdx-\int_0^{\pi}(\sin x)^n\sin nxdx=I_1-I_2$$

Xét tích phân $I_2=\int_0^{\pi}(\sin x)^n\sin nxdx=\frac{-1}{n}(\sin x)d(\cos nx)=\frac{-1}{n}\cos nx(\sin x)^n\Big|_0^{\pi}+$

$$+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nxd\left(\sin^n x\right)=\int_0^{\pi}\cos nxd\sin^{n-1}x\cos x=I_1\Rightarrow I=I_1-I_2=0$$

Câu 9.

Tính các tích phân sau:

1. $I_n=\int_1^e x^n\cos(\ln x)dx$
2. $I_n=\int_1^e x^m(\ln x)^n dx\quad(n\in\mathbb{N},m\neq-1)$

Lời giải

1. Sử dụng công thức nguyên hàm từng phần ta có

$$I_n=\int_1^e x^n\cos(\ln x)dx=\frac{1}{n+1}\int_1^e\cos(\ln x)d\left(x^{n+1}\right)=\frac{x^{n+1}\cos(\ln x)}{n+1}\Bigg|_1^e-\frac{1}{n+1}\int_1^e x^{n+1}d(\cos(\ln x))$$

$$=\frac{e^{n+1}\cos 1-1}{n+1}+\frac{1}{n+1}\int_1^e\frac{x^{n+1}}{x}\sin(\ln x)dx=\frac{e^{n+1}\cos 1-1}{n+1}+\frac{1}{n+1}\int_1^e x^n\sin(\ln x)dx$$

Xét tích phân $J_n=\int_1^e x^n\sin(\ln x)dx=\frac{1}{n+1}\int_1^e\sin(\ln x)d\left(x^{n+1}\right)$

$$=\left.\frac{x^{n+1}\sin(\ln x)}{n+1}\right|_n^e-\int_1^e x^{n+1}d\left(\sin(\ln x)\right)=\frac{e^{n+1}\sin 1}{n+1}-\frac{1}{n+1}\int_1^e\frac{x^{n+1}}{x}\cos(\ln x)dx$$

$$=\frac{e^{n+1}\sin 1}{n+1}-\frac{1}{n+1}\int_1^e x^n\cos(\ln x)dx=\frac{e^{n+1}\sin 1}{n+1}-\frac{1}{n+1}I_n$$

$$\Rightarrow I_n=\frac{e^{n+1}\cos 1-1}{n+1}+\frac{1}{n+1}J_n=\frac{e^{n+1}\cos 1-1}{n+1}+\frac{1}{n+1}\left[\frac{e^{n+1}\sin 1}{n+1}-\frac{1}{n+1}I_n\right]$$

$$\Leftrightarrow\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^2}I_n=\frac{e^{n+1}\cos 1-1}{n+1}+\frac{e^{n+1}\sin 1}{(n+1)^2}$$

$$\Rightarrow I_n=\frac{\left(e^{n+1}\cos 1-1\right)(n+1)+e^{n+1}\sin 1}{(n+1)^2+1},J_n=\frac{(n+1)e^{n+1}\sin 1-e^{n+1}\cos 1+1}{(n+1)^2+1}$$

2. Tương tự câu trên, sử dụng công thức nguyên hàm từng phần ta có

$$I_n=\int_1^e x^m(\ln x)^n dx=\frac{1}{m+1}\int_1^e(\ln x)^n d\left(x^{m+1}\right)=\left.\frac{x^{m+1}(\ln x)^n}{m+1}\right|_1^e-\frac{1}{m+1}\int_1^e x^{m+1}d(\ln x)^n$$

$$=\frac{e^{m+1}}{m+1}-\frac{1}{m+1}\int_1^e\frac{x^{m+1}}{x}(\ln x)^{n-1}dx=\frac{e^{m+1}}{m+1}-\frac{n}{m+1}\int_1^e x^m(\ln x)^{n-1}dx=\frac{e^{m+1}}{m+1}-\frac{n}{m+1}I_{n-1}$$

$$\Rightarrow(m+1)I_n=e^{m+1}-nI_{n-1}\Rightarrow I_n=\frac{e^{m+1}-nI_{n-1}}{m+1}$$

$$\Rightarrow I_n=A_n+nA_{n-1}+n(n-1)A_{n-2}+\ldots+n(n-1)\ldots 3.2A_1+n(n-1)\ldots 3.2.1.A_0$$

$$=-\left(1+n+n(n-1)+n(n-1)(n-2)+\ldots+n(n-1)\ldots 3.2\right)+n(n-1)\ldots 2.1(e-1)$$

$$=n!(e-1)-\left(\frac{n!}{n!}+\frac{n!}{(n-1)!}+\frac{n!}{(n-2)!}+\ldots+\frac{n!}{2!}+\frac{n!}{1!}\right)$$

Câu 10.

Chứng minh các hệ thức truy hồi sau với A,B,C là các hệ số bất định.

1. $I_n=\int\frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^n}=\frac{A\sin x+B\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}}+C\int\frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^{n-2}}$

2. $I_n=\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^n}=\frac{A\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}}+B\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-1}}+C\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-2}}$

Trong đó $2\le n\in N,a^2-b^2\ne 0$

Lời giải

1. Biến đổi tích phân cần tính ta có $I_n=\int\frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^n}=\int\frac{d(-a\cos x+b\sin x)}{(a\sin x+b\cos x)^{n+1}}$

CHINH PHỤC OLYMPIC TOÁN

$$=\frac{-a\cos x+b\sin x}{(a\sin x+b\cos x)^{n+1}}-\int(-a\cos x+b\sin x)d\left(\frac{1}{(a\sin x+b\cos x)^{n+1}}\right)$$

$$=\frac{-a\cos x+b\sin x}{(a\sin x+b\cos x)^{n+1}}-(n+1)\int\frac{(a\cos x-b\sin x)^2dx}{(a\sin x+b\cos x)^{n+2}}=\frac{-a\cos x+b\sin x}{(a\sin x+b\cos x)^{n+1}}-$$

$$-(n+1)\int\frac{\left[(a\cos x-b\sin x)^2+(b\cos x+a\sin x)^2\right]-(b\cos x+a\sin x)^2}{(a\sin x+b\cos x)^{n+2}}dx$$

$$=\frac{-a\cos x+b\sin x}{(a\sin x+b\cos x)^{n+1}}-(n+1)(a^2+b^2)I_{n+2}+(n+1)I_n$$

$$\Rightarrow(n+1)(a^2+b^2)I_{n+2}=\frac{-a\cos x+b\sin x}{(a\sin x+b\cos x)^{n+1}}+nI_n$$

$$\Rightarrow I_{n+2}=\frac{1}{(n+1)(a^2+b^2)}\left[\frac{-a\cos x+b\sin x}{(a\sin x+b\cos x)^{n+1}}+nI_n\right]$$

$$\Rightarrow I_n=\frac{1}{(n-1)(a^2+b^2)}\left[\frac{-a\cos x+b\sin x}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}}+(n-2)I_{n-2}\right]$$

2. Biến đổi tích phân ban đầu ta được

$$I_{n-2}=\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-2}}=\int\frac{(a+b\cos x)dx}{(a+b\cos x)^{n-1}}=a\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-1}}+b\int\frac{d(\sin x)}{(a+b\cos x)^{n-1}}$$

$$=aI_{n-1}+\frac{b\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}}-(n-1)\int\frac{b^2\sin^2 xdx}{(a+b\cos x)^n}$$

$$=aI_{n-1}+\frac{b\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}}-(n-1)\int\frac{(b^2-a^2)+2a(a+b\text{cox})-(a+b\cos x)^2}{(a+b\cos x)^n}dx$$

$$=aI_{n-1}+\frac{b\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}}+(n-1)(a^2-b^2)I_n-2a(n-1)I_{n-1}+(n-1)I_{n-2}$$

$$\Leftrightarrow I_n=\frac{-b}{(n-1)(a^2-b^2)}\cdot\frac{\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}}+\frac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2-b^2)}I_{n-1}-\frac{n-2}{(n-1)(a^2-b^2)}I_{n-2}$$

Câu 11.

Tìm hệ thức truy hồi của tích phân $I_n=\int\left(\dfrac{\sin\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}\right)^n dx$

Lời giải

Đặt $u=\dfrac{\sin\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}\Rightarrow du=\dfrac{\cos\frac{x-a}{2}\sin\frac{x+a}{2}-\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{2\left(\sin\frac{x+a}{2}\right)^2}dx=\dfrac{\sin adx}{2\left(\sin\frac{x+a}{2}\right)^2}$

Khi đó ta suy ra được hệ thức sau

$$I_n - I_{n-2} = \int u^{n-2}\left(u^2-1\right)dx = \int u^{n-2}\frac{\left(\sin\frac{x-a}{2}\right)^2 - \left(\sin\frac{x+a}{2}\right)^2}{\left(\sin\frac{x+a}{2}\right)^2}dx = -2\int u^{n-2}\sin x du$$

$$= 2\int u^{n-2}\left(\sin a - \left(\sin a + \sin x\right)\right)du = 2\sin a\int u^{n-2}du - 2\int u^{n-2}\frac{\left(\sin a + \sin x\right)\sin a}{2\left(\sin\frac{x+a}{2}\right)^2}dx$$

$$= \frac{2\sin a}{n-1}u^{n-1} - 2\int u^{n-2}dx - 2\int u^{n-2}\left[\frac{\left(\sin a+\sin x\right)\sin a}{2\left(\sin\frac{x+a}{2}\right)^2} - 1\right]dx = \frac{2\sin a}{n-1}u^{n-1} - 2I_{n-2} - 2J$$

Trong đó $J = \int u^{n-2}\left[\frac{\left(\sin a+\sin x\right)\sin a}{2\left(\sin\frac{x+a}{2}\right)^2} - 1\right]dx = \int u^{n-1}\frac{\left(\sin a+\sin x\right)\sin a - 2\left(\sin\frac{x+a}{2}\right)^2}{2\left(\sin\frac{x+a}{2}\right)\left(\sin\frac{x-a}{2}\right)}dx$

$$= \frac{2\sin a}{n-1}u^{n-1} - 2\int u^{n-2}dx - 2\int u^{n-2}\left[\frac{\left(\sin a+\sin x\right)\sin a}{2\left(\sin\frac{x+a}{2}\right)^2} - 1\right]dx = \frac{2\sin a}{n-1}u^{n-1} - 2I_{n-2} - 2J$$

$$= \int u^{n-1}\frac{\sin^2 a + \sin x\sin a - 1 + \cos\left(x+a\right)}{\cos a - \cos x}dx = -\cos a\int u^{n-1}dx = -\cos a\cdot I_{n-1}$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{2\sin a}{n-1}u^{n-1} - 2I_{n-2} + 2I_{n-1}\cos a$$

Câu 12.

Đặt $I_n = \int_0^1\left(\sqrt[n]{\frac{\left(x+1\right)^{2n}\left(2x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^{2n+1}}} - \sqrt[n]{\frac{2x^2+1}{\left(x^2+1\right)^{n+1}}}\right)dx$. Tính $\lim\frac{I_n}{I_{n+1}}$.

A. 1 **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** –1 **D.** $\frac{3}{2}$

Lời giải

Ta có bước biến đổi sau $I_n = \int_0^1\left(\sqrt[n]{\frac{2x^2+1}{x^2+1}}.\frac{\left(x+1\right)^2}{\left(x^2+1\right)^2} - \sqrt[n]{\frac{2x^2+1}{x^2+1}}.\frac{1}{x^2+1}\right)dx$

$$= \int_0^1\sqrt[n]{\frac{2x^2+1}{x^2+1}}.\frac{\left(x+1\right)^2-\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}dx = \int_0^1\sqrt[n]{\frac{2x^2+1}{x^2+1}}.\frac{2xdx}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Đến lúc này ta sẽ đổi biến. Đặt $u = \frac{2x^2+1}{x^2+1} \Rightarrow du = \frac{2xdx}{\left(x^2+1\right)}$

$$\Rightarrow I_n = \int_1^{\frac{3}{2}} \sqrt[n]{u}\,du = \int_1^{\frac{3}{2}} u^{\frac{1}{n}}du = \left.\frac{u^{\frac{n+1}{n}}}{\frac{n+1}{n}}\right|_1^{\frac{3}{2}} = \frac{n}{n+1}.\left(\frac{3}{2}^{\frac{n+1}{n}} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{I_n}{I_{n+1}} = \frac{\frac{n}{n+1}.\left(\frac{3}{2}^{\frac{n+1}{n}} - 1\right)}{\frac{n+1}{n+2}.\left(\frac{3}{2}^{\frac{n+2}{n+1}} - 1\right)} \Rightarrow \lim \frac{I_n}{I_{n+1}} = 1$$

Chọn ý **A.**

Câu 13.

Ta đặt $F_n(x) = \int \frac{\sqrt[n]{x - x^n}}{x^{n+1}}dx$. Biết $F_n(1) = 0\ \forall n$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(2)$.

A. 1 **B.** $-\infty$ **C.** -1 **D.** $+\infty$

Lời giải

Ta có $F_n(x) = \int \frac{\sqrt[n]{x - x^n}}{x^{n+1}}dx = \int \frac{\sqrt[n]{x^n\left(\frac{1}{x^{n-1}} - 1\right)}}{x^{n+1}}dx = \int \frac{\sqrt[n]{\frac{1}{x^{n-1}} - 1}}{x^n}dx$

Đặt $u = \frac{1}{x^{n-1}} - 1 \Rightarrow du = \frac{1-n}{x^n}dx \Rightarrow \frac{dx}{x^n} = \frac{du}{1-n}$

$$\Rightarrow F_n(x) = G_n(u) = \int \frac{\sqrt[n]{u}}{1-n}du = \frac{1}{1-n}.\frac{u^{\frac{n+1}{n}}}{\frac{n+1}{n}} + C$$

$$\Rightarrow F_n(x) = \frac{n}{1-n^2}.\left(\frac{1}{x^{n-1}} - 1\right)^{\frac{n+1}{n}} + C.\ \text{Mà } F_n(1) = 0\ \forall n \Rightarrow C = 0\ \forall n$$

$$\Rightarrow F_n(2) = \frac{n}{1-n^2}\left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right)^{\frac{n+1}{n}}.\ \text{Có } \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{1-n^2} = -\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right) = -1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} F_n(2) = +\infty$$

Chọn ý **D.**

Câu 14.

Cho $I_n = \int \tan^n x dx$ với $n \in \mathbb{N}$. Khi đó $I_0 + I_1 + 2(I_2 + I_3 + ... + I_8) + I_9 + I_{10}$ bằng?

A. $\sum\limits_{r=1}^{9} \frac{(\tan x)^r}{r} + C$ **B.** $\sum\limits_{r=1}^{9} \frac{(\tan x)^{r+1}}{r+1} + C$ **C.** $\sum\limits_{r=1}^{10} \frac{(\tan x)^r}{r} + C$ **D.** $\sum\limits_{r=1}^{10} \frac{(\tan x)^{r+1}}{r+1} + C$

Lời giải

Biến đổi tích phân ban đầu ta có

$$I_n = \int \tan^{n-2} x.\tan^2 x dx = \int \tan^{n-2} x.\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2} + C$$

$$= \int \tan^{n-2} x.(\tan x)' dx - I_{n-2} \Rightarrow I_n + I_{n-2} = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} + C .$$

Khi đó $I_0 + I_1 + 2(I_2 + I_3 + ... + I_8) + I_9 + I_{10} = (I_{10} + I_8) + (I_9 + I_7) + ... + (I_3 + I_1) + (I_2 + I_0)$

$$= \frac{\tan^9 x}{9} + \frac{\tan^8 x}{8} + ... + \frac{\tan^2 x}{2} + \tan x + C = \sum_{r=1}^{9} \frac{\tan^r x}{r} + C .$$

Chọn ý **A.**

Câu 15.

Cho tích phân $I_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx$ với $n \in \mathbb{N}$.

Đặt $u_n = 1.(I_1 + I_2) + 2(I_2 + I_3) + 3(I_3 + I_4) + ... + n(I_n + I_{n+1}) - n$. Biết $\lim u_n = L$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $L \in (-1;0)$ **B.** $L \in (-2;-1)$ **C.** $L \in (0;1)$ **D.** $L \in (1;2)$

Lời giải

Với $n \in \mathbb{N}$, biến đổi giả thiết ta có

$$I_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{e^{-nx}.e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 e^{-nx} dx - \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 e^{-nx} dx - I_n$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = \int_0^1 e^{-nx} dx - I_n \Rightarrow I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n}\left(1 - e^{-n}\right)$$

Do đó $u_n = (1-e^{-1}) + (1-e^{-2}) + (1-e^{-3}) + ... + (1-e^{-n}) - n \Rightarrow u_n = -e^{-1} - e^{-2} - e^{-3} - ... - e^{-n}$

Ta thấy u_n là tổng n số hạng đầu của một cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = -e^{-1}$ và $q = \frac{1}{e}$,

nên $\lim u_n = \frac{-e^{-1}}{1 - \frac{1}{e}} \Rightarrow L = \frac{-1}{e-1} \Rightarrow L \in (-1;0)$.

Chọn ý **A.**

Câu 16.

Có bao nhiêu giá trị nguyên dương n thỏa mãn tích phân

$$\int_0^2 \left(1 - n^2 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ... + nx^{n-1}\right) dx = -2$$

A. 1 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 3

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có:

$$\int_0^2 \left(1 - n^2 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ... + nx^{n-1}\right) dx = -2 \Leftrightarrow \left(x - n^2 x + x^2 + x^3 + x^4 + ... + x^n\right)\Big|_0^2 = -2$$

$$\Leftrightarrow 2 - 2n^2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^n = -2 \Leftrightarrow 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{n-1} = n^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 2^n - 1 = n^2 + 1 \Leftrightarrow 2^n - n^2 - 2 = 0.$$

Thử với các giá trị $n \in \{1;2;3;4\}$ đều không thỏa mãn.

Với $n \in \mathbb{Z}$, $n \ge 5$ ta chứng minh $2^n > n^2 + 2$ (1). Dễ thấy $n = 5$ thì (1) đúng.

Giả sử (1) đúng với $n = k$ với $k \in \mathbb{Z}$, $k \ge 5$. Khi đó $2^k > k^2 + 2$.

Khi đó: $2^{k+1} > 2(k^2+2) = k^2 + k^2 + 2 + 2 > k^2 + 2k + 1 + 2 = (k+1)^2 + 2$.

Do đó (1) đúng với $n = k+1$. Theo nguyên lý quy nạp thì (1) đúng.

Vậy không tồn tại số nguyên n.

Chọn ý **C.**

Câu 17.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện

$$f(2018x + 2017) = 2018f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tính tích phân $\int_0^1 [f(x)]^2 dx$?

A. $\frac{4}{3}[f(-1)]^2$ **B.** $\frac{5}{3}[f(-1)]^2$ **C.** $\frac{7}{3}[f(-1)]^2$ **D.** $\frac{8}{3}[f(-1)]^2$

Lời giải

Xét biểu thức $f(2018x+2017) = 2018f(x)$. Lấy đạo hàm 2 vế ta được

$$2018f'(2018x+2017) = 2018f'(x)$$

Thay x bởi $2018x + 2017$, ta được $f'(x) = f'\left(\dfrac{\dfrac{x-2017}{2018} - 2018 + 1}{2018}\right) = f'\left(\dfrac{x - 2018^2 + 1}{2018^2}\right)$

Thay đến n lần và bằng quy nạp ta chứng minh được

$$f'(x) = f'\left(\frac{x - 2018^n + 1}{2018^n}\right) = f'\left(\frac{x}{2018^n} - 1 + \frac{1}{2018^n}\right)$$

Khi $n \to +\infty \Rightarrow f'(x) = f'(-1) = f(x) = f'(-1)x + C(*)$

Thay $x = -1 \Rightarrow f(-1) = 2018f(-1) \Rightarrow f(-1) = 0$

Thay $x = -1 \Rightarrow (*): f(-1) = -f'(-1) + C = 0 \Leftrightarrow f'(-1) = C$

Vậy $f(x) = f'(-1)(x+1) \Rightarrow \int_0^1 [f(x)]^2 dx = \frac{7}{3}[f(-1)]^2$

Chọn ý **C.**

Câu 18.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_1^2 f(x)dx = 1$. Tính giới hạn của dãy số:

$$u_n = \frac{1}{n}\left[f(1) + \sqrt{\frac{n}{n+3}}f\left(\sqrt{\frac{n+3}{n}}\right) + \sqrt{\frac{n}{n+6}}f\left(\sqrt{\frac{n+6}{n}}\right) + \ldots + \sqrt{\frac{n}{4n-3}}f\left(\sqrt{\frac{4n-3}{n}}\right)\right]$$

A. 2 **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** 1 **D.** $\frac{4}{3}$

Lời giải

Chú ý đây là một câu sử dụng định nghĩa tích phân bằng tổng Riemann không nằm trong phạm vi kiến thức THPT nên chỉ mang tính tham khảo, không đi sâu!

Xét hàm số $g(x) = \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \Rightarrow S = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{3}{n}\frac{f\left(\sqrt{1+\frac{3i}{n}}\right)}{\sqrt{1+\frac{3i}{n}}} = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{3}{n}g\left(1+\frac{3i}{n}\right)$

Ta chia đoạn $[1;4]$ thành n phần bằng nhau bằng các điểm chia

$$x_i = 1 + i.\frac{4-1}{n}\left(i = \overline{0,n}\right)\left(x_0 = 1, \ldots, x_n = 4\right)$$

Mỗi đoạn con có độ dài là $x_{i+1} - x_i = \frac{4-1}{n} \Rightarrow S = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n-1}g(x_i)(x_{i+1} - x_i)$

$$\Rightarrow \lim S = \frac{1}{3}\int_1^4 g(x)dx = \frac{1}{3}\int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \frac{1}{3}\int_1^4 2f(\sqrt{x})d(\sqrt{x}) = \frac{2}{3}$$

Chọn ý **B.**

CHINH PHỤC OLYMPIC TOÁN

VIII. ỨNG DỤNG CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC TỔ HỢP.

Dấu hiệu sử dụng.

Ý tưởng của phương pháp này là dựa vào hệ thức $\int_a^b x^k dx = \left(\dfrac{x^{k+1}}{k+1}\right)\Big|_a^b = \dfrac{a^{k+1}-b^{k+1}}{k+1}$

Từ đấy dễ dàng tìm được dấu hiệu để sử dụng phương pháp này là số hạng của tổng có dạng $\dfrac{a^{k+1}-b^{k+1}}{k+1}C_n^k$. Cụ thể xét tích phân $I=\int_a^b (c+dx)^n dx$ ta có thể tính bằng 2 cách.

- Tính trực tiếp $I=\dfrac{1}{d}\int_a^b (c+dx)^n d(c+dx) = \dfrac{1}{d}\dfrac{(c+dx)^{n+1}}{n+1}\Bigg|_a^b$
- Tính gián tiếp $I=\int_a^b\left(\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k c^{n-k}d^k x^k\right)dx = \sum\limits_{k=0}^{n}\left(C_n^k c^{n-k} d^k \int_a^b x^k dx\right)$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k c^{n-k} d^k\left(\frac{x^{k+1}}{k+1}\right)\Bigg|_a^b\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k c^{n-k} d^k \frac{a^{k+1}-b^{k+1}}{k+1}\right)$$

Hai cách trên là như nhau nên từ đó ta có được

$$\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k c^{n-k} d^k \frac{a^{k+1}-b^{k+1}}{k+1}\right) = \frac{1}{d}\frac{(c+dx)^{n+1}}{n+1}\Bigg|_a^b$$

Tùy từng bài toán ta chọn các hệ số a, b, c, d thích hợp!
Để dễ dàng nhận biết hơn thì ta có thể chú ý như sau:

Nếu trong tổng dãy tổ hợp, các số hạng chứa các phân số $1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};...;\frac{1}{n}$ và mẫu số được xếp theo thứ tự tăng hoặc giảm đều theo một quy luật nào đó, ta nghĩ ngay đến việc sử dụng tích phân. Khi đó, ta thực hiện theo các bước sau:

- **Bước 1:** Tìm hàm để tính tích phân với các cận thích hợp.
- **Bước 2:** Tính tích phân trong cả hai vế: vế chưa khai triển nhị thức Newton và vế đã khai triển.
- **Bước 3:** Cho hai kết quả bằng nhau và kết luận.

Trước khi vào các bài toán cụ thể ta cần nhớ các đẳng thức tích phân sau:

1. $\int_a^b (x+1)^n dx = \int_a^b\left(C_n^0 + xC_n^1 + x^2C_n^2 + ... + C_n^n x^n\right)dx$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}\Bigg|_a^b = \left(xC_n^0 + C_n^1\frac{x^2}{2} + ... + C_n^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\Bigg|_a^b$$

2. $\int_a^b (1-x)^n dx = \int_a^b\left(C_n^0 - xC_n^1 + x^2C_n^2 - ...(-1)^n C_n^n x^n\right)dx$

$$\Leftrightarrow \frac{-(1-x)^{n+1}}{n+1}\Bigg|_a^b = \left(xC_n^0 - C_n^1\frac{x^2}{2} + ... + (-1)^n C_n^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\Bigg|_a^b$$

3. $\int_a^b (x+1)^n dx = \int_a^b\left(C_n^0x^n + C_n^1x^{n-1} + C_n^2x^{n-2} + ... + C_n^n\right)dx$

$$\Leftrightarrow \left.\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}\right|_a^b = \left.\left(C_n^0\frac{x^{n+1}}{n+1}+C_n^1\frac{x^n}{n}+C_n^2\frac{x^{n-1}}{n-1}+\ldots+C_n^n x\right)\right|_a^b$$

4. $\int_a^b (x-1)^n\,dx = \int_a^b \left(C_n^0x^n - C_n^1x^{n-1}+C_n^2x^{n-2}-\ldots+(-1)^nC_n^n\right)dx$

$$\Leftrightarrow \left.\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}\right|_a^b = \left.\left(C_n^0\frac{x^{n+1}}{n+1}-C_n^1\frac{x^n}{n}+C_n^2\frac{x^{n-1}}{n-1}-\ldots+(-1)^nC_n^n x\right)\right|_a^b$$

Câu 1.

Tính tổng $S = C_n^0 + \frac{2^2-1}{2}C_n^1 + \frac{2^3-1}{3}C_n^2+\ldots+\frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n\ (n\ge 1)$

Lời giải

Vế trái có chứa các phân số, mẫu số được xếp theo thứ tự tăng đều mộtđơn vị, ta nghĩ ngay đến việc sử dụng tích phân. Bây giờ, ta suy nghĩ hàm lấy tích phân, các cận và số được thay vào cho biến. Vì số hạng cuối cùng có hệ số $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ nên ta biết cận từ 1 đến 2 và tổng không đan dấu nên ta sử dụng $\int_1^2 (1+x)^n\,dx$.

Ta có $(x+1)^n = C_n^0 + xC_n^1 + C_n^2x^2+\ldots+C_n^nx^n$

$\Rightarrow \int_1^2 (x+1)^n\,dx = \int_1^2\left(C_n^0+xC_n^1+x^2C_n^2+\ldots+C_n^nx^n\right)dx$

$\Leftrightarrow \left.\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}\right|_1^2 = \left.\left(xC_n^0+\frac{1}{2}C_n^1x^2+\frac{1}{3}C_n^2x^3+\ldots+\frac{1}{n+1}C_n^nx^{n+1}\right)\right|_1^2$

$\Leftrightarrow \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1} = C_n^0+\frac{2^2-1}{2}C_n^1+\frac{2^3-1}{3}C_n^2+\ldots+\frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n = S$

Câu 2.

Chứng minh rằng $C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+\ldots+\frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

Lời giải

Vế trái có chứa các phân số, ta nghĩ ngay đến việc sử dụng tích phân. Tổng không đan dấu, ta sử dụng $\int_0^1 (x+1)^n\,dx$

Xét khai triển $(x+1)^n = C_n^0 + xC_n^1 + x^2C_n^2+\ldots+x^2C_n^n$

Ta có:

- $\int_0^1 (x+1)^n\,dx = \left.\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}\right| = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$
- $\int_0^1\left(C_n^0+xC_n^1+\ldots+x^nC_n^n\right)dx = \left.\left(xC_n^0+\frac{1}{2}x^2C_n^1+\ldots+\frac{1}{n+1}C_n^nx^{n+}\right)\right|_0^1$

  $= C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+\ldots+\frac{1}{n+1}C_n^n$

Từ 2 đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh!

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Chứng minh rằng $2C_n^0 - \frac{1}{2}C_n^1 2^2 + \frac{1}{3}C_n^2 2^3 - ... + (-1)^n \frac{1}{n+1}C_n^n 2^{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(1+(-1)^n\right)$

Hướng dẫn. Vế trái có chứa các phân số, ta nghĩ ngay đến việc sử dụng tích phân. Vì số hạng cuối cùng có hệ số $\frac{2^{n+1}}{n+1}$ nên ta biết cận từ 0 đến 2 và tổng đan dấu nên ta sử dụng $\int_0^2 (1-x)^n dx$.

Câu 3.

Chứng minh rằng $\frac{1}{2}C_n^1 + \frac{2}{3}C_n^2 + \frac{3}{4}C_n^3 + ... + \frac{n}{n+1}C_n^n = \frac{(n-1)2^n+1}{n+1}$

Lời giải

Vế trái có chứa các phân số, ta nghĩ đến việc sử dụng tích phân. Vì số hạng cuối cùng có hệ số $\frac{n}{n+1}$ nên ta không thể nghĩ ra ngay một hàm số nào đó để tính tích phân. Bằng cách phân tích số hạng tổng quát $\frac{k}{k+1}C_n^k = \left(1-\frac{1}{k+1}\right)C_n^k$, cho ta tổng sau:

$$\left(C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + ... + C_n^n\right) - \left(\frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n\right)$$

Từ đó sử dụng $2^n - \int_0^1 (x+1)^n dx$

Cách 1. Xét số hạng tổng quát trong vế trái $\frac{k}{k+1}C_n^k = \left(1-\frac{1}{k+1}\right)C_n^k \left(k=\overline{0,n}\right)$

Do đó ta có:

$$\frac{1}{2}C_n^1 + \frac{2}{3}C_n^2 + \frac{3}{4}C_n^3 + ... + \frac{n}{n+1}C_n^n = \left(C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + ... + C_n^n\right) - \left(\frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n\right)$$

$$= 2^n - \int_0^1 (x+1)^n dx = 2^n - \frac{2^{n+1}-1}{n+1} = \frac{(n-1)2^n+1}{n+1}$$

Cách 2. Xét khai triển $(x+1)^n = C_n^0 + xC_n^1 + x^2C_n^2 + ... + x^nC_n^n$.

Lấy đạo hàm 2 vế ta được $n(x+1)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2x + 3C_n^3x^2 + ... + nC_n^nx^{n-1}$

Ta có:

- $\int_0^1 nx(x+1)^{n-1} dx = \int_0^1 \left(n(1+x-1)(x+1)^{n-1}\right)dx = n\int_0^1 \left((x+1)^n - (x+1)^{n-1}\right)dx$

  $= n\left[\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(x+1)^n}{n}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{n}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right) - \left(2^n - 1\right) = \frac{(n-1)2^n+1}{n+1}$

- $\int_0^1 \left(C_n^1 + 2C_n^2x + 3C_n^3x^2 + ... + nC_n^nx^{n-1}\right)dx = \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{2}{3}C_n^2 + ... + \frac{n}{n+1}C_n^n$

Từ 2 điều trên ta có điều phải chứng minh!

Câu 4.

Chứng minh rằng $\frac{1}{2}C_{2n}^1+\frac{1}{4}C_{2n}^3+\frac{1}{6}C_{2n}^5+...+\frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1}=\frac{2^{2n}-1}{2n+1}$

Lời giải

Xét các khai triển $\begin{cases}(x+1)^{2n}=C_{2n}^0+xC_{2n}^1+x^2C_{2n}^2+...+x^{2n}C_{2n}^{2n}\\(1-x)^{2n}=C_{2n}^0-xC_{2n}^1+x^2C_{2n}^2-...+x^{2n}C_{2n}^{2n}\end{cases}$

Trừ 2 vế đẳng thức trên ta được:

$$(x+1)^{2n}-(1-x)^{2n}=2\left(xC_{2n}^1+x^3C_{2n}^3+...+x^{2n-1}C_{2n}^{2n-1}\right)$$

$$\Rightarrow\int_0^1\frac{(x+1)^{2n}-(1-x)^{2n}}{2}dx=\int_0^1\left(xC_{2n}^1+x^3C_{2n}^3+...+x^{2n-1}C_{2n}^{2n-1}\right)dx$$

$$\Leftrightarrow\left.\frac{(x+1)^{2n+1}+(1-x)^{2n+1}}{2(2n+1)}\right|_0^1=\left.\left(\frac{1}{2}C_{2n}^1x^2+\frac{1}{4}C_{2n}^3x^4+...+\frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1}x^{2n}\right)\right|_0^1$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}C_{2n}^1+\frac{1}{4}C_{2n}^3+\frac{1}{6}C_{2n}^5+...+\frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1}=\frac{2^{2n}-1}{2n+1}$$

Nhận xét. Nếu phải tính tổng $C_{2n}^0+\frac{1}{3}C_{2n}^2+\frac{1}{5}C_{2n}^4+...+\frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n}$ thì ta xét

$$P(x)=\frac{(x+1)^{2n}+(1-x)^{2n}}{2}=C_{2n}^0+x^2C_{2n}^2+...+C_{2n}^{2n}x^{2n}$$

Sau đó tính tích phân $\int_0^1P(x)dx$.

Còn nếu phải tính tổng $\frac{1}{2}C_{2n}^0+\frac{1}{4}C_{2n}^2+\frac{1}{6}C_{2n}^4+...+\frac{1}{2n+2}C_{2n}^{2n}$ thì ta xét

$$G(x)=xP(x)=C_{2n}^0x+C_{2n}^2x^3+...+C_{2n}^{2n}x^{2n+1}$$

Sau đó tính tích phân $\int_0^1G(x)dx$.

Câu 5.

Chứng minh rằng $2C_{2n}^0+\frac{2}{3}C_{2n}^2+\frac{2}{5}C_{2n}^4+...+\frac{2}{2n+1}C_{2n}^{2n}=\frac{2^{2n+1}}{2n+1}(n\ge1)$

Lời giải

Xét khai triển $(x+1)^{2n}=C_{2n}^0+xC_{2n}^1+...+x^{2n}C_{2n}^{2n}$

Ta có:

- $\int_{-1}^1(x+1)^{2n}dx=\left.\frac{(x+1)^{2n+1}}{2n+1}\right|_{-1}^1=\frac{2^{2n+1}}{n+1}$
- $\int_{-1}^1\left(C_{2n}^0+xC_{2n}^1+...+x^{2n}C_{2n}^{2n}\right)dx=\left.\left(C_{2n}^0x+\frac{1}{2}C_{2n}^1x^2+...+\frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n}x^{2n+1}\right)\right|_{-1}^1$

$$=2C_{2n}^0+\frac{2}{3}C_{2n}^2+...+\frac{2}{2n+1}C_{2n}^{2n}$$

Từ 2 đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh!

Câu 6.

Cho tích phân $\int_0^1 x^2\left(1+x^3\right)^n dx=\dfrac{2^{n+1}-1}{3(n+1)}(n\ge 2)$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{3}C_n^0+\frac{1}{6}C_n^1+\frac{1}{9}C_n^2+\ldots+\frac{1}{3(n+1)}C_n^n=\frac{2^{n+1}-1}{3(n+1)}$$

Lời giải

Xét $I=\int_0^1 x^2\left(C_n^0+x^3C_n^1+C_n^2x^6+\ldots+C_n^nx^{3n}\right)dx$

$$=\int_0^1\left(C_n^0x^2+C_n^1x^5+\ldots+C_n^nx^{3n+2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{3}C_n^0+\frac{1}{6}C_n^1+\frac{1}{9}C_n^2+\ldots+\frac{1}{3(n+1)}C_n^n$$

Mặt khác $\int_0^1 x^2\left(1+x^3\right)^n dx=\dfrac{2^{n+1}-1}{3(n+1)}(n\ge 2)$ vậy ta có điều phải chứng minh!

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Chứng minh rằng $\frac{1}{2}C_n^0-\frac{1}{4}C_n^1+\frac{1}{6}C_n^2-\frac{1}{8}C_n^3+\ldots+\frac{(-1)^n}{2(n+1)}C_n^n=\int_0^1 x\left(1-x^2\right)^n dx$

Gợi ý. Ta có $\int_0^1 x\left(1-x^2\right)^n dx=\dfrac{1}{2(n+1)}$

2. Chứng minh rằng $1-\frac{1}{3}C_n^1+\frac{1}{5}C_n^2-\frac{1}{7}C_n^3+\ldots+\frac{(-1)^n}{2n+1}C_n^n=\int_0^1\left(1-x^2\right)^n dx$

Gợi ý. Ta có $\int_0^1\left(1-x^2\right)^n dx=\dfrac{\prod_{i=1}^{n}2i}{\prod_{i=1}^{n}(2i+1)}$

> ***Chú ý.*** Khi bài toán cho mà số hạng tổng quát không phải là $\frac{1}{k+1}C_n^k$ mà là $\frac{1}{k+2}C_n^k$ thì ta cần phải nhân thêm x vào hàm đa thức cơ bản trước khi tính tích phân, còn nếu là $\frac{1}{k+3}C_n^k$ thì ta phải nhân thêm x^2 vào hàm đa thức cơ bản trước khi tính tích phân,…

Sau đây ta sẽ cùng hiểu rõ hơn qua ví dụ sau.

Câu 7.

Chứng minh rằng $\frac{1}{2}C_n^0+\frac{1}{3}C_n^1+\frac{1}{4}C_n^2+\ldots+\frac{1}{n+2}C_n^n=\dfrac{n\left(2^{n+1}+1\right)}{(n+1)(n+2)}(n\ge 1)$

Lời giải

Vế trái có chứa các phân số, ta nghĩ đến việc sử dụng tích phân. Vì số hạng cuối cùng có hệ số $\frac{1}{k+2}C_n^k$ thì ta phải nhân thêm x vào hàm số cơ bản trước khi tính tích phân. Khi đó, ta sử dụng $\int_0^1 x(x+1)^n dx$.

Ta có

- $\int_0^1 x(x+1)^n dx = \int_0^1 (x+1)^{n+1} dx - \int_0^1 (x+1)^n dx = \left(\frac{(x+1)^{n+2}}{n+2} - \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{n2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}$
- $\int_0^1 x(x+1)^n dx = \int_0^1 x\left(C_n^0 + xC_n^1 + ... + x^n C_n^n\right)dx = \frac{1}{2}C_n^0 + \frac{1}{3}C_n^1 + ... + \frac{1}{n+2}C_n^n$

Từ 2 đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh!

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ.

Chứng minh rằng $\frac{1}{2}C_n^0 - \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{4}C_n^2 - ... + \frac{(-1)^n C_n^n}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

Câu 8.

Giả sử số tự nhiên $n \geq 2$ thỏa mãn đẳng thức dưới đây hãy tìm n?

$$C_{2n}^0 + \frac{C_{2n}^2}{3} + \frac{C_{2n}^4}{5} + \frac{C_{2n}^6}{7} + ... + \frac{C_{2n}^{2n-2}}{2n-1} + \frac{C_{2n}^{2n}}{2n+1} = \frac{4096}{13}$$

Lời giải

Giả sử số tự nhiên $n \geq 2$ thỏa mãn $C_{2n}^0 + \frac{C_{2n}^2}{3} + \frac{C_{2n}^4}{5} + \frac{C_{2n}^6}{7} + ... + \frac{C_{2n}^{2n-2}}{2n-1} + \frac{C_{2n}^{2n}}{2n+1} = \frac{8192}{15}$.

Ta có: $(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + ... + C_{2n}^{2n} x^{2n}$.

$$\Leftrightarrow \int_0^1 (1+x)^{2n} dx = \left(C_{2n}^0 x + \frac{1}{2}C_{2n}^1 x^2 + \frac{1}{3}C_{2n}^2 x^3 + ... + \frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n} x^{2n+1}\right)\Bigg|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+x)^{2n+1}}{2n+1}\Bigg|_0^1 = \left(C_{2n}^0 x + \frac{1}{2}C_{2n}^1 x^2 + \frac{1}{3}C_{2n}^2 x^3 + ... + \frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n} x^{2n+1}\right)\Bigg|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\left(2^{2n+1}-1\right)}{2n+1} = 2C_{2n}^0 + \frac{2}{2}C_{2n}^1 + \frac{2}{3}C_{2n}^2 + ... + \frac{2}{2n+1}C_{2n}^{2n} \ (1)$$

Mặt khác $\int_0^{-1} (1+x)^{2n} dx = \left(C_{2n}^0 x + \frac{1}{2}C_{2n}^1 x^2 + \frac{1}{3}C_{2n}^2 x^3 + ... + \frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n} x^{2n+1}\right)\Bigg|_0^{-1}$

$$\Leftrightarrow \frac{-2}{2n+1} = -2C_{2n}^0 + \frac{2}{2}C_{2n}^1 - \frac{2}{3}C_{2n}^2 + ... + \frac{2}{2n+1}C_{2n}^{2n} \ (2)$$

Lấy (1) trừ (2), ta được:

$$\frac{2^{2n+1}}{2n+1} = 2\left(C_{2n}^0 + \frac{C_{2n}^1}{3} + \frac{C_{2n}^4}{5} + \frac{C_{2n}^6}{7} + ... + \frac{C_{2n}^{2n-2}}{2n-1} + \frac{C_{2n}^{2n}}{2n+1}\right) \Leftrightarrow \frac{2^{2n+1}}{2n+1} = 2.\frac{4096}{13} \Leftrightarrow n = 6.$$

Câu 9.

Tìm số tự nhiên n thỏa mãn $\frac{C_n^0}{1.2}+\frac{C_n^1}{2.3}+\frac{C_n^2}{3.4}+...+\frac{C_n^n}{(n+1)(n+2)}=\frac{2^{100}-n-3}{(n+1)(n+2)}$.

Lời giải

Cách 1. Ta có:

$$\frac{C_n^k}{(k+1)(k+2)}=\frac{n!}{k!(n-k)!(k+1)(k+2)}=\frac{(n+2)!}{(n-k)!(k+2)!(n+1)(n+2)}=\frac{C_{n+2}^{k+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

Suy ra $\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{C_{n+2}^{k+2}}{(n+1)(n+2)}$

$$\Leftrightarrow \frac{C_n^0}{1.2}+\frac{C_n^1}{2.3}+\frac{C_n^2}{3.4}+...+\frac{C_n^n}{(n+1)(n+2)}=\frac{C_{n+2}^2+C_{n+2}^3+C_{n+2}^4+...+C_{n+2}^{n+2}}{(n+1)(n+2)}\ (*).$$

Ta xét khai triển sau: $(1+x)^{n+2}=C_{n+2}^0+x.C_{n+2}^1+x^2.C_{n+2}^2+x^3.C_{n+2}^3+...+x^{n+2}.C_{n+2}^{n+2}$.

Chọn $x=1\Rightarrow 2^{n+2}=C_{n+2}^0+C_{n+2}^1+C_{n+2}^2+C_{n+2}^3+...+C_{n+2}^{n+2}$.

Do đó: $(*)\Leftrightarrow \frac{2^{100}-n-3}{(n+1)(n+2)}=\frac{2^{n+2}-C_{n+2}^0-C_{n+2}^1}{(n+1)(n+2)}\Leftrightarrow 2^{100}=2^{n+2}\Leftrightarrow n=98$.

Cách 2. Ta có $S=\frac{C_n^0}{1.2}+\frac{C_n^1}{2.3}+\frac{C_n^2}{3.4}+...+\frac{C_n^n}{(n+1)(n+2)}$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)C_n^0+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)C_n^1+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)C_n^2+.....+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)C_n^n$$

$$=\left(\frac{1}{1}C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+.....\frac{1}{n+1}C_n^n\right)-\left(\frac{1}{2}C_n^0+\frac{1}{3}C_n^1+\frac{1}{4}C_n^2+.....\frac{1}{n+2}C_n^n\right)$$

Lại có $\int_0^1(1+x)^n dx-\int_0^1 x(1+x)^n dx=\int_0^1 2(1+x)^n dx-\int_0^1(1+x)^{n+1}dx$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{1}C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+.....\frac{1}{n+1}C_n^n\right)-\left(\frac{1}{2}C_n^0+\frac{1}{3}C_n^1+\frac{1}{4}C_n^2+.....\frac{1}{n+2}C_n^n\right)$$

$$=\frac{2}{n+1}(1+x)^{n+1}\Big|_0^1-\frac{1}{n+2}(1+x)^{n+2}\Big|_0^1\Rightarrow S=\frac{2.2^{n+1}-2}{n+1}-\frac{2^{n+2}-1}{n+2}=\frac{2^{n+2}-n-3}{(n+1)(n+2)}$$

Câu 10.

Tính tổng $S=\frac{-C_n^1}{2.3}+\frac{2C_n^2}{3.4}-\frac{3C_n^3}{4.5}+...+\frac{(-1)^n.nC_n^n}{(n+1)(n+2)}$

Lời giải

Số hạng tổng quát $a_k=\frac{(-1)^k kC_n^k}{(k+1)(k+2)}=(-1)^k C_n^k\left(\frac{2}{k+2}-\frac{1}{k+1}\right)=(-1)^k\frac{2C_n^k}{k+2}+(-1)^{k+1}\frac{C_n^k}{k+1}$

$$\Rightarrow S=\sum_{k=1}^{n}\left((-1)^k\frac{2C_n^k}{k+2}+(-1)^{k+1}\frac{C_n^k}{k+1}\right)=2\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{C_n^k}{k+2}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{C_n^k}{k+1}$$

Xét khai triển $(x+1)^n=C_n^0+xC_n^1+...+x^nC_n^n$

TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC

$$\Rightarrow \int_{-1}^{0}(x+1)^n dx = \int_{-1}^{0}\left(C_n^0 + xC_n^1 + \ldots + x^n C_n^n\right)dx$$

$$\Rightarrow \left.\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}\right|_{-1}^{0} = \left.\left(\frac{xC_n^0}{1} + \frac{x^2C_n^1}{2} + \ldots + \frac{x^{n+1}C_n^n}{n+1}\right)\right|_{-1}^{0} \Rightarrow \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{C_n^k}{k+1}$$

Tương tự ta có $x(x+1)^n = xC_n^0 + x^2C_n^1 + \ldots + x^{n+1}C_n^n$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{0} x(x+1)^n dx = \int_{-1}^{0}\left(xC_n^0 + x^2C_n^1 + \ldots + x^{n+1}C_n^n\right)dx \Rightarrow \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{C_n^k}{k+2}$$

Vậy $S = 2\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) - \frac{1}{n+1} = -\frac{n}{(n+1)(n+2)}$

Câu 11.

Tính tổng $T = \frac{C_{2018}^0}{3} - \frac{C_{2018}^1}{4} + \frac{C_{2018}^2}{5} - \frac{C_{2018}^3}{6} + \cdots - \frac{C_{2018}^{2017}}{2020} + \frac{C_{2018}^{2018}}{2021}$.

A. $\frac{1}{4121202989}$ **B.** $\frac{1}{4121202990}$ **C.** $\frac{1}{4121202992}$ **D.** $\frac{1}{4121202991}$

Lời giải

Xét khai triển $(1-x)^{2018} = C_{2018}^0 - C_{2018}^1 x + C_{2018}^2 x^2 + \ldots + C_{2018}^{2018}x^{2018}$

$$\Rightarrow x^2(1-x)^{2018} = C_{2018}^0 x^2 - C_{2018}^1 x^3 + C_{2018}^2 x^4 + \ldots + C_{2018}^{2018}x^{2020} \quad (1)$$

Ta tính $I = \int_0^1 x^2(1-x)^{2018}dx$, đặt $t = 1-x$, $dt = -dx$, đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 1$, $x = 1 \Rightarrow t = 0$

Khi đó $I = \int_0^1 (1-t)^2 t^{2018}dt = \int_0^1\left(t^{2018} - 2t^{2019} + t^{2020}\right)dt = \left.\left(\frac{t^{2019}}{2019} - 2\frac{t^{2020}}{2020} + \frac{t^{2021}}{2021}\right)\right|_0^1$

$$= \frac{1}{2019} - \frac{1}{1010} + \frac{1}{2021} = \frac{1}{4121202990}.$$

Lấy tích phân hai vế của (1) ta được:

$$\int_0^1 x^2(1-x)^{2018}dx = \int_0^1\left(C_{2018}^0 x^2 - C_{2018}^1 x^3 + C_{2018}^2 x^4 + \ldots + C_{2018}^{2018}x^{2020}\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4121202990} = \left.\left(C_{2018}^0\frac{x^3}{3} - C_{2018}^1\frac{x^4}{4} + C_{2018}^2\frac{x^5}{5} + \ldots + C_{2018}^{2018}\frac{x^{2021}}{2021}\right)\right|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4121202990} = C_{2018}^0\frac{1}{3} - C_{2018}^1\frac{1}{4} + C_{2018}^2\frac{1}{5} + \ldots + C_{2018}^{2018}\frac{1}{2021}.$$

Vậy $T = \frac{C_{2018}^0}{3} - \frac{C_{2018}^1}{4} + \frac{C_{2018}^2}{5} - \frac{C_{2018}^3}{6} + \cdots - \frac{C_{2018}^{2017}}{2020} + \frac{C_{2018}^{2018}}{2021} = \frac{1}{4121202990}$.

Chọn ý **B.**

CHƯƠNG 6 PHƯƠNG PHÁP ĐỔI CẬN, ĐỔI BIẾN – HÀM ẨN

Nhìn chung đây là một dạng không quá mới nhưng rất chi xuất hiện nhiều trong đề thi thử và đề thi THPT Quốc Gia với rất nhiều các hình thức ra đề khác nhau. Trong chủ đề này ta sẽ cùng tìm hiểu và phát triển nó hơn. Trước tiên ta sẽ cùng tìm hiểu các tính chất cơ bản của các hàm số như hàm số chẵn, hàm số lẻ.

I. KỸ THUẬT ĐỔI ẨN VÀ TÍNH CHẤT CÁC HÀM ĐẶC BIỆT.

Đây là phương pháp đổi biến được sử dụng khi phương pháp đổi biến số dạng 1 và dạng 2 không dùng được, phương pháp này ít được sử dụng hơn nhưng đặc biệt hiệu quả với các lớp hàm số có dạng đặc biệt, phức tạp và có cận đặc biệt.

Nhận xét. Các bài toán dưới đây đều có một cách làm chung là đổi biến $\boxed{x=a+b-t}$ với a,b là 2 cận.

HÀM DƯỚI DẤU TÍCH PHÂN LÀ HÀM CHẴN HOẶC HÀM LẺ.

Tính chất 1. Nếu $f(x)$ là hàm chẵn thì ta có:

- $\int_{-a}^{0} f(x)dx=\int_{0}^{a} f(x)dx$
- $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx=2\int_{-a}^{0} f(x)dx$
- $I=\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{b^x+1}dx=\int_{-a}^{a}\frac{f(-x)}{b^{-x}+1}dx=\int_{-a}^{a}\frac{b^x.f(x)}{b^x+1}dx\Rightarrow 2I=\int_{-a}^{a}f(x)dx$

Chứng minh

Ở đây sẽ chứng minh một tính chất tiêu biểu, các tính chất còn lại sẽ chứng minh tương tự.

Ta chứng minh: $I=\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{b^x+1}dx=\int_{-a}^{a}\frac{f(-x)}{b^{-x}+1}dx=\int_{-a}^{a}\frac{b^x.f(x)}{b^x+1}dx\Rightarrow 2I=\int_{-a}^{a}f(x)dx$

Do $f(x)$ là hàm chẵn nên ta luôn có $f(x)=f(-x)$

Đặt $x=-t\Rightarrow dx=-dt\Rightarrow I=-\int_{a}^{-a}\frac{f(-t)}{b^{-t}+1}d(t)=\int_{-a}^{a}\frac{b^t.f(t)}{b^t+1}dt=I=\int_{-a}^{a}\frac{b^x.f(x)}{b^x+1}dx$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh!

Tính chất 2. Nếu $f(x)$ là hàm lẻ thì ta có:

- $\int_{-a}^{0} f(x)dx=-\int_{0}^{a} f(x)dx$
- $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$

Tính chất này chứng minh tương tự như với hàm chẵn!

Sau đây là một số bài toán minh họa cho các tính chất này.

Câu 1.

Tính các tích phân sau:

a) $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{xdx}{4-\sin^2 x}$ b) $I=\int_{-2}^{2}\frac{x^4}{1+2018^x}dx$

Lời giải

a) . Đặt $x=-t\Rightarrow dx=-dt\Rightarrow xdx=tdt$. Đổi cận $\begin{cases}x=-\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}\\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=-\frac{\pi}{2}\end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{tdt}{4-\sin^2 t}=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{tdt}{4-\sin^2 t}=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{xdx}{4-\sin^2 x}=-I\Rightarrow 2I=0\Rightarrow I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{xdx}{4-\sin^2 x}=0.$$

Nhận xét. *Nếu như làm trắc nghiệm câu này thì không cần phải đặt gì hết nhé các bạn, bởi ta nhận thấy rằng biểu thức bên trong dấu tích phân là hàm lẻ nên ta có thể sử dụng luôn tính chất ở đầu bài mà mình đã đưa ra!*

Bài tập tương tự. Tính tích phân

1. $\int_{-1}^{1}\left(x^2+\cos 6x+\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}\right)\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)dx$

2. $\int_{-1}^{1}\frac{x^4}{(\sin x)^4+(\cos x)^4}\sqrt[3]{\frac{x^5-x^3+x-\sin x}{x^4+x^2+1+\cos x}}dx$

b) Đặt $x=-t\Rightarrow dx=-dt$. Đổi cận $\begin{cases}x=-2\Rightarrow t=2\\ x=2\Rightarrow t=-2\end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int_{-2}^{2}\frac{(-t)^4}{1+2018^{-t}}dt=\int_{-2}^{2}\frac{t^4}{1+\frac{1}{2018^t}}dt=\int_{-2}^{2}\frac{t^4.2018^t}{1+2018^t}dt=\int_{-2}^{2}\frac{t^4.\left(1+2018^t-1\right)}{1+2018^t}dt$$

$$=\int_{-2}^{2}\left(t^4-\frac{t^4}{1+2018^t}\right)dt=\frac{t^5}{5}\Big|_{-2}^{2}-\int_{-2}^{2}\frac{t^4}{1+2018^t}dt=\frac{64}{5}-I.\ \Rightarrow 2I=\frac{64}{5}\Rightarrow I=\frac{32}{5}.$$

Nhận xét. *Câu này cũng tương tự câu trên, nếu như làm trắc nghiệm thì ta sẽ sử dụng tính chất 1 mục thứ 3, ta có* $I=\int_{-2}^{2}\frac{x^4}{1+2018^x}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}x^4dx=\frac{32}{5}$, *rất nhanh phải không nào? Sau đây là những câu tương tự mà các bạn có thể sử dụng công thức này giải nhanh trong trắc nghiệm được, tuy nhiên những câu dưới đây mình vẫn sẽ trình bày tự luận cho các bạn hiểu bản chất!*

Câu 2.

Tính các tích phân sau:

a) $I=\int\limits_{-1}^{1}\frac{\cos x}{e^x+1}dx$ b) $I=\int\limits_{-1}^{1}\frac{x^4}{2^x+1}dx$ c) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x\sin 2x}{1+e^x}dx$

Lời giải

a) Đặt $x=-t\Rightarrow x=-dt,\ \cos x=\cos t$. Đổi cận $\begin{cases}x=-1\Rightarrow t=1\\x=1\Rightarrow t=-1\end{cases}$.

$$\Rightarrow I=-\int\limits_{1}^{-1}\frac{\cos t}{e^{-t}+1}dt=\int\limits_{-1}^{1}\frac{\cos t}{\frac{1}{e^t}+1}dt=\int\limits_{-1}^{1}\frac{e^t.\cos t}{e^t+1}dt=\int\limits_{-1}^{1}\frac{e^x.\cos x}{e^x+1}dx$$

$$\Rightarrow 2I=I+I=\int\limits_{-1}^{1}\frac{\cos xdx}{e^x+1}+\int\limits_{-1}^{1}\frac{e^x\cos xdx}{e^x+1}=\int\limits_{-1}^{1}\cos xdx=\sin x\Big|_{-1}^{1}=2\sin 1\Rightarrow I=\sin 1.$$

b) Đặt $x=-t\Rightarrow x=-dt$. Đổi cận $\begin{cases}x=-1\Rightarrow t=1\\x=1\Rightarrow t=-1\end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int\limits_{-1}^{1}\frac{x^4}{2^x+1}dx=\int\limits_{-1}^{1}\frac{t^4}{2^{-t}+1}dt=\int\limits_{-1`}^{1}\frac{2^t.t^4}{2^t+1}dt=\int\limits_{-1`}^{1}\frac{\left(2^t+1\right)t^4-t^4}{2^t+1}dt$$

$$=\int\limits_{-1}^{1}t^4dt-\int\limits_{-1}^{1}\frac{t^4}{2^t+1}dt=\int\limits_{-1}^{1}x^4dx-I\Rightarrow 2I=\int\limits_{-1}^{1}x^4dx\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}x^4dx=\frac{1}{2}\frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{5}$$

c) Ta có $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x\sin 2x}{1+e^x}dx=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+e^x}dx-\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\sin 2x}{1+e^x}dx=A+B\quad(*)$

- Tính $A=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+e^x}dx=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{e^x\left(1+e^x\right)}dx=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{e^x}-\frac{1}{1+e^x}\right)d\left(e^x\right)=\ln\frac{e^x}{1+e^x}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}\quad(1)$
- Tính $B=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\sin 2x}{1+e^x}dx$. Đặt $x=-t\Rightarrow dx=-dt$. Đổi cận $\begin{cases}x=-\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}\\x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=-\frac{\pi}{2}\end{cases}$.

$$\Rightarrow B=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(-t)\sin(-2t)}{1+e^{-t}}dt=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^t\sin t\sin 2t}{1+e^t}dt=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(1+e^t-1\right)\sin t\sin 2t}{1+e^t}dt$$

$$=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin t\sin 2tdt-\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t\sin 2t}{1+e^t}dt=\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos t-\cos 3t\right)dt-B=\frac{1}{2}\left(\sin t-\frac{\sin 3t}{3}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-B=\frac{4}{3}-B.$$

Suy ra $B=\frac{4}{3}-B\Leftrightarrow 2B=\frac{4}{3}\Leftrightarrow B=\frac{2}{3}\quad(2)$. Thay $(1),(2)$ vào $(*)$ ta được: $I=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}$.

TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC

Câu 3.

Có bao nhiêu số thực $a \in [-2017; 2017]$ thỏa mãn $\int_{-a}^{a} \frac{\cos x}{2018^x + 1} dx = \frac{\sqrt{3}}{2}$

A. 1284 **B.** 1285 **C.** 1286 **D.** 1287

Lời giải

Bài này chính là tính chất 2! Áp dụng tính chất 2 ta có:

$$\int_{-a}^{a} \frac{\cos x}{2018^x + 1} dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \int_{-a}^{a} \cos x dx = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin a = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ a = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{R})$$

- Nếu $a = \frac{\pi}{3} + k2\pi \Rightarrow -321 \le k \le 320$
- Nếu $a = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \Rightarrow -321 \le k \le 320$

Vậy có 1284 số a thỏa mãn yêu cầu.

Chọn ý **A.**

Bài tập tương tự. Tính các tích phân sau

1. $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 |\sin x|}{2006^x + 1} dx$ 2. $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \sin 2x \cos 5x}{e^x + 1} dx$ 3. $I = \int_{-1}^{1} \frac{x \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)}{\left(3^x + 1\right)\sqrt{1 + x^2}} dx$

Câu 4.

Cho tích phân $I = \int_{-1}^{1} \frac{x \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)}{\left(3^x + 1\right)\sqrt{1 + x^2}} dx = \sqrt{a} \ln\left(b + \sqrt{c}\right) - d$ trong đó a, b, c, d là các số nguyên dương và a,c là các số nguyên tố . Tính $a + b + c + d$?

Lời giải

Đặt $f(x) = \frac{x \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)}{\left(3^x + 1\right)\sqrt{1 + x^2}} dx, \forall x \in [-1; 1]$

$$\Rightarrow f(-x) = \frac{(-x)\ln\left(-x + \sqrt{1 + (-x)^2}\right)}{\sqrt{1 + (-x)^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \ln \frac{1}{-x + \sqrt{1 + x^2}} = f(x)$$

Vậy $f(x)$ làm hàm chẵn trên đoạn $[-1; 1]$

$$\Rightarrow I = \int_{-1}^{1} \frac{x \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)}{\left(3^x + 1\right)\sqrt{1 + x^2}} dx = \int_{0}^{1} \frac{x \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)}{\sqrt{1 + x^2}} dx$$

$$= \int_0^1 \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) d\left(\sqrt{1 + x^2}\right) = \sqrt{1 + x^2} \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 \sqrt{1 + x^2} d \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$$

$$= \sqrt{2} \ln\left(1 + \sqrt{2}\right) - \int_0^1 \frac{\sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 + x^2}} dx = \sqrt{2} \ln\left(1 + \sqrt{2}\right) - x\Big|_0^1 = \sqrt{2} \ln\left(1 + \sqrt{2}\right) - 1$$

Câu 5.

Cho tích phân $I=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{e^x+1}dx=\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\ln e+f\ln h$ trong đó a, b, c, d , e, f, h là các số nguyên dương và $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ tối giản, e,f,h là các số nguyên tố . Tính $\frac{abcd}{e+f+h}$?

Lời giải

Tương tự với mấy câu khác ta dễ thấy rằng $\frac{x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{e^x+1}dx$ là hàm chẵn nên ta có

$$I=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{e^x+1}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)d\left(x^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}x^2d\left[\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]=\frac{1}{8}\ln 3-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^2(x-1)}{1+x}dx$$

$$=\frac{1}{8}\ln 3-\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x^2-2x+\frac{2}{1+x}\right)dx=\frac{1}{8}\ln 3-\left[\frac{x^3}{3}-x^2+2\ln|1+x|\right]\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{8}\ln 3-\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{4}+2\ln\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{24}-\frac{15}{8}\ln 3+2\ln 2$$

Câu 6.

Cho tích phân $I=\int_{-1}^{1}\frac{x^2\ln\left(x^2+1\right)}{2^x+1}dx=\frac{a}{b}\ln c-\frac{d\pi}{e}+\frac{f}{g}$ trong đó a, b, c, d, e, f, g là các số nguyên dương , $\frac{a}{b},\frac{d}{e},\frac{f}{g}$ là các số nguyên tố. Tính $a+b+c+d+e+f+g$?

Lời giải

Tương tự câu trên ta có $f(x)=x^2\ln\left(x^2+1\right)$ là hàm chẵn từ đó ta có

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{x^2\ln\left(x^2+1\right)}{2^x+1}dx=\int_0^1x^2\ln\left(x^2+1\right)dx=\frac{1}{3}\int_0^1\ln\left(x^2+1\right)d\left(x^3\right)$$

$$=\frac{1}{3}x^3\ln\left(x^2+1\right)\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1x^3d\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]=\frac{1}{3}\ln 2-\frac{1}{3}\int_0^1x^3\frac{2x}{x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{3}\ln 2-\frac{2}{3}\int_0^1\frac{\left(x^4-1\right)+1}{x^2+1}dx=\frac{1}{3}\ln 2-\frac{2}{3}\int_0^1\left(x^2-1+\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$=\frac{1}{3}\ln 2-\frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3}-x+\arctan x\right]\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}\ln 2-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}-1+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}\ln 2-\frac{\pi}{6}+\frac{4}{3}$$

Câu 7.

Cho tích phân $I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(\cos x)^7dx=\frac{a\sqrt{b}}{c}$ trong đó a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{a}{c}$ là phân số tối giản. Tính $a+b+c$?

Lời giải

Vì $\left[\cos(-x)\right]^7=(\cos x)^7,\forall x\Rightarrow(\cos x)^7$ là hàm chẵn

$$\Rightarrow I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(\cos x)^7dx=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\cos x)^7dx=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos^2 x\right)^3\cos x dx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(1-\sin^2 x\right)^3 d(\sin x)=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(1-3\sin^2 x+3\sin^4 x-\sin^6 x\right)d(\sin x)$$

$$=2\left[\sin x-(\sin x)^3+\frac{3}{5}(\sin x)^5-\frac{1}{7}(\sin x)^7\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{8}+\frac{27\sqrt{3}}{32}-\frac{27\sqrt{3}}{7.2^7}\right)=\frac{1065\sqrt{3}}{448}$$

Câu 8.

Cho tích phân $I=\int_{-1}^{1}\frac{x^6+\tan x}{x^2+1}dx=\frac{a}{b}-\frac{c\pi}{d}$ trong đó a, b, c, d là các số nguyên dương và $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ là phân số tối giản. Tính $a+b+c+d$?

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có $I=\int_{-1}^{1}\frac{x^6+\tan x}{x^2+1}dx=\int_{-1}^{1}\frac{x^6}{x^2+1}dx+\int_{-1}^{1}\frac{\tan x}{x^2+1}dx=K+J$

Ta dễ dàng nhận thấy $\frac{(-x)^6}{(-x)^2+1}=\frac{x^6}{x^2+1},\forall x\in[-1,1]\Rightarrow\frac{x^6}{x^2+1}$ là hàm chẵn

$$\Rightarrow K=2\int_0^1\frac{x^6dx}{x^2+1}=2\int_0^1\frac{\left(x^6+1\right)-1}{x^2+1}dx=2\int_0^1\left(x^4-x^2+1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$=2\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+x-\arctan x\right]\Bigg|_0^1=2\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+1-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{26}{15}-\frac{\pi}{2}$$

Mặt khác $\frac{\tan(-x)}{(-x)^2+1}=-\frac{\tan x}{x^2+1},\forall x\in[-1,1]\Rightarrow\frac{\tan x}{x^2+1}$ là hàm lẻ $\Rightarrow J=\int_{-1}^{1}\frac{\tan x}{x^2+1}dx=0$

Vậy $I=K+J=\frac{26}{15}-\frac{\pi}{2}$

Chọn ý **B.**

TÍNH BẤT BIẾN VÀ TÍCH PHÂN HÀM ĐỐI XỨNG

Tính chất 3. Cho tích phân $I=\int_a^b f(x)dx$.

- Đặt $x=a+b-t \Rightarrow dx=-dt \Rightarrow I=\int_a^b f(a+b-x)dx=\int_a^b f(x)dx$

Với 2 số *m,n* ta luôn có $I=\frac{1}{m+n}\int_a^b\left(m.f(x)+n.f(a+b-x)\right)dx$

Tính chất 4. Kỹ thuật xử lý một số bài toán sử dụng tính chất $\int_a^b f(a+b-x)dx=\int_a^b f(x)dx$.

Cách làm chung cho những bài thuộc dạng này đó là:

Viết 2 lần giả thiết $\begin{cases} I=\int_a^b f(x)dx \\ I=\int_a^b f(a+b-x)dx \end{cases} \Rightarrow 2I=\int_a^b\left(f(x)+f(a+b-x)\right)dx$

Với cách làm này ta sẽ có cách giải quyết tổng quát rất nhanh những bài toán có dạng mà giả thiết cho $f(x)f(a+b-x)=c>0$. Khi đó ta có tính chất sau: $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{c}+f(x)}dx=\frac{b-a}{2\sqrt{c}}$

Chứng minh

Ta viết lại 2 lần giả thiết như sau

$$\begin{cases} I=\int_a^b \frac{1}{\sqrt{c}+f(x)}dx \\ I=\int_a^b \frac{1}{\sqrt{c}+f(a+b-x)}dx \end{cases} \Rightarrow 2I=\int_a^b\left(\frac{1}{\sqrt{c}+f(x)}+\frac{1}{\sqrt{c}+f(a+b-x)}\right)dx$$

Ta có:

$$g(x)=\frac{2\sqrt{c}+f(x)+f(a+b-x)}{c+\sqrt{c}\left(f(x)+f(a+b-x)\right)+f(x)f(a+b-x)}=\frac{2\sqrt{c}+f(x)+f(a+b-x)}{c+\sqrt{c}\left(f(x)+f(a+b-x)\right)+c}=\frac{1}{\sqrt{c}}$$

$\Rightarrow 2I=\int_a^b \frac{1}{\sqrt{c}}dx \Rightarrow I=\frac{b-a}{2\sqrt{c}}$ - *điều phải chứng minh*

Tính chất 5. Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$, khi đó: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$

Sau đây là các bài toán minh họa cho các tính chất này.

Câu 1.

Tính các tích phân sau:

a) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx$

Lời giải

a) Đặt $x=\frac{\pi}{2}-t \Rightarrow dx=-dt$

Đổi cận $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2} \\ x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=0 \end{cases} \Rightarrow I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin^n\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)}{\sin^n\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)+\cos^n\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)}dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^n t}{\cos^n t+\sin^n t}dt$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{\sin^n t}{\sin^n t+\cos^n t}\right)dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}dt-I=t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-I=\frac{\pi}{2}-I\Rightarrow I=\frac{\pi}{2}-I\Leftrightarrow 2I=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow I=\frac{\pi}{4}.$$

Nhận xét. Như vậy từ ví dụ trên với cách gán n một giá trị cụ thể ta tạo ra được vô số bài toán kiểu $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}dx\,; I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx\,;\ I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sqrt[2018]{\sin x}}{\sqrt[2018]{\sin x}+\sqrt[2018]{\cos x}}dx\,;...$

Đối với làm trắc nghiệm thì chúng ta không cần bước đặt ẩn, mà sử dụng luôn tính chất thứ 3 để chỉ ra luôn $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^n t}{\cos^n t+\sin^n t}dt$

b) Tương tự câu trên ta đặt $x=\dfrac{\pi}{2}-t\Rightarrow dx=-dt$. Đổi cận $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2} \\ x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=0 \end{cases}$.

$$\Rightarrow I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 t}{\cos t+\sin t}dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 t+\cos^3 t-\cos^3 t}{\sin t+\cos t}dt$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin t\cos t)dt-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 t}{\sin t+\cos t}dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{2}\sin 2t\right)dt-I=\left(t+\frac{1}{4}\cos 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-I=\frac{\pi-1}{2}.$$

$$\Rightarrow I=\frac{\pi-1}{2}-I\Leftrightarrow 2I=\frac{\pi-1}{2}\Leftrightarrow I=\frac{\pi-1}{4}.$$

Câu 2.

Cho $a+b=2018$ và $I=\int_a^b\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{2018-x}}dx=10$. Tính $J=\int_a^b\sin\left(\dfrac{\pi x}{3}\right)dx$.

A. $-\dfrac{9}{2\pi}$ **B.** $-\dfrac{9}{3\pi}$ **C.** $-\dfrac{9}{\pi}$ **D.** $-\dfrac{8}{\pi}$

Lời giải

Đây là bài toán có giả thiết $a+b=2018$ và tích phân các cận từ a tới b nên ta sẽ chú ý đến tính chất thứ 5.

Ta có $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{2018-x}}\Rightarrow f(2018-x)=\dfrac{\sqrt{2018-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{2018-x}}$

Theo cách làm của tính chất 5 ta có:

$$2I=\int_a^b\left(f(x)+f(2018-x)\right)dx=2\int_a^b dx=10\Leftrightarrow a-b=-20$$

Kết hợp với giả thiết ta giải ra được $\begin{cases} a = 999 \\ b = 1019 \end{cases} \Rightarrow J = \int_a^b \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)dx = \int_{999}^{1019} \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)dx = -\frac{9}{2\pi}$

Chọn ý **A.**

Câu 3.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;2]$ thỏa mãn $f(x) = f(2-x), \int_0^2 f(x)dx = 10$.

Tính giá trị của tích phân $\int_0^2 (x^3 - 3x^2) f(x)dx$

A. -40 **B.** 20 **C.** 40 **D.** -20

Lời giải

Vẫn là ý tưởng cũ dạng toán cũ sử dụng đến tính chất 5.

Ta có $\begin{cases} I = \int_0^2 (x^3 - 3x^2) f(x)dx \\ I = \int_0^2 \left((2-x)^3 - 3(2-x)^2\right) f(2-x)dx \end{cases} \Rightarrow 2I = -4\int_0^2 f(x)dx = -40 \Rightarrow I = -20$

Chọn ý **D.**

Câu 4.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 + 2\cos 2x}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính giá trị của tích phân $I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx$

A. $I = -6$ **B.** $I = 0$ **C.** $I = -2$ **D.** $I = 6$

Lời giải

Giả thiết có tổng nên gợi ý ngay đến sử dụng tính chất 1 . Ta có:

$$I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx = \frac{1}{1+1}\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(f(x) + f(-x)\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2 + 2\cos 2x}\,dx = 6$$

Chọn ý **D.**

Câu 5.

Tính các tích phân sau:

a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos^2(\sin x)} - \tan^2(\cos x)\right)dx$ b) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)^n \cos x}{(\sin x)^{n-1} + (\cos x)^{n-1}}dx$

c) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx$ d) $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + (\tan x)^\alpha}$ e) $I = \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}}$

Lời giải

a) Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos^2(\sin x)} - \tan^2(\cos x)\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2(\sin x)} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^2(\cos x)dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2(\sin x)} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^2(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos^2(\sin x)} - \tan^2(\sin x)\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2(\sin x)}{\cos^2(\sin x)}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2(\sin x)}{\cos^2(\sin x)}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

b) Sử dụng tính chất đối xứng ta có

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x)^n\cos x}{(\sin x)^{n-1}+(\cos x)^{n-1}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos x)^n\sin x}{(\sin x)^{n-1}+(\cos x)^{n-1}}dx$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x)^n\cos x}{(\sin x)^{n-1}+(\cos x)^{n-1}}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos x)^n\sin x}{(\sin x)^{n-1}+(\cos x)^{n-1}}dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x)^n\cos x+(\cos x)^n\sin x}{(\sin x)^{n-1}+(\cos x)^{n-1}}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x\left[(\sin x)^{n-1}+(\cos x)^{n-1}\right]}{(\sin x)^{n-1}+(\cos x)^{n-1}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x dx=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x dx=\frac{-1}{8}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}$$

c) Áp dụng tính chất 5 ta có

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)dx\Rightarrow 2I=\int_0^{\sqrt{2}}\ln(\sin x\cos x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\ln(\sin 2x)-\ln 2\right)dx$$

$$=-x\ln 2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin 2x)d(2x)=-\frac{\pi}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln(\sin u)du$$

$$=-\frac{\pi}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin u)du-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln\left[\sin(\pi-u)\right]d(\pi-u)$$

$$=-\frac{\pi}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin u)du-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\ln(\sin t)dt$$

$$=-\frac{\pi}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin u)du+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin u)du$$

$$=-\frac{\pi}{2}\ln 2+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin u)du=-\frac{\pi}{2}\ln 2+I\Rightarrow I=-\frac{\pi}{2}\ln 2$$

d) Biến đổi tích phân ban đầu ta có

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+(\tan x)^\alpha}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1+(\tan x)^\alpha}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+(\tan x)^\alpha}=I+J$$

Xét $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1+(\tan x)^\alpha}$, đặt $t=\tan x\Rightarrow dx=\frac{dt}{1+t^2}\Rightarrow I=\int_0^1\frac{dt}{(1+t^\alpha)(1+t^2)}$

Xét $J=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+(\tan x)^\alpha}$, đặt $t=\cot x\Rightarrow dx=\frac{-dt}{1+t^2}\Rightarrow J=\int_1^0\frac{-dt}{\left(1+\frac{1}{t^\alpha}\right)(1+t^2)}=\int_0^1\frac{t^\alpha dt}{(t^\alpha+1)(1+t^2)}$

$$\Rightarrow K=I+J=\int_0^1\frac{dt}{(1+t^\alpha)(1+t^2)}+\int_0^1\frac{t^\alpha dt}{(1+t^\alpha)(1+t^2)}=\int_0^1\frac{(1+t^\alpha)dt}{(1+t^\alpha)(1+t^2)}=\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\arctan t\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$$

e) Đặt $t=6-x\Rightarrow dt=-dx$ ta có

$$I=\int_4^2\frac{\sqrt{\ln(t+3)}}{\sqrt{\ln(t+3)}+\sqrt{\ln(9-t)}}(-dt)=\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(t+3)}}{\sqrt{\ln(t+3)}+\sqrt{\ln(9-t)}}dt$$

$$=\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(x+3)}}{\sqrt{\ln(x+3)}+\sqrt{\ln(9-x)}}dx=\int_2^4\left(1-\frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(x+3)}+\sqrt{\ln(9-x)}}\right)dx$$

$$=\int_2^4 dx-\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(x+3)}+\sqrt{\ln(9-x)}}dx=2-I\Rightarrow I=1$$

Mở rộng. Sau đây ta sẽ cùng nhau xét tới một tính chất được suy ra từ cách đổi cận, đổi biến. Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;2a]$ thì ta luôn có $\int_0^{2a} f(x)dx=\int_0^a\left(f(x)+f(2a-x)\right)dx$

Chứng minh. Đặt $t=2a-x\Rightarrow \int_0^{2a} f(x)dx=\int_0^a f(x)dx+\int_a^{2a} f(x)dx=\int_0^a f(x)dx-\int_a^0 f(2a-t)dt$

$$=\int_0^a f(x)dx+\int_0^a f(2a-x)dx=\int_0^a\left(f(x)+f(2a-x)\right)dx$$

Câu 7.

Tính các tích phân sau:

a) $I=\int_0^{3\pi}\sin x\sin 2x\sin 3x dx$

b) $I=\int_0^{\pi}\sqrt[3]{\frac{\sin 5x}{\sin 3x}}\cos 7x dx$

c) $I=\int_0^{\pi}\sqrt[3]{\sin 3x}\sqrt[5]{\sin 5x}\sqrt[7]{\sin 7x}(\cos x)^9 dx$

Lời giải

a) Ta sẽ áp dụng tính chất đã chứng minh với $a=\frac{3\pi}{2}$ ta có

$$I=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\left(\sin x\sin 2x\sin 3x+\sin(3\pi-x)\sin(6\pi-2x)\sin(9\pi-3x)\right)dx$$

$$I=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\left(\sin x\sin 2x\sin 3x-\sin x\sin 2x\sin 3x\right)dx=0$$

b) Ta sẽ áp dụng tính chất đã chứng minh ta có

$$I=\int_0^{\pi}\sqrt[3]{\frac{\sin 5x}{\sin 3x}}\cos 7x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sqrt[3]{\frac{\sin 5x}{\sin 3x}}\cos 7x+\sqrt[3]{\frac{\sin(5\pi-5x)}{\sin(3\pi-3x)}}\cos(7\pi-7x)\right]dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sqrt[3]{\frac{\sin 5x}{\sin 3x}}\cos 7x-\sqrt[3]{\frac{\sin 5x}{\sin 3x}}\cos 7x\right]dx=0$$

c) Ta sẽ áp dụng tính chất đã chứng minh ta có

$$I=\int_0^{\pi}\sqrt[3]{\sin 3x}\sqrt[5]{\sin 5x}\sqrt[7]{\sin 7x}(\cos x)^9 dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt[3]{\sin 3x}\sqrt[5]{\sin 5x}\sqrt[7]{\sin 7x}(\cos x)^9 dx$$

$$+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt[3]{\sin(3\pi-3x)}\sqrt[5]{\sin(5\pi-5x)}\sqrt[7]{\sin(7\pi-7x)}\left(\cos(\pi-x)\right)^9 dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt[3]{\sin 3x}\sqrt[5]{\sin 5x}\sqrt[7]{\sin 7x}(\cos x)^9 dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt[3]{\sin 3x}\sqrt[5]{\sin 5x}\sqrt[7]{\sin 7x}(-\cos x)^9 dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sqrt[3]{\sin 3x}\sqrt[5]{\sin 7x}\sqrt[7]{\sin 7x}(\cos x)^9-\sqrt[3]{\sin 3x}\sqrt[5]{\sin 5x}\sqrt[5]{\sin 7x}(\cos x)^9\right]dx=0$$

HÀM SỐ DƯỚI DẤU TÍCH PHÂN CÓ TRỤC ĐỐI XỨNG THẲNG ĐỨNG

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và $f(a+b-x)=f(x)$, khi đó: $\int_a^b xf(x)dx=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$ (*)

Hệ quả. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$, thì:

- $\int_\alpha^{\pi-\alpha} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_\alpha^{\pi-\alpha} f(\sin x)dx$, đặc biệt $\alpha=0$ thì $\int_0^\pi xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$
- $\int_\alpha^{2\pi-\alpha} xf(\cos x)dx=\pi\int_\alpha^{2\pi-\alpha} f(\cos x)dx$, đặc biệt $\alpha=0$ thì $\int_0^{2\pi} xf(\cos x)dx=\pi\int_0^{2\pi} f(\cos x)dx$

Sau đây ta cùng tìm hiểu qua một số ví dụ sau.

Câu 1.

Tính các tích phân sau:

a) $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x(\tan x+\cot x)dx$ b) $\int_0^{2\pi}\frac{x\sin x}{3+\cos x}dx$ c) $I=\int_0^\pi \frac{x\sin x}{\cos^2 x-4}dx$

Lời giải

a) Đặt $x=\frac{\pi}{2}-t\Rightarrow dx=-dt$. Đổi cận $\begin{cases} x=\frac{\pi}{6}\Rightarrow t=\frac{\pi}{3} \\ x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}\end{cases}$.

$$\Rightarrow I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\left[\tan\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\cot\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right]dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)(\cot t+\tan t)dt$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(\cot t+\tan t)dt-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}t(\tan t+\cot t)dt=\frac{\pi}{2}\left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos t}{\sin t}dt+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin t}{\cos t}dt\right)-I$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{d(\sin t)}{\sin t}dt+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{d(\cos t)}{\cos t}dt\right)-I=\frac{\pi}{2}\ln\left|\frac{\sin t}{\cos t}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}-I=\frac{\pi}{2}\ln 3-I$$

$$\Rightarrow I=\frac{\pi}{2}\ln 3-I\Leftrightarrow 2I=\frac{\pi}{2}\ln 3\Leftrightarrow I=\frac{\pi}{4}\ln 3.$$

b) Đặt $x=2\pi-t\Rightarrow dx=-dt$. Đổi cận $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=2\pi \\ x=2\pi\Rightarrow t=0\end{cases}$.

$$\Rightarrow I=\int_0^{2\pi}\frac{x\sin x}{3+\cos x}dx=\int_0^{2\pi}\frac{(2\pi-t)\sin(2\pi-t)}{3+\cos(2\pi-t)}dt=\int_0^{2\pi}\frac{(2\pi-t)\sin t}{3+\cos t}dt$$

$$=2\pi\int_0^{2\pi}\frac{\sin t}{3+\cos t}dt-\int_0^{2\pi}\frac{t\sin t}{3+\cos t}dt=-2\pi\int_0^{2\pi}\frac{d(3+\cos t)}{3+\cos t}dt-I$$

$$=-2\pi\ln|3+\cos t|\Big|_0^{2\pi}-I=0-I=-I\Rightarrow I=-I\Leftrightarrow I=0$$

c) Đặt $x=\pi-t\Rightarrow dx=-dt$. Đổi cận $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=\pi \\ x=\pi\Rightarrow t=0 \end{cases}$

$$\Rightarrow I=-\int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{\cos^2(\pi-t)-4}dt=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-t)\sin t}{\cos^2 t-4}dt=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\cos^2 t-4}dt-\int_0^{\pi}\frac{t\sin t}{\cos^2 t-4}dt$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\cos^2 x-4}dx-\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{\cos^2 x-4}dx=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\cos^2 x-4}dx-I$$

$$\Rightarrow I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\cos^2 x-4}dx=-\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{d(\cos x)}{\cos^2 x-4}=\frac{\pi}{8}\ln\left|\frac{\cos x-2}{\cos x+2}\right|\Bigg|_0^{\pi}=-\frac{\pi}{4}\ln 3.$$

Bài tập tự luyện

Tính các tích phân sau

1. $I=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x^7-x^5+x^3-x}{\cos^4 x}dx$

2. $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx$

3. $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}x^2\ln\frac{1-x}{1+x}dx$

4. $I=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}$

5. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$

6. $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\cos x\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)dx$

7. $I=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\ln(x^2+1)}{e^x+1}dx$

8. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{\cos^2(\cos x)}-\tan^2(\sin x)\right]dx$

9. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^6 x+\cos^6 x}{6^x+1}dx$

10. $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{\sin 2x}dx$

11. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2012}x+\cos^2 x}{1+\sin^{2012}x+\cos^{2012}x}dx$

12. $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx$

13. $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\left[(3\pi\cos x+4\sin x)\sin^2 x+4\right]}{\sqrt{1+\sin^3 x}}dx$

TÍNH CHẤT HÀM TUẦN HOÀN.

Tính chất 6. Nếu $f(x)$ là hàm tuần hoàn chu kì T, $f(x+T)=f(x)$ thì ta có:

- $\int_0^T f(x)dx=\int_a^{a+T}f(x)dx$
- $\int_0^{nT}f(x)dx=n\int_0^T f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx=\int_{a+nT}^{b+nT}f(x)dx$

Chứng minh. Ta có $I=\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_a^0 f(x)dx+\int_0^T f(x)dx+\int_T^{a+T}f(x)dx$

Đặt $x=t+T\Rightarrow I_1=\int_T^{a+T}f(x)dx=\int_0^a f(t+T)=\int_0^a f(t)dt=\int_0^a f(x)dx$

Từ 2 điều trên ta có $I=\int_a^0 f(x)dx+\int_0^T f(x)dx+\int_0^a f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$

Sau đây ta cùng tìm hiểu một số ví dụ minh họa cho dạng này.

Câu 1.

Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)=f(x+4)\forall x\in\mathbb{R},\int_0^4 f(x)dx=1$ và đồng thời $\int_1^2 f(3x+5)dx=12$. Tính $\int_0^7 f(x)dx$.

A. 35 **B.** 36 **C.** 37 **D.** 38

Lời giải

Nhìn qua ta nhận thấy ngay dấu hiệu của hàm tuần hoàn, tuy nhiên phải xử lý giả thiết thứ 2 đã!

Ta có: $\int_1^2 f(3x+5)dx=12\Leftrightarrow\frac{1}{3}\int_1^2 f(3x+5)d(3x+5)=12\Leftrightarrow\int_8^{11} f(x)dx=36$

Áp dụng tính chất thứ 3 của hàm tuần hoàn $\int_a^b f(x)dx=\int_{a+nT}^{b+nT} f(x)dx$ ta có:

$$\int_0^7 f(x)dx=\int_0^4 f(x)dx+\int_4^7 f(x)dx=\int_0^4 f(x)dx+\int_{4+4}^{7+4} f(x)dx=37$$

Chọn ý **C.**

Câu 2.

Tính tích phân sau $I=\int_0^{\pi}\frac{(\sin 3x)^7(\cos 5x)^8}{1+(\cos 7x)^{10}}dx$?

Lời giải

Ta có $I=\int_0^{\pi}\frac{(\sin 3x)^7(\cos 5x)^8}{1+(\cos 7x)^{10}}dx=\int_0^{2\pi}\frac{(\sin 3x)^7(\cos 5x)^8}{1+(\cos 7x)^{10}}dx+\int_{2\pi}^{4\pi}\frac{(\sin 3x)^7(\cos 5x)^8}{1+(\cos 7x)^{10}}dx$

Nhận thấy rằng $f(x)=\frac{(\sin 3x)^7(\cos 5x)^8}{1+(\cos 7x)^{10}}$ tuần hoàn với chu kì 2π nên theo tính chất của hàm tuần hoàn ta có

$$\int_{2\pi}^{4\pi}\frac{(\sin 3x)^7(\cos 5x)^8}{1+(\cos 7x)^{10}}dx=\int_{2\pi}^{2\pi+2\pi}\frac{(\sin 3x)^7(\cos 5x)^8}{1+(\cos 7x)^{10}}dx=\int_0^{2\pi}\frac{(\sin 3x)^7(\cos 5x)^8}{1+(\cos 7x)^{10}}dx$$

$$\Rightarrow I=2\int_0^{2\pi}\frac{(\sin 3x)^7(\cos 5x)^8}{1+(\cos 7x)^{10}}dx=2\int_{0-\pi}^{2\pi-\pi}\frac{(\sin 3x)^7(\cos 5x)^8}{1+(\cos 7x)^{10}}dx=2\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(\sin 3x)^7(\cos 5x)^8}{1+(\cos 7x)^{10}}dx$$

Mặt khác $f(x)=\frac{(\sin 3x)^7(\cos 5x)^8}{1+(\cos 7x)^{10}}$ là hàm lẻ nên ta có $I=0$

Câu 3.

Tính tích phân sau $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[(\tan 2x)^{2007}+(\sin 6x)^{2009}\right]dx$?

Lời giải

Ta có $f(x)=(\tan 2x)^{2007}+(\sin 6x)^{2009}$ tuần hoàn với chu kì 2π nên ta có

$$I=\int_{0-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}}\left[(\tan 2x)^{2007}+(\sin 6x)^{2009}\right]dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[(\tan 2x)^{2007}+(\sin 6x)^{2009}\right]dx$$

Do $f(x)$ là hàm lẻ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ nên ta có $I=0$

II. CÁC BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Kỹ thuật thế biến – lấy tích phân 2 vế được áp dụng cho những bài toán mà giả thiết có dạng tổng của hai hàm số, khi đó ta sẽ lợi dụng mối liên hệ giữa các hàm theo biến số *x* để thay thế những biểu thức khác sao cho 2 hàm số đó đổi chỗ cho nhau, để rõ hơn ta sẽ cùng tìm hiểu các ví dụ sau.

Câu 1.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn điều kiện sau $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}$ Giá trị của tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{\pi}{5}$ **B.** $\frac{\pi}{10}$ **C.** $\frac{\pi}{15}$ **D.** $\frac{\pi}{20}$

Lời giải

Một bài toán khá hay có 2 cách giải được đưa ra, ta sẽ cùng tiếp cận 2 cách giải sau đây để thấy được nội dung của phương pháp được áp dụng trong phần này!

Cách 1: Lấy tích phân 2 vế.

Lấy tích phân 2 vế cận tự 0 tới 1 giả thiết ta được:

$$2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow \int_0^1 2f(x)dx-3\int_0^1 f(1-x)d(1-x)=\int_0^1\sqrt{1-x^2}$$

$$\Leftrightarrow 5\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\sqrt{1-x^2} \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx=\frac{\pi}{20}$$

Cách 2: Thế biến.

Chú ý vào hai biểu thức $x, 1-x$ bây giờ nếu ta thế *x* bởi $1-x$ thì ta sẽ được hệ phương trình theo hai biến $f(x), f(1-x)$.

Thế *x* bởi $1-x$ ta được:

$$\begin{cases} 2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2} \\ 2f(1-x)+3f(x)=\sqrt{1-(1-x)^2} \end{cases} \Rightarrow 4f(x)-9f(x)=2\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{-x^2+2x}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{2\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{-x^2+2x}}{-5} \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx=\frac{\pi}{20}$$

Chọn ý **D.**

TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC

Câu 2.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{2};2\right]$ và thỏa mãn $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$. Tính tích phân $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}dx$

A. $I=\frac{1}{2}$ **B.** $I=\frac{3}{2}$ **C.** $I=\frac{5}{2}$ **D.** $I=\frac{7}{2}$

Lời giải

Từ giả thiết, thay x bằng $\frac{1}{x}$ ta được $f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{3}{x}$

Do đó ta có hệ $\begin{cases} f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x \\ f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x \\ 4f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{6}{x} \end{cases} \Rightarrow f(x)=\frac{2}{x}-x$

Khi đó $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}dx=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{2}{x^2}-1\right)dx=\left(-\frac{2}{x}-x\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{3}{2}$

Chọn ý **B.**

Cách khác. Từ $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x \Rightarrow f(x)=3x-2f\left(\frac{1}{x}\right)$

Khi đó $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}dx=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(3-2\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right)dx=3\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}dx-2\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}dx$. Xét $J=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}dx$ Đặt $t=\frac{1}{x}$ suy ra $dt=-\frac{1}{x^2}dx=-t^2dx \Rightarrow dx=-\frac{1}{t^2}dt$

Đổi cận $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \to t=2 \\ x=2 \to t=\frac{1}{2} \end{cases}$ Khi đó $J=\int\limits_{2}^{\frac{1}{2}}t.f(t)\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(t)}{t}dt=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}dx=I$

Vậy $I=3\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}dx-2I \Rightarrow I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}dx=\frac{3}{2}$.

Câu 3.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $x^2f(x)+f(1-x)=2x-x^4$ Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{1}f(x)dx$.

A. $I=\frac{1}{2}$. **B.** $I=\frac{3}{5}$. **C.** $I=\frac{2}{3}$. **D.** $I=\frac{4}{3}$.

Lời giải

Từ giả thiết, thay x bằng $1-x$ ta được:

$$(1-x)^2 f(1-x)+f(x)=2(1-x)-(1-x)^4$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-2x+1\right)f(1-x)+f(x)=1+2x-6x^2+4x^3-x^4.$$

Ta có $x^2f(x)+f(1-x)=2x-x^4 \Rightarrow f(1-x)=2x-x^4-x^2f(x)$.

Thay vào (1) ta được: $\left(x^2-2x+1\right)\left[2x-x^4-x^2f(x)\right]+f(x)=1+2x-6x^2+4x^3-x^4$

$$\Leftrightarrow \left(1-x^2+2x^3-x^4\right)f(x)=x^6-2x^5+2x^3-2x^2+1$$

$$\Leftrightarrow \left(1-x^2+2x^3-x^4\right)f(x)=\left(1-x^2\right)\left(1-x^2+2x^3-x^4\right)\Rightarrow f(x)=1-x^2$$

Vậy $I=\int\limits_0^1 f(x)dx=\int\limits_0^1\left(1-x^2\right)dx=\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}$

Chọn ý **C.**

Câu 4.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-2;2]$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(-x)=\frac{1}{4+x^2}$ Tính tích phân $I=\int\limits_{-2}^{2} f(x)dx$.

A. $I=-\frac{\pi}{10}$. **B.** $I=-\frac{\pi}{20}$. **C.** $I=\frac{\pi}{20}$. **D.** $I=\frac{\pi}{10}$.

Lời giải

Từ giả thiết, thay x bằng $-x$ ta được $2f(-x)+3f(x)=\frac{1}{4+x^2}$

Do đó ta có hệ $\begin{cases}2f(x)+3f(-x)=\dfrac{1}{4+x^2}\\ 2f(-x)+3f(x)=\dfrac{1}{4+x^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4f(x)+6f(-x)=\dfrac{2}{4+x^2}\\ 9f(x)+6f(-x)=\dfrac{3}{4+x^2}\end{cases}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{5\left(4+x^2\right)}$

Khi đó $I=\int\limits_{-2}^{2} f(x)dx=\frac{1}{5}\int\limits_{-2}^{2}\frac{1}{4+x^2}dx=\frac{\pi}{20}$

Chọn ý **C.**

Câu 5.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ và thỏa mãn $2f(x)+f(-x)=\cos x$ Tính tích phân $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

A. $I=-2$. **B.** $I=\frac{2}{3}$. **C.** $I=\frac{3}{2}$. **D.** $I=2$.

Lời giải

Từ giả thiết, thay x bằng $-x$ ta được $2f(-x)+f(x)=\cos x$.

Do đó ta có hệ $\begin{cases} 2f(x)+f(-x)=\cos x \\ 2f(-x)+f(x)=\cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4f(x)+2f(-x)=2\cos x \\ f(x)+2f(-x)=\cos x \end{cases} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}\cos x.$

Khi đó $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos dx=\frac{1}{3}\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}$

Chọn ý **B.**

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Những bài toán tích phân trong phần này không khó, tất cả được che giấu dưới một lớp các ẩn số, việc làm của chúng ta là phát hiện ra được cách đặt ẩn để đưa tất cả về dạng chuẩn thì bài toán sẽ được giải quyết hoàn toàn.

ĐỀ BÀI

Câu 1. Cho $\int_{0}^{2017} f(x)dx = 2$. Tính tích phân $I = \int_{0}^{\sqrt{e^{2017}-1}} \frac{x}{x^2+1}.f\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]dx$.

A. $I = 1$ **B.** $I = 2$ **C.** $I = 4$ **D.** $I = 5$

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{1}^{9} \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx = 4$, $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x dx = 2$. Tính tích phân $I = \int_{0}^{3} f(x)dx$.

A. $I = 2.$ **B.** $I = 6.$ **C.** $I = 4.$ **D.** $I = 10.$

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)dx = 4, \int_{0}^{1} \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}dx = 2.$ Tính giá trị của tích phân $I = \int_{0}^{1} f(x)dx.$

A. $I = 6.$ **B.** $I = 2.$ **C.** $I = 3.$ **D.** $I = 1.$

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f\left(\cos^2 x\right)dx = 1, \int_{e}^{e^2} \frac{f\left(\ln^2 x\right)}{x\ln x}dx = 1.$ Tính tích phân $I = \int_{\frac{1}{4}}^{2} \frac{f(2x)}{x}dx.$

A. $I = 1.$ **B.** $I = 2.$ **C.** $I = 3.$ **D.** $I = 4.$

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(x^5+4x+3\right) = 2x+1 \forall x \in \mathbb{R}$. Tính tích phân $\int_{-2}^{8} f(x)dx$.

A. $\frac{32}{3}$ **B.** 10 **C.** 72 **D.** 2

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R và thỏa mãn $\left(f(x)\right)^5 + f(x) = x - 2$ trên R. Giá trị của tích phân $I = \int_{0}^{2} \left(f(x)\right)^2 dx$ tương ứng bằng?

A. 1 **B.** $\frac{7}{8}$ **C.** $\frac{22}{21}$ **D.** $\frac{13}{8}$

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định trên R thỏa mãn điều kiện

$$4f(2x-1)+xf\left(\frac{21-x^2}{4}\right)=3x+4.$$

Giá trị của tích phân $I=\int_1^3 f(x)dx$ tương ứng bằng?

A. 1 **B.** $\frac{7}{8}$ **C.** $\frac{22}{21}$ **D.** $\frac{13}{8}$

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên toàn R và thỏa mãn hệ thức sau với mọi $x\neq 0$ $\int xf(x)dx=x^2\sin x-\int xdx$. Khi đó giá trị của tích phân $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$?

A. $\frac{\pi}{6}+\frac{3}{2}$ **B.** $\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\frac{5\pi}{12}-\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}$

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thoả mãn điều kiện

$$f(x)-8x^3f(x^4)+\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}=0.$$

Tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$ có kết quả dạng $\frac{a-b\sqrt{2}}{c}$, $a,b,c\in\mathbb{Z}$, $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ tối giản. Tính $a+b+c$.

A. 6 **B.** -4 **C.** 4 **D.** -10

Câu 10. Giá trị $I=\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{6}}}^{\frac{9}{\sqrt[3]{4}}} x^2\sin(\pi x^3)e^{\cos(\pi x^3)}dx$ gần bằng số nào nhất trong các số sau đây?

A. 0,046 **B.** 0,036 **C.** 0,037 **D.** 0,038

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và thỏa mãn $f(u).u'+f(v).v'=x+1$, trong đó u, v lần lượt là những hàm của biến x, chúng cũng liên tục và xác định trên R. Biết rằng $u(1)=a;u(2)=c;v(1)=c;v(2)=b$, trong đó a,b,c là những số thực. Giá trị của tích phân $I=\int_a^b f(x)dx$ bằng?

A. 1 **B.** 2 **C.** $\frac{5}{2}$ **D.** $\frac{4}{3}$

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn $f(x)=\frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}+\frac{\ln x}{x}$.

Tính tích phân $I=\int_3^4 f(x)dx$.

A. $I=3+2\ln^2 2$ **B.** $I=2\ln^2 2$ **C.** $I=\ln^2 2$ **D.** $I=2\ln 2$

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, luôn dương trên $[0;3]$ và thỏa mãn điều kiện $I=\int_0^3 f(x)dx=4$. Khi đó giá trị của tích phân $K=\int_0^3\left(e^{1+\ln(f(x))}+4\right)dx$ là?

A. $4+12e$ **B.** $12+4e$ **C.** $3e+14$ **D.** $14+3e$

Câu 14. Tìm tất cả các giá trị dương của m để $\int_0^3 x(3-x)^m dx = -f''\left(\frac{10}{9}\right)$, với $f(x) = \ln x^{15}$.

A. $m = 20$ **B.** $m = 4$ **C.** $m = 5$ **D.** $m = 3$

Câu 15. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan x$. Biết rằng $F\left(\left(\frac{\pi}{3}\right) + k.2\pi\right) = k; F\left(\left(\frac{4\pi}{3}\right) + m.2\pi\right) = -m$, với k và m là những số tự nhiên. Khi đó giá trị của tổng $\left\{F\left(\frac{\pi}{4}\right) + F\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) + ... + F\left(\frac{\pi}{4} + 2018\pi\right)\right\}$ tương ứng bằng bao nhiêu?

A. $2019 - 2018\ln(2)$ **B.** $2018 + 1009\ln(2)$ **C.** $1009 - 2019\ln(2)$ **D.** $2018 - 2019\ln(3)$

Câu 16. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số. Biết rằng $F(-1) = 2F(1) = 4F(3) = 4$. Biết giá trị của tổng $\left\{F(-2) + F\left(\frac{1}{2}\right) + F\left(\frac{3}{2}\right)\right\} = a + \ln\sqrt{b} - \ln\sqrt{c}$, trong đó a và b là những số nguyên dương. Hỏi tổng $a + b + c$ bằng bao nhiêu?

A. 12 **B.** 11 **C.** 9 **D.** 7

Câu 17. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời $\int_0^1 f(x)dx = 4$, $\int_0^3 f(x)dx = 6$. Tính tích phân $I = \int_{-1}^1 f(|2x+1|)dx$

A. $I = 3$ **B.** $I = 5$ **C.** $I = 6$ **D.** $I = 4$

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời 2 tích phân $\int_0^1 f(2x)dx = 2$ và $\int_0^2 f(6x)dx = 14$. Tính tích phân $\int_{-2}^2 f(5|x|+2)dx$.

A. 30 **B.** 32 **C.** 34 **D.** 36

Câu 19. Cho tích phân $I = \int_{-a}^a x^2\left(\sin x + \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx = \frac{b\pi a^c}{d}$ trong đó a, b, c, d là các số nguyên dương và $\frac{b}{d}$ là phân số tối giản. Tính $b + c + d$?

A. 12 **B.** 13 **C.** 14 **D.** 15

Câu 20. Tính tích phân $I = \int_{-1}^1 \left[\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right]^{2019} dx$?

A. 0 **B.** 2019 **C.** –1 **D.** –2019

Câu 21. Biết $\int_0^{\pi} \frac{x\sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx = \frac{\pi^a}{b}$ trong đó a, b là các số nguyên dương. Tính $P = 2a + b$.

A. $P = 8$ **B.** $P = 10$ **C.** $P = 6$ **D.** $P = 12$

Câu 22. Biết $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}dx = a+\frac{\pi^2}{b}+\frac{\sqrt{3}\pi}{c}$ với a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $P = a-b+c$.

A. $P=-37$. **B.** $P=-35$. **C.** $P=35$. **D.** $P=41$.

Câu 23. Cho $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\sin^2 x+\cos^4 x}dx = \frac{\pi}{2}\int_a^b \frac{dx}{x^4-x^2+1}$, $a,b\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng

A. $a+b=0$ **B.** $a+b=1$ **C.** $\frac{a}{b}=\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{a}{b}=1$

Câu 24. Cho $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\left(\frac{a+\sin x}{a+\cos x}\right)}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$, $a>1$. Tính I theo a

A. $I=\sqrt{a}-1$ **B.** $I=a^4-1$ **C.** $I=0$ **D.** $I=a$

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $af(b)+bf(a)=1$ với mọi $a,\ b\in[0;1]$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$.

A. $I=\frac{1}{2}$. **B.** $I=\frac{1}{4}$. **C.** $I=\frac{\pi}{2}$. **D.** $I=\frac{\pi}{4}$.

Câu 26. Giả sử tồn tại 2 hàm số $f(x)$ và $g(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$\sqrt{f(x)}.f'(x)=\cos^2 x.g(\sin x)+\sin^2 x.g(\cos x).$$

Biết $\int_0^1 g(x).\sqrt{1-x^2}dx=a; f(0)=0$. Tính $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ theo a.

A. 3a **B.** $\sqrt[3]{9a^2}$ **C.** $\sqrt{27a^3}$ **D.** 9a

Câu 27. Cho $2f\left((x-1)^2\right)+3f\left((x+2)(x-4)\right)=\sqrt{3x^2-6x+9}+1$. Tính $\int_4^5 f(x)dx$

A. $\frac{2}{15}\left(7\sqrt{21}+6\sqrt{18}\right)+\frac{1}{5}$ **B.** $\frac{2}{45}\left(7\sqrt{21}+6\sqrt{18}\right)+\frac{1}{5}$

C. $\frac{2}{15}\left(7\sqrt{21}-6\sqrt{18}\right)+\frac{1}{5}$ **D.** $\frac{2}{45}\left(7\sqrt{21}-6\sqrt{18}\right)+\frac{1}{5}$

Câu 28. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $[0;3]$, thỏa mãn $\begin{cases} f(3-x).f(x)=1 \\ f(x)\neq -1 \end{cases}$ với mọi $x\in[0;3]$ và $f(0)=\frac{1}{2}$. Tính tích phân $I=\int_0^3 \frac{xf'(x)}{\left[1+f(3-x)\right]^2.f^2(x)}dx$.

A. $I=\frac{1}{2}$. **B.** $I=1$. **C.** $I=\frac{3}{2}$. **D.** $I=\frac{5}{2}$.

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và thỏa mãn $\begin{cases} f(x)+f(1-x)=x^3-x^2 \\ f(x-1)+f(1-x)=x(1-x) \end{cases}$. Tính tích phân $I=\int_{-1}^{0} f(x)dx$.

A. $I=-2.$ **B.** $I=\dfrac{2}{3}.$ **C.** $I=-\dfrac{2}{14}.$ **D.** $I=-\dfrac{7}{24}.$

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ và hằng số a thỏa mãn $f(-x)=\dfrac{-1}{2}f(x)\left(e^x+1\right)+e^x$. Tính $I=\int_{-a}^{a}\dfrac{f(x)}{e^x+1}dx$?

A. $\ln\left|\dfrac{e^{-a}+1}{e^a+1}\right|.$ **B.** $\ln\left|\dfrac{e^a+1}{e^{-a}+1}\right|.$ **C.** $\ln\left|e^a\right|.$ **D.** $\ln\left|e^{-a}\right|.$

Câu 31. Cho hàm số $f(x)$ bậc 2 có cực trị tại $x=0$ và thỏa mãn điều kiện

$$\left(x^2-x\right).f(x+1)-f^2(x)=x^3-1.$$

Tính giá trị của tích phân $\int_{-2}^{2} f(x)dx$?

A. $I=\dfrac{4}{3}.$ **B.** $I=\dfrac{2}{3}.$ **C.** $I=\dfrac{1}{2}.$ **D.** $I=\dfrac{5}{4}.$

Câu 32. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$(6x+5)f\left(3x^2+5x+3\right)=f\left(4x^2+9\right).8x+2xf\left(x^2+5\right)+x^2-6x$$

Tính giá trị của tích phân $\int_{3}^{5} f(x)dx$?

A. $I=-\dfrac{3}{2}.$ **B.** $I=\dfrac{-28}{3}.$ **C.** $I=\dfrac{27}{2}.$ **D.** $I=\dfrac{5}{4}.$

Câu 33. Cho hàm số thỏa mãn $f^3(x)+f(1-x)=-6x^2+8$ $(*)$. Tính giá trị của tích phân $I=\int_{0}^{1}\left(f(x)-1\right)xdx$?

A. $I=\dfrac{1}{3}.$ **B.** $I=\dfrac{-8}{3}.$ **C.** $I=\dfrac{1}{2}.$ **D.** $I=\dfrac{5}{4}.$

Câu 34. Cho hàm số thỏa mãn $f(x).f(a-x)=1$ $(*)$ .Biết $I_n=\int_{0}^{a}\dfrac{e^n}{1+f(x)}dx$ .Tính giá trị của tổng $I_1+I_2+...+I_n$?

A. $2a.\dfrac{e^{n+1}-1}{e-1}.$ **B.** $a.\dfrac{e^{n+1}-1}{e}.$ **C.** $a.\dfrac{e^{n+1}-1}{e-1}.$ **D.** $a.\dfrac{e^{n+1}-1}{2e-2}.$

Câu 35. Cho hàm số thỏa mãn $f(x)+f(1-x)=x^2(1-x)\ (*)$. Tính giá trị của biểu thức tích phân $I=\int_0^1 f(x)\left(2xf'(x)-f(x)+1\right)dx$

A. $\frac{1}{24}$. **B.** $\frac{25}{24}$. **C.** $\frac{5}{24}$. **D.** $\frac{8}{24}$.

Câu 36. Cho hàm số thỏa mãn $f(x)+f(1-x)=x(1-x)\ (*)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức tích phân $I=\int_0^1 f(x)xf'(x)dx$?

A. $\frac{143}{288}$. **B.** $\frac{1}{144}$. **C.** $\frac{126}{167}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 37. Cho hàm số thỏa mãn $f(x).f(a-x)=9^x\ (*)$. Tính giá trị của biểu thức tích phân $I=\int_0^a \frac{3^{2x}}{3^x+f(x)}dx$?

A. $\frac{3^a-1}{2}$. **B.** $\frac{3^a}{\ln 3}$. **C.** $\frac{3^a}{2.\ln 3}$. **D.** $\frac{3^a-1}{2.\ln 3}$.

Câu 38. Cho hàm số thỏa mãn $f(x).f(1-x)=e^{2x^2-2x}(*)$. Giá trị của biểu thức tích phân $\int_0^1 (2x-1)f(x)dx$?

A. e^6-1. **B.** e^3-1. **C.** e^2. **D.** e^3.

Câu 39. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 |f'(x)|dx=1$, $f(0)=f(1)=0$. Khẳng định nào dưới đây là đúng ?

A. $|f(x)|\ge 1$. **B.** $|f(x)|\le 1$. **C.** $|f(x)|\ge \frac{1}{2}$. **D.** $|f(x)|\le \frac{1}{2}$.

Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ trên tập R thỏa mãn $\begin{cases} f(-x)=-f(x) \\ f(x+1)=f(x)+1 \\ f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{f(x)}{x^2} \end{cases}$. Tính $I=\int_0^1 f(x)^{2019}dx$.

A. $\frac{4}{1010}$. **B.** $\frac{1}{1010}$. **C.** $\frac{1}{2020}$. **D.** 0.

Câu 41. Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\begin{cases} f(x)+2f(-(x+3))=x^2+x+1 \\ 2f(x)+3f(x+4)=x^2-x+1 \end{cases}$. Tính giá trị của tích phân $\int_0^1 f(x)dx$

A. $\frac{17}{6}$ **B.** $\frac{5}{3}$ **C.** $\frac{13}{10}$ **D.** $\frac{12}{7}$

Câu 42. Cho $I=\int_0^{\pi}\frac{a\cos x}{b+c\sin x}dx, b\neq 0, b+c\neq 0$. Giá trị của a,b,c để $I=0$ là

A. $a=b=c=1$ **B.** $\forall a,b,c$ **C.** $b=1;a,c$ tùy ý **D.** Không có giá trị nào của a,b,c

Câu 43. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{(\sin x+e)^{2\cos x+1}}{(\cos x+e)^{\sin x+1}}dx=a(e+1)\ln(e+1)+be+c, a,b,c\in\mathbb{R}$. Tính $a+b+c$

A. 0 **B.** 1 **C.** –1 **D.** 2

Câu 44. Cho $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{\sin^2 x+3}dx=\frac{\pi\ln a}{b}; a,b\in\mathbb{R}$. Giá trị của ab là

A. 30 **B.** 6 **C.** 20 **D.** 12

Câu 45. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$3f(x)+f(2-x)=2(x-1)e^{x^2-2x+1}+4.$$

Tính tích phân $I=\int_0^2 f(x)dx$ ta được kết quả là?

A. $I=e+4$ **B.** $I=8$ **C.** $I=2$ **D.** $I=e+2$

Câu 46. Giả sử tồn tại $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $(1-x)^2 f(x)+x^2 f(1-x)=1$. Tính giá trị của tích phân $I=\int_0^1\frac{(1-x)^2 f(x)}{2x^2-2x+1}dx$

A. 1 **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{\pi}{4}$ **D.** π

Câu 47. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f^3(x)+f(x)=x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_0^2 f(x)dx$.

A. $I=-\frac{4}{5}$. **B.** $I=\frac{4}{5}$. **C.** $I=-\frac{5}{4}$. **D.** $I=\frac{5}{4}$.

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f'(x)=f'(1-x)$ với mọi $x\in[0;1]$. Biết rằng $f(0)=1$, $f(1)=41$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$.

A. $I=\sqrt{41}$. **B.** $I=21$. **C.** $I=41$. **D.** $I=42$.

Câu 49. Cho các hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $[0;1]$, thỏa $m.f(x)+n.f(1-x)=g(x)$ với m, n là số thực khác 0 và $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 g(x)dx=1$. Tính $m+n$.

A. $m+n=0$. **B.** $m+n=\frac{1}{2}$. **C.** $m+n=1$. **D.** $m+n=2$.

Câu 50. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.\cos x, \forall x\in\mathbb{R}, \text{ và } f(0)=0.$$

Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x.f'(x)dx$ bằng

A. $-\frac{\pi}{4}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{\pi}{4}$ **D.** $-\frac{1}{4}$

Câu 51. Giả sử tồn tại $f(x)$ thỏa mãn $f(x).f(-x)=1$. Tính $P_n=\sum_{k=1}^{n}\int_{-k}^{k}\frac{dx}{1+f(x)}$

A. n **B.** $\frac{n(n+1)}{2}$ **C.** $n(n+1)$ **D.** $n+1$

Câu 52. Cho $f(x)$ thỏa mãn $(2019-x).f(x)+x.f(2019-x)=1$. Biết $f(1)=0$, tính giá trị của tích phân $I=\int_1^{2018}\ln x.f'(x)dx$

A. $\ln 2018$ **B.** $\ln 2019$ **C.** $\frac{2018}{2019}\ln 2018$ **D.** $\frac{2019}{2018}\ln 2019$

Câu 53. Cho $f(x)$ là hàm chẵn. Biết $\frac{1}{n}\int_{n-1}^{n}f(x)dx=1,\ \forall n\in\mathbb{R}$, tính $F_n=\int_{-n}^{n}\frac{f(x)}{2^x+1}dx$ theo n

A. n **B.** $n(n+1)$ **C.** $\frac{n(n+1)}{2}$ **D.** $2n$

Câu 54. Cho $f(x)$ thỏa mãn $f(x)=f(x+4)$. Biết $f(4)=a;\int_0^4 f(x)dx=b$. Tính giá trị của biểu thức $P=\int_0^4 xf'(x)dx+\int_0^{4^2}xf'(x)dx+\int_0^{4^3}xf'(x)dx+...+\int_0^{4^{2019}}xf'(x)dx$ theo a và b?

A. $4^{2019}.(a-b)$ **B.** $4^{2019}.(4a-b)$ **C.** $(4^{2019}-1)(4a-b)$ **D.** $\frac{4^{2019}-1}{3}.(4a-b)$

Câu 55. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4\cos 2x+3\sin 2x)\ln(\cos x+2\sin x)dx=c\ln 2-\frac{a}{b}$, trong đó $a,b,c\in\mathbb{N}^*$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $T=a+b+c$.

A. $T=9$ **B.** $T=-11$ **C.** $T=5$ **D.** $T=7$

Câu 56. Tính giá trị của tích phân $\int_{-2^{2019}\pi}^{2^{2019}\pi}(\cos 2x-\cos^2 2x)dx$.

A. $2^{2019}\pi$ **B.** $-\pi$ **C.** π **D.** $-2^{2019}\pi$

Câu 57. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx=\frac{\pi\ln a}{b}$ với a là số nguyên tố và b nguyên dương. Giá trị biểu thức $a+b$ bằng

A. 10 **B.** 6 **C.** 11 **D.** 7

Câu 58. Cho tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left[\frac{(2018+\cos x)^{1+\cos x}}{2018+\sin x}\right]dx=a\ln a-b\ln b-1$ với a,b là các số nguyên dương. Giá trị của $a+b$ bằng?

A. 2015 **B.** 4030 **C.** 4037 **D.** 2025

Câu 59. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f^3(x^2)+f(x^2)=2x^2+9$. Tính giá trị của tích phân $I=\int_1^{\sqrt{6}} xf^2(x^2)dx$?

A. $I=1$ **B.** $I=2$ **C.** $I=4$ **D.** $I=5$

Câu 60. Cho $f(x)$ liên tục trên $[1;3]$ thỏa mãn $f(x)(x+1)(f(x)+1)+2=0\ \forall x$. Biết $f(3)=3;\ f(1)=2$. Tính $I=\int_1^3 \frac{f(x)}{(x+1)^2}dx$.

A. $\frac{37}{12}$ **B.** $\frac{37}{6}$ **C.** $\frac{91}{12}$ **D.** $\frac{91}{6}$

Câu 61. Cho $f(x)$ liên tục trên khoảng $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $\sin x.f'(x)+\cos x.f(x)=\sin 2x$. Biết $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\ln 2$. Tính $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $2\ln 2$ **B.** $\sqrt{2}\ln 2$ **C.** $\ln 2$ **D.** $\left(\sqrt{2}+1\right)\ln 2$

Câu 62. Giả sử tồn tại $f(x)$ thoản mãn $2xf(x^2+1)-f(x+1)=2x^3+1$. Tính $I=\int_3^5 f(x)dx$.

A. 6 **B.** 8 **C.** 10 **D.** 12

Câu 63. Cho $f(x)$ liên tục đạt giá trị dương trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x).f'(x)=2\sqrt{xf^2(x)+25x}$. Biết $f(9)=12$, tính $I=\int_0^1 f^2(x)dx$.

A. $479\frac{41}{45}$ **B.** $480\frac{41}{45}$ **C.** $479\frac{4}{45}$ **D.** $480\frac{4}{45}$

Câu 64. Cho $f(x)$ là hàm chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\frac{x}{f(x^2-1)}+\frac{2}{f(4x-1)}=f'(x)$. Biết $\int_{-7}^{7}\frac{dx}{f(x)}=a;f(1)=b$. Tính $f(2)$ theo a và b

A. $b+\frac{a}{2}$ **B.** $2b+a$ **C.** $b+\frac{a}{4}$ **D.** $4b+a$

Câu 65. Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f^2(x)=x^2+1$. Biết $f(2)=\frac{-1+3\sqrt{2}}{2}$, tính $I=\int_0^1 f(x)dx$

A. $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\ln\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{4}$ **B.** $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\ln\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{4}$

C. $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\ln\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{4}$ **D.** $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\ln\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{4}$

Câu 66. Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)+2x=f(x)$. Biết $f(2)=10; f(1)=5$. Tính $\int_1^2\left(\frac{x}{f(x)}\right)^2 f'(x)dx$

A. $\frac{6}{5}+\ln 2$ **B.** $\frac{6}{5}-\ln 2$ **C.** $\frac{4}{5}+\ln 2$ **D.** $\frac{4}{5}-\ln 2$

Câu 67. Cho $\int_0^3[f'(x)]^2dx=36, \int_0^3 f(x)dx=0$. Biết $f(3)=-6, f(0)=3$. Tính $f(-1)$

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 68. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x+1)+f(x+2)=e^x(x^2-1)$. Tính giá trị của tích phân $I=\int_1^3 f(x)dx$?

A. 0 **B.** 1 **C.** -1 **D.** 3

Câu 69. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(x+1)+3f(3x+2)-4f(4x+1)-f(2^x)=\frac{3}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}, \forall x\in[-1;+\infty)$$

Tính giá trị của tích phân $I=\int_1^2\frac{f(x)dx}{x}$?

A. 0 **B.** 1 **C.** -1 **D.** 3

Câu 70. Cho $S_n=-\int_0^1(x-1)^{100}dx+\int_0^2(x-2)^{100}dx-...+\int_0^n(x-n)^{100}dx$. Tính giá trị của biểu thức $S_{100}+\left(\int_0^1 x^{100}+\int_2^3 x^{100}+...+\int_{98}^{100}x^{100}\right)-\int_0^{100}x^{100}$?

A. $-\frac{1}{2}\int_0^{100}x^{100}$. **B.** $\int_0^{100}x^{100}$ **C.** 0 **D.** $2\int_0^{100}x^{100}$

Câu 71. Tính giá trị của tích phân $I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^2}{\sin x+\tan x}dx$?

A. $-\frac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $\frac{\pi}{2}$.

Câu 72. Cho tích phân $I=\int_0^\pi\frac{4x^3-3x}{\sqrt{1-x}.\sqrt{1+x}}dx=a\pi^3+b\pi^2+c\pi$. Tính $a+b+c$?

A. $\frac{1}{3}$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $\frac{\pi}{2}$.

Câu 73. Tính giá trị của tích phân $I=\int_{\tan\frac{a}{2}}^{\tan\frac{b}{2}}\frac{\ln x(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}$ theo $\int_a^b\frac{\ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)}{2}dx=M$?

A. M. **B.** 0. **C.** $\frac{M}{4}$. **D.** $2M$.

Câu 74. Cho tích phân $J_n=\int\limits_{-n}^{n}e^n\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$. Tính $J_1+J_2+...+J_{100}$?

A. $\frac{1}{2}.\sum\limits_{n=1}^{100}e^n$. **B.** $2\sum\limits_{n=1}^{100}e^n$. **C.** 0. **D.** $\sum\limits_{n=1}^{100}e^n$.

Câu 75. Cho $\frac{f(x)}{f\left(\frac{1-x}{x}\right)}=\frac{1}{-(x+1)^2}$, $\int\limits_{\frac{-1}{2}}^{2}\frac{\ln(1-x)}{f\left(\frac{1-x}{x}\right)}dx=a$ Tính $\int\limits_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{3}}-\frac{\ln x}{(x+1)^2f(x)}dx$ theo a?

A. $\frac{1}{2}a$. **B.** $2a$ **C.** 0. **D.** a.

Câu 76. Cho hàm số chẵn $f(x)$ thỏa mãn $f(x).(x-1)=f(x-1).x$. Tính $\int\limits_0^2 f(x-2)dx$?

A. 1. **B.** 2 **C.** 0. **D.** 7.

Câu 77. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x).f(2-x)=2019$. Tính giá trị của biểu thức tích phân $\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{2019}+f(x)}$

A. 0. **B.** 1 **C.** $\frac{2}{\sqrt{2019}}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{2019}}$

Câu 78. Cho hàm số $f(x)=x^3+(x-1)^3+...+(x-100)^3$. Tính giá trị của biểu thức tích phân $\int_0^{100}f(x)dx$?

A. 0 **B.** 1. **C.** $\frac{2}{\sqrt{2019}}$ **D.** $\frac{1}{\sqrt{2019}}$

Câu 79. Cho hàm số $f(x)$ xác định là liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x+1)=\frac{f(x)-1}{f(x)+1}$. Biết rằng $\int_0^4 f(x)dx=1, f(4)=2$. Tính giá trị của tích phân $\int_0^{2^{2019}}xf'(x)dx$?

A. 2^{2019}. **B.** 2^{2020} **C.** 7.2^{2017}. **D.** 7.2^{2018}

Câu 80. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời 2 điều kiện:

$$\begin{cases}f(0)=f'(0)=1\\ f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy(x+y)-1, \forall x,y\in\mathbb{R}\end{cases}$$

Tính tích phân $\int\limits_0^1 f(x-1)dx$.

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $-\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{7}{4}$

Câu 81. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$ và $f^2(-x)=(x^2+2x+4)f(x+2)$ Biết rằng $f(x)\neq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ tính tích phân $I=\int_0^2 xf''(x)dx$.

A. $I=-4$ **B.** $I=4$ **C.** $I=0$ **D.** $I=8$

Câu 82. Có bao nhiêu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện

$$\int_0^1 \left(f(x)\right)^{2018} dx = \int_0^1 \left(f(x)\right)^{2019} dx = \int_0^1 \left(f(x)\right)^{2020} dx$$

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 83. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\left[\frac{1}{2};2\right]$, thỏa mãn điều kiện $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$. Tính tích phân $I = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{f(x)}{x^2+1} dx.$

A. $I = \frac{3}{2}.$ **B.** $I = 2.$ **C.** $I = \frac{5}{2}.$ **D.** $I = 3.$

Câu 84. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ ta có $f(0) = 0, f'(0) \neq 0$ và đồng thời $f(x)f'(x) + 18x^2 = (3x^2 + x)f'(x) + (6x+1)f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, biết rằng

$$\int_0^1 (x+1)e^{f(x)} dx = ae^2 + b \left(a, b \in \mathbb{Q}\right)$$

Giá trị của $a - b$ bằng?

A. 0 **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** 1 **D.** 2

CHINH PHỤC OLYMPIC TOÁN

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

Cho $\int\limits_0^{2017} f(x)dx = 2$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\sqrt{e^{2017}-1}} \frac{x}{x^2+1}.f\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]dx.$

A. $I = 1$ **B.** $I = 2$ **C.** $I = 4$ **D.** $I = 5$

Lời giải

Thoạt nhìn thì có lẽ tương đối khủng, nhưng tuy nhiên bằng cách đặt ẩn phụ thì bài toán này trở nên vô cùng đơn giản.

Đặt $t = \ln\left(x^2+1\right)$, suy ra $dt = \frac{2xdx}{x^2+1} \Rightarrow \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{dt}{2}$

Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \to t = 0 \\ x = \sqrt{e^{2017}-1} \to t = 2017 \end{cases}$

Khi đó $I = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2017} f(t)dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2017} f(x)dx = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$

Chọn ý **A.**

Câu 2.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_1^9 \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx = 4,\ \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos xdx = 2$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^3 f(x)dx$.

A. $I = 2.$ **B.** $I = 6.$ **C.** $I = 4.$ **D.** $I = 10.$

Lời giải

Ở đây có 2 giả thiết cần biến đổi để đưa về tích phân liên quan tới hàm $f(x)$.

- Xét $\int\limits_1^9 \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx = 4$. Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow 2tdt = dx.$

Đổi cận $\begin{cases} x = 1 \to t = 1 \\ x = 9 \to t = 3 \end{cases}$ Suy ra $\Rightarrow 4 = \int\limits_1^9 \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx = 2\int\limits_1^3 f(t)2dt \Rightarrow \int\limits_1^3 f(t)dt = 2$.

- Xét $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos xdx = 2$ Đặt $u = \sin x \Rightarrow du = \cos xdx$

Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \to u = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \to u = 1 \end{cases}$. Suy ra $2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos xdx = \int\limits_0^1 f(t)dt$

Vậy $I = \int\limits_0^3 f(x)dx = \int\limits_0^1 f(x)dx + \int\limits_1^3 f(x)dx = 4$.

Chọn ý **C.**

Câu 3.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)dx = 4, \int\limits_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}dx = 2.$ Tính giá trị của tích phân $I = \int\limits_0^1 f(x)dx.$

A. $I = 6.$ **B.** $I = 2.$ **C.** $I = 3.$ **D.** $I = 1.$

Lời giải

Xét tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)dx = 4$. Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x}dx = \left(\tan^2 x + 1\right)dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$

Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \to t = 0 \\ x = \frac{\pi}{4} \to t = 1 \end{cases} \Rightarrow 4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)dx = \int_0^1 \frac{f(t)}{t^2+1}dt = \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}dx$

Từ đó suy ra $I = \int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}dx + \int\limits_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}dx = 4 + 2 = 6$

Chọn ý **A.**

Câu 4.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f\left(\cos^2 x\right)dx = 1, \int\limits_e^{e^2} \frac{f\left(\ln^2 x\right)}{x\ln x}dx = 1.$ Tính tích phân $I = \int\limits_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(2x)}{x}dx.$

A. $I = 1.$ **B.** $I = 2.$ **C.** $I = 3.$ **D.** $I = 4.$

Lời giải

- Xét $A = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f\left(\cos^2 x\right)dx = 1$.

Đặt $t = \cos^2 x \Rightarrow dt = -2\sin x.\cos x dx = -2\cos^2 x.\tan x dx = -2t.\tan x dx \Rightarrow \tan x dx = -\frac{dt}{2t}$

Khi đó $1 = A = -\frac{1}{2}\int\limits_1^{\frac{1}{2}} \frac{f(t)}{t}dt = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t}dt = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(x)}{x}dx \Rightarrow \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(x)}{x}dx = 2$

- Xét $B = \int\limits_e^{e^2} \frac{f\left(\ln^2 x\right)}{x\ln x}dx = 1$

Đặt $u = \ln^2 x \Rightarrow du = \frac{2\ln x}{x}dx = \frac{2\ln^2 x}{x\ln x}dx = \frac{2u}{x\ln x}dx \Rightarrow \frac{dx}{x\ln x} = \frac{du}{2u}$

Khi đó $1 = B = \frac{1}{2}\int\limits_1^4 \frac{f(u)}{u}du = \frac{1}{2}\int\limits_1^4 \frac{f(x)}{x}dx \Rightarrow \int\limits_1^4 \frac{f(x)}{x}dx = 2$

- Xét tích phân cần tính $I = \int\limits_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(2x)}{x}dx$

Đặt $v=2x\Rightarrow I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{4}\frac{f(v)}{v}dv=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{4}\frac{f(x)}{x}dx=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(x)}{x}dx+\int\limits_{1}^{4}\frac{f(x)}{x}dx=2+2=4$.

Chọn ý **D.**

Câu 5.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(x^5+4x+3\right)=2x+1\forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $\int_{-2}^{8}f(x)dx$.

A. $\frac{32}{3}$ **B.** 10 **C.** 72 **D.** 2

Lời giải

Vấn đề ở câu này nằm ở giả thiết, vậy làm sao để sử dụng giả thiết để tính được tích phân mà đề bài yêu cầu đây? Ý tưởng rất đơn giản đó là đặt $x=t^5+4t+3$.

Đặt $x=t^5+4t+3\Rightarrow dx=\left(5t^4+4\right)dt$ khi đó ta được:

$$\int_{-2}^{8}f(x)dx=\int_{-1}^{1}f\left(t^5+4t+3\right)\left(5t^4+4\right)dt=\int_{-1}^{1}(2t+1)\left(5t^4+4\right)dt=10$$

Chọn ý **B.**

Câu 6.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và thỏa mãn $\left(f(x)\right)^5+f(x)=x-2$ trên R. Giá trị của tích phân $I=\int_0^2\left(f(x)\right)^2dx$ tương ứng bằng?

A. 1 **B.** $\frac{7}{8}$ **C.** $\frac{22}{21}$ **D.** $\frac{13}{8}$

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $d(x-2)=dx=\left(5f(x)+1\right)f'(x)dx$

$$\Rightarrow I=\int_0^2 f^2(x)dx=\int_0^2 f^2(x)\left(5f^4(x)+1\right)f'(x)dx$$

Đặt $t=f(x)\Rightarrow dt=f'(x)dx$; đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=-1\\x=2\Rightarrow t=0\end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int_{-1}^{0}t^2\left(5t^4+1\right)dt=\left.\left(\frac{5t^7}{7}+\frac{t^3}{3}\right)\right|_{-1}^{0}=\frac{22}{21}$$

Chọn ý **C.**

Câu 7.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định trên R thỏa mãn điều kiện

$$4f(2x-1)+xf\left(\frac{21-x^2}{4}\right)=3x+4.$$

Giá trị của tích phân $I=\int_1^3 f(x)dx$ tương ứng bằng?

A. 1 **B.** $\frac{7}{8}$ **C.** 10 **D.** $\frac{13}{8}$

Lời giải

Phân tích. Phương pháp làm dạng bài toán này thường là lấy tích phân hai vế của biểu thức giả thiết một cách khéo léo để làm xuất hiện tích phân cần tính sau khi thực hiện đổi biến số.

Lấy tích phân 2 vế ta được $\int_1^3 4f(2x-1)dx - \int_1^3 xf\left(\frac{21-x^2}{4}\right)dx = \int_1^3(3x+4)dx = 20\ (1)$

Với $A=\int_1^3 4f(2x-1)dx$. Đặt $t=2x-1 \Rightarrow dt=2dx \Rightarrow \begin{cases} x=1\Rightarrow t=5 \\ x=3\Rightarrow t=3\end{cases}$

$$\Rightarrow A=\int_1^5 4f(t)\frac{dt}{2} = 2\int_1^5 f(x)dx$$

Với $B=\int_1^3 xf\left(\frac{21-x^2}{4}\right)dx$. Đặt $t=\frac{21-x^2}{4} \Rightarrow dt=-\frac{1}{2}xdx \Rightarrow xdx=-2dt \Rightarrow \begin{cases} x=1\Rightarrow t=5 \\ x=3\Rightarrow t=3\end{cases}$

$$\Rightarrow B=\int_5^3 -2f(t)dt = 2\int_3^5 f(t)dt = 2\int_3^5 f(x)dx$$

Thay vào (1), ta được $2\int_1^5 f(x)dx - 2\int_3^5 f(x)dx = 2\int_1^3 f(x)dx = 20 \Rightarrow \int_1^3 f(x)dx = 10$

Chọn **C.**

Câu 8.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên toàn R và thỏa mãn hệ thức sau với mọi $x \neq 0$ $\int xf(x)dx = x^2\sin x - \int xdx$. Khi đó giá trị của tích phân $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$?

A. $\frac{\pi}{6}+\frac{3}{2}$ **B.** $\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\frac{5\pi}{12}-\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}$

Lời giải

Đạo hàm 2 vế hệ thức ta được $xf(x) = 2x\sin x + x^2\cos x - x$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2x\sin x + x^2\cos x - x}{x} = 2\sin x + x\cos x - x$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(2\sin x + x\cos x - 1)dx = \frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Chọn ý **B.**

Câu 9.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thoả mãn điều kiện

$$f(x) - 8x^3 f(x^4) + \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} = 0.$$

Tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$ có kết quả dạng $\frac{a-b\sqrt{2}}{c}$, $a,b,c\in\mathbb{Z}$, $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ tối giản. Tính $a+b+c$.

A. 6 **B.** –4 **C.** 4 **D.** –10

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có:

$$f(x)-8x^3f(x^4)+\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}=0 \Rightarrow f(x)=8x^3f(x^4)-\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}.$$

$$I=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 8x^3f(x^4)dx-\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx \ (1)$$

- Xét tích phân $\int_0^1 8x^3f(x^4)dx=\int_0^1 2f(x^4)d(x^4)=2\int_0^1 f(x)dx=2I$
- Xét tích phân $\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

Đặt $t=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow t^2=x^2+1\Rightarrow tdt=xdx$. Đổi cận $x=0\Rightarrow t=1$, $x=1\Rightarrow t=\sqrt{2}$.

Nên $\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{(t^2-1)tdt}{t}=\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Bigg|_1^{\sqrt{2}}=\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}$

Do đó $(1)\Rightarrow I=2I-\left(\frac{2-\sqrt{2}}{3}\right)\Rightarrow I=\frac{2-\sqrt{2}}{3}$. Nên $a=2$, $b=1$, $c=3$.

Vậy $a+b+c=6$.

Chọn ý **A.**

Câu 10.

Giá trị $I=\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{6}}}^{\frac{9}{\sqrt[3]{4}}}x^2\sin(\pi x^3)e^{\cos(\pi x^3)}dx$ gần bằng số nào nhất trong các số sau đây?

A. 0,046 **B.** 0,036 **C.** 0,037 **D.** 0,038

Lời giải

Đặt $u=\cos(\pi x^3)\Rightarrow du=-3\pi x^2\sin(\pi x^3)dx\Rightarrow x^2\sin(\pi x^3)dx=-\frac{1}{3\pi}du$.

- Khi $x=\frac{1}{\sqrt[3]{6}}$ thì $u=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Khi $x=\frac{9}{\sqrt[3]{4}}$ thì $u=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Khi đó $I=-\frac{1}{3\pi}\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}e^u\,du=\frac{1}{3\pi}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}e^u\,du=\frac{1}{3\pi}e^u\Bigg|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{3\pi}\left(e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}-e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)\approx 0,037$.

Chọn ý **C.**

Câu 11.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và thỏa mãn $f(u).u'+f(v).v'=x+1$, trong đó u, v lần lượt là những hàm của biến x, chúng cũng liên tục và xác định trên R. Biết rằng $u(1)=a;u(2)=c;v(1)=c;v(2)=b$, trong đó a,b,c là những số thực. Giá trị của tích phân $I=\int_a^b f(x)dx$ bằng?

A. 1 **B.** 2 **C.** $\frac{5}{2}$ **D.** $\frac{4}{3}$

Lời giải

Lấy tích phân 2 vế ta được $\int_1^2 f(u).u'dx+\int_1^2 f(v).v'dx=\int_1^2 (x+1)dx=\frac{5}{2}$

Với tích phân $A=\int_1^2 f(u).u'dx$; đặt $t=u\Rightarrow dt=u'dx\Rightarrow A=\int_a^c f(t)dt=\int_a^c f(x)dx$

Với tích phân $B=\int_1^2 f(v).v'dx$; đặt $t=v\Rightarrow dt=v'dx\Rightarrow B=\int_c^b f(t)dt=\int_c^b f(x)dx$

Thay vào (1) ta được $A+B=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx=\frac{5}{2}=I$

Chọn ý **C.**

Câu 12.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn $f(x)=\frac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}+\frac{\ln x}{x}$. Tính tích phân $I=\int\limits_3^4 f(x)dx$.

A. $I=3+2\ln^2 2$ **B.** $I=2\ln^2 2$ **C.** $I=\ln^2 2$ **D.** $I=2\ln 2$

Lời giải

Ta có $\int\limits_1^4 f(x)dx=\int\limits_1^4\left[\frac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}+\frac{\ln x}{x}\right]dx=\int\limits_1^4\frac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}dx+\int\limits_1^4\frac{\ln x}{x}dx$.

Xét tích phân $K=\int\limits_1^4\frac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}dx$.

Đặt $2\sqrt{x}-1=t\Rightarrow\sqrt{x}=\frac{t+1}{2}\Rightarrow\frac{dx}{\sqrt{x}}=dt.\Rightarrow K=\int\limits_1^3 f(t)dt=\int\limits_1^3 f(x)dx$.

Xét tích phân $M=\int\limits_1^4\frac{\ln x}{x}dx=\int\limits_1^4\ln x\,d(\ln x)=\left.\frac{\ln^2 x}{2}\right|_1^4=2\ln^2 2$.

Do đó $\int\limits_1^4 f(x)dx=\int\limits_1^3 f(x)dx+2\ln^2 2\Rightarrow\int\limits_3^4 f(x)dx=2\ln^2 2$.

Chọn ý **B.**

Câu 13.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, luôn dương trên $[0;3]$ và thỏa mãn điều kiện $I=\int_0^3 f(x)dx=4$. Khi đó giá trị của tích phân $K=\int_0^3\left(e^{1+\ln(f(x))}+4\right)dx$ là?

A. $4+12e$ **B.** $12+4e$ **C.** $3e+14$ **D.** $14+3e$

Lời giải

Biến đổi tích phân cần tính ta có

$$K=\int_0^3\left(e^{1+\ln(f(x))}+4\right)dx=\int_0^3 e.e^{\ln(f(x))}dx+\int_0^3 4dx=e.\int_0^3 f(x)dx+\int_0^3 4dx=4e+4x\Big|_0^3=4e+12.$$

Vậy $K=4e+12$.

Chọn ý **B.**

Câu 14.

Tìm tất cả các giá trị dương của m để $\int_0^3 x(3-x)^m dx=-f''\left(\frac{10}{9}\right)$, với $f(x)=\ln x^{15}$.

A. $m=20$ **B.** $m=4$ **C.** $m=5$ **D.** $m=3$

Lời giải

Theo giả thiết ta có $f(x)=\ln x^{15}\Rightarrow f'(x)=\frac{15x^{14}}{x^{15}}=\frac{15}{x}\Rightarrow f''(x)=\frac{-15}{x^2}\Rightarrow f''\left(\frac{10}{9}\right)=\frac{-243}{20}$.

Tính tích phân $I=\int_0^3 x(3-x)^m dx$.

- Đặt $t=3-x\Rightarrow x=3-t$, $dx=-dt$, đổi cận

x	0	3
t	3	0

- Do đó $I=\int_3^0(3-t)t^m(-dt)=\int_0^3\left(3t^m-t^{m+1}\right)dt=\frac{3t^{m+1}}{m+1}-\frac{t^{m+2}}{m+2}\Big|_0^3=\frac{3^{m+2}}{(m+1)(m+2)}$

Ta có $\int_0^3 x(3-x)^m dx=-f''\left(\frac{10}{9}\right)\Leftrightarrow\frac{3^{m+2}}{(m+1)(m+2)}=\frac{243}{20}\Leftrightarrow\frac{3^{m+2}}{(m+1)(m+2)}=\frac{3^5}{4.5}$

Thay lần lượt các giá trị m ở 4 đáp án, nhận giá trị $m=3$.

Chọn ý **D.**

Câu 15.

Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\tan x$. Biết rằng $F\left(\left(\frac{\pi}{3}\right)+k.2\pi\right)=k;F\left(\left(\frac{4\pi}{3}\right)+m.2\pi\right)=-m$, với k và m là những số tự nhiên. Khi đó giá trị của tổng $\left\{F\left(\frac{\pi}{4}\right)+F\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)+....+F\left(\frac{\pi}{4}+2018\pi\right)\right\}$ tương ứng bằng bao nhiêu?

A. $2019-2018\ln(2)$ **B.** $2018+1009\ln(2)$ **C.** $1009-2019\ln(2)$ **D.** $2018-2019\ln(3)$

Lời giải

Ta có $\int \tan x dx = \ln \frac{1}{|\cos x|} + C$

$$\Rightarrow \left\{F\left(\frac{\pi}{4}\right)+F\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)+....+F\left(\frac{\pi}{4}+2018\pi\right)\right\} = F\left(\frac{\pi}{3}\right)+\int_{\frac{\pi}{3}+2018\pi}^{\frac{\pi}{4}+2018\pi} \tan x dx$$

Nhận thấy $\int_{\frac{\pi}{3}+k\pi}^{\frac{\pi}{4}+k\pi} \tan x dx = -\ln(2)$ với mọi k nguyên

Và $F\left(\frac{\pi}{3}\right)=0; F\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)=-1; F\left(\frac{\pi}{3}+3\pi\right)=-3;...$

$$\Rightarrow \left\{F\left(\frac{\pi}{4}\right)+F\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)+....+F\left(\frac{\pi}{4}+2018\pi\right)\right\}$$

$$= 0-1+2-3+...+2018-\ln(2)-...-\ln(2) = 1009-2019\ln(2)$$

Chọn **C.**

Câu 16.

Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $\frac{dx}{x(x-2)}$. Biết rằng $F(-1)=2F(1)=4F(3)=4$. Biết giá trị của tổng $\left\{F(-2)+F\left(\frac{1}{2}\right)+F\left(\frac{3}{2}\right)\right\} = a+\ln\sqrt{b}-\ln\sqrt{c}$, trong đó a và b là những số nguyên dương. Hỏi tổng $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

A. 12 **B.** 11 **C.** 9 **D.** 7

Lời giải

Ta có $\left\{F(-2)+F\left(\frac{1}{2}\right)+F\left(\frac{3}{2}\right)\right\} = \left(F(-1)+\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x(x-2)}\right)+\left(F(1)+\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{x(x-2)}\right)$

$$\Leftrightarrow \left\{F(-2)+F\left(\frac{1}{2}\right)+F\left(\frac{3}{2}\right)\right\} = 4+2+2+\ln\sqrt{2}-\ln\sqrt{3} = a+\ln b-\ln c$$

$$\Rightarrow a=8; b=2; c=3 \Rightarrow (a+b+c)=11$$

Chọn **B.**

Câu 17.

Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời $\int_0^1 f(x)dx=4$, $\int_0^3 f(x)dx=6$. Tính tích phân $I=\int_{-1}^{1} f(|2x+1|)dx$

A. $I=3$ **B.** $I=5$ **C.** $I=6$ **D.** $I=4$

Lời giải

Đặt $u=2x+1 \Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$. Khi $x=-1$ thì $u=-1$. Khi $x=1$ thì $u=3$.

Nên $I=\frac{1}{2}\int_{-1}^{3} f(|u|)du = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0} f(|u|)du+\int_0^3 f(|u|)du\right) = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0} f(-u)du+\int_0^3 f(u)du\right)$.

Xét tích phân $\int_0^1 f(x)dx = 4$. Đặt $x = -u \Rightarrow dx = -du$.

Khi $x = 0$ thì $u = 0$. Khi $x = 1$ thì $u = -1$. Nên $4 = \int_0^1 f(x)dx = -\int_0^{-1} f(-u)du = \int_{-1}^0 f(-u)du$.

Ta có $\int_0^3 f(x)dx = 6 \Rightarrow \int_0^3 f(u)du = 6$. Nên $I = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^0 f(-u)du + \int_0^3 f(u)du\right) = \frac{1}{2}(4+6) = 5$.

Chọn ý **B.**

Câu 18.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời 2 tích phân $\int_0^1 f(2x)dx = 2$ và $\int_0^2 f(6x)dx = 14$. Tính tích phân $\int_{-2}^2 f(5|x|+2)dx$.

A. 30 **B.** 32 **C.** 34 **D.** 36

Lời giải

Xét tích phân thứ nhất $\int_0^1 f(2x)dx = 2$.

Đặt $u = 2x \Rightarrow du = 2dx$; $x = 0 \Rightarrow u = 0$; $x = 1 \Rightarrow u = 2$.

Nên $2 = \int_0^1 f(2x)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 f(u)du \Rightarrow \int_0^2 f(u)du = 4$.

Xét tích phân thứ 2 $\int_0^2 f(6x)dx = 14$.

Đặt $v = 6x \Rightarrow dv = 6dx$; $x = 0 \Rightarrow v = 0$; $x = 2 \Rightarrow v = 12$.

Nên $14 = \int_0^2 f(6x)dx = \frac{1}{6}\int_0^{12} f(v)dv \Rightarrow \int_0^{12} f(v)dv = 84$.

Xét tích phân cần tính $\int_{-2}^2 f(5|x|+2)dx = \int_{-2}^0 f(5|x|+2)dx + \int_0^2 f(5|x|+2)dx$.

- Ta sẽ đi tính tích phân $I_1 = \int_{-2}^0 f(5|x|+2)dx$.

  Đặt $t = 5|x|+2$.

  Khi $-2 < x < 0$, $t = -5x+2 \Rightarrow dt = -5dx$; $x = -2 \Rightarrow t = 12$; $x = 0 \Rightarrow t = 2$.

  $$\Rightarrow I_1 = \frac{-1}{5}\int_{12}^2 f(t)dt = \frac{1}{5}\left[\int_0^{12} f(t)dt - \int_0^2 f(t)dt\right] = \frac{1}{5}(84-4) = 16.$$

- Tính tích phân $I_1 = \int_0^2 f(5|x|+2)dx$.

  Đặt $t = 5|x|+2$.

  Khi $0 < x < 2$, $t = 5x+2 \Rightarrow dt = 5dx$; $x = 2 \Rightarrow t = 12$; $x = 0 \Rightarrow t = 2$.

$$\Rightarrow I_2 = \frac{1}{5}\int_2^{12} f(t)dt = \frac{1}{5}\left[\int_0^{12} f(t)dt - \int_0^2 f(t)dt\right] = \frac{1}{5}(84-4) = 16.$$

Vậy $\int_{-2}^{2} f(5|x|+2)dx = 32$.

Chọn ý **B.**

Câu 19.

Cho tích phân $I = \int_{-a}^{a} x^2\left(\sin x + \sqrt{a^2-x^2}\right)dx = \frac{b\pi a^c}{d}$ trong đó a, b, c, d là các số nguyên dương và $\frac{b}{d}$ là phân số tối giản. Tính $b+c+d$?

A. 12 **B.** 13 **C.** 14 **D.** 15

Lời giải

Ta biến đổi tích phân ban đầu $I = \int_{-a}^{a} x^2\sin x dx + \int_{-a}^{a} x^2\sqrt{a^2-x^2}dx = K + J$

Dễ dàng nhận thấy 2 điều sau

- $(-x)^2\sin(-x) = -x^2\sin x, \forall x \in [-a,a] \Rightarrow x^2\sin x$ là hàm lẻ $\Rightarrow I = \int_{-a}^{a} x^2\sin x dx = 0$
- $(-x)^2\sqrt{a^2-(-x)^2} = x^2\sqrt{a^2-x^2}, \forall x \in [-a,a] \Rightarrow x^2\sqrt{a^2-x^2}$ là hàm chẵn

Đặt $x = a\sin t \Rightarrow I = K + J = J = \int_{-a}^{a} x^2\sqrt{a^2-x^2}dx = 2\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\sin t)^2\sqrt{a^2\left(1-\sin^2 t\right)}(a\cos t)dt = 2a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t\cos t)^2 dt$$

$$= \frac{a^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2t)^2 dt = \frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)dt = \frac{a^4}{4}\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^4}{8}$$

Chọn ý **B.**

Câu 20.

Tính tích phân $I = \int_{-1}^{1}\left[\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]^{2019}dx$?

A. 0 **B.** 2019 **C.** -1 **D.** -2019

Lời giải

Ta có $\left[\ln\left((-x)+\sqrt{1+(-x)^2}\right)\right]^{2019} = \left[\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\right]^{2019} = \left[\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\right)\right]^{2019}$

$$= \left[\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{-1}\right]^{2019} = (-1)^{2019}\left[\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]^{2019} = -\left[\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]^{2019}$$

$\Rightarrow \left[\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]^{2019}$ là hàm lẻ $\Rightarrow I = \int_{-1}^{1}\left[\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]^{2019}dx = 0$

Chọn ý **A.**

Câu 21.

Biết $\int\limits_0^{\pi}\frac{x\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}dx=\frac{\pi^a}{b}$ trong đó a, b là các số nguyên dương. Tính $P=2a+b$

A. $P=8$ **B.** $P=10$ **C.** $P=6$ **D.** $P=12$

Lời giải

Xét tích phân $I=\int\limits_0^{\pi}\frac{x\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}dx$.

- Đặt $x=\pi-t\Rightarrow dx=-dt$.
- Khi $x=0$ thì $t=\pi$.
- Khi $x=\pi$ thì $t=0$.

Ta có $I=-\int\limits_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)\sin^{2018}(\pi-t)}{\sin^{2018}(\pi-t)+\cos^{2018}(\pi-t)}dt=\int\limits_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}dx$

$$=\pi\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}dx-\int\limits_0^{\pi}\frac{x\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}dx=\pi\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}dx-I.$$

Suy ra $I=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}dx$.

Xét tích phân $J=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}dx$.

- Đặt $x=\frac{\pi}{2}-u\Rightarrow dx=-du$.
- Khi $x=\frac{\pi}{2}$ thì $u=0$.
- Khi $x=\pi$ thì $t=-\frac{\pi}{2}$.

Nên $J=-\int\limits_0^{-\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2018}\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}{\sin^{2018}\left(\frac{\pi}{2}-u\right)+\cos^{2018}\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}du=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}dx$.

Vì hàm số $f(x)=\frac{\cos^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}$ là hàm số chẵn nên:

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}dx$$

Từ đó ta có:

$$I=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}dx=\frac{\pi}{2}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}dx+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}dx\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}dx\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi^2}{4}.$$

Như vậy $a=2$, $b=4$. Do đó $P=2a+b=2.2+4=8$.

Ngoài cách làm này các bạn có thể sử dụng các tính chất của phần tính tích phân bằng phương pháp đổi cận đổi biến.

Chọn ý **A.**

Câu 22.

Biết $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}dx=a+\frac{\pi^2}{b}+\frac{\sqrt{3}\pi}{c}$ với a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $P=a-b+c$.

A. $P=-37$. **B.** $P=-35$. **C.** $P=35$. **D.** $P=41$.

Lời giải

Ta có $I=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}dx=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}x\cos x\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)dx=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}x\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\cos x dx.$

Mặt khác $I=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}dx\overset{x=-t}{=}\int_{\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{6}}\frac{(-t)\cos(-t)}{\sqrt{1+(-t)^2}-t}d(-t)=\int_{\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{6}}\frac{t\cos t}{\sqrt{1+t^2}-t}dt$

$$=-\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}t\left(\sqrt{1+t^2}+t\right)\cos t dt=-\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}x\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)\cos x dx.$$

$$\Rightarrow 2I=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}x\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\cos x dx-\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}x\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)\cos x dx$$

$$=-2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}x^2\cos x dx\Rightarrow I=-\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}x^2\cos x dx$$

Tích phân từng phần hai lần ta được $I=2+\frac{\pi^2}{-36}+\frac{\sqrt{3}\pi}{-3}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=-36\Rightarrow P=a-b+c=35\\c=-3\end{cases}$

Chọn ý **C.**

Câu 23.

Cho $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\sin^2 x+\cos^4 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_a^b \frac{dx}{x^4-x^2+1}$, $a,b\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng

A. $a+b=0$ **B.** $a+b=1$ **C.** $\frac{a}{b}=\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{a}{b}=1$

Lời giải

Đặt $t=\pi-x\Rightarrow dt=-dx\Rightarrow I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\sin^2 x+\cos^4 x}dx=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{\sin^2(\pi-t)+\cos^4(\pi-t)}.(-dt)$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{(\pi-t)\sin t}{\sin^2 t+\cos^4 t}dt=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{(\pi-x)\sin x}{\sin^2 x+\cos^4 x}dx$$

$$\Rightarrow 2I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\pi\sin x}{\sin^2 x+\cos^4 x}dx\Rightarrow I=\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin x}{\sin^2 x+\cos^4 x}dx$$

$$\Rightarrow I=\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{-d(\cos x)}{1-\cos^2 x+\cos^4 x}=\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{du}{u^4-u^2+1}\Rightarrow a=-\frac{1}{2},b=\frac{1}{2}\Rightarrow a+b=0$$

Chọn ý **A.**

Câu 24.

Cho $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\left(\frac{a+\sin x}{a+\cos x}\right)}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx,\ a>1$. Tính I theo a

A. $I=\sqrt{a}-1$ **B.** $I=a^4-1$ **C.** $I=0$ **D.** $I=a$

Lời giải

Đặt $t=\frac{\pi}{2}-x\Rightarrow dt=-dx\Rightarrow I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\ln\left(\frac{a+\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{a+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}\right)}{\sin^4\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\cos^4\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}.(-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\left(\frac{a+\cos x}{a+\sin x}\right)}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$

$$\Rightarrow 2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\left(\frac{a+\sin x}{a+\cos x}\right)+\ln\left(\frac{a+\cos x}{a+\sin x}\right)}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\left(\frac{a+\sin x}{a+\cos x}.\frac{a+\cos x}{a+\sin x}\right)}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx=0\Rightarrow I=0$$

Chọn ý **C.**

Câu 25.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $af(b)+bf(a)=1$ với mọi $a,\ b\in[0;1]$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$.

A. $I=\frac{1}{2}$. **B.** $I=\frac{1}{4}$. **C.** $I=\frac{\pi}{2}$. **D.** $I=\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Đặt $a=\sin x,\ b=\cos x$ với $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow \sin x.f(\cos x)+\cos x.f(\sin x)=1$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x f(\cos x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}\ (1)$$

Ta có $\begin{cases} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x.f(\cos x)dx = -\int\limits_1^0 f(t)dt(t=\cos x) = \int\limits_0^1 f(x)dx \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x.f(\sin x)dx = \int\limits_0^1 f(t)dt(t=\sin x) = \int\limits_0^1 f(x)dx \end{cases}$

Do đó $(1) \Leftrightarrow \int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{\pi}{4}$.

Chọn ý **D.**

Câu 26.

Giả sử tồn tại 2 hàm số $f(x)$ và $g(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$\sqrt{f(x)}.f'(x) = \cos^2 x.g(\sin x) + \sin^2 x.g(\cos x).$$

Biết $\int_0^1 g(x).\sqrt{1-x^2}dx = a; f(0)=0$. Tính $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ theo a.

A. $3a$ **B.** $\sqrt[3]{9a^2}$ **C.** $\sqrt{27a^3}$ **D.** $9a$

Lời giải

Xét $a = \int_0^1 g(x).\sqrt{1-x^2}dx$. Đặt $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos tdt$

$$\Rightarrow a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\sin t).\sqrt{1-\sin^2 t}.\cos tdt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\sin t).\cos^2 tdt$$

Tương tự đặt $x = \cos t \Rightarrow dx = -\sin tdt$

$$\Rightarrow a = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 g(\cos t)\sqrt{1-\cos^2 t}.(-\sin tdt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\cos t)\sin^2 tdt$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\text{sint})\cos^2 tdt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\text{cost})\sin^2 tdt = 2a \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{f(x)}.f'(x)dx = 2a$$

$$\Rightarrow \left.\frac{f(x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2a \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{2}}.\frac{2}{3} = 2a \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = (3a)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{9a^2}$$

Chọn ý **B.**

Câu 27.

Cho $2f\left((x-1)^2\right) + 3f\left((x+2)(x-4)\right) = \sqrt{3x^2-6x+9}+1$. Tính $\int_4^5 f(x)dx$

A. $\frac{2}{15}\left(7\sqrt{21}+6\sqrt{18}\right)+\frac{1}{5}$ **B.** $\frac{2}{45}\left(7\sqrt{21}+6\sqrt{18}\right)+\frac{1}{5}$

C. $\frac{2}{15}\left(7\sqrt{21}-6\sqrt{18}\right)+\frac{1}{5}$ **D.** $\frac{2}{45}\left(7\sqrt{21}-6\sqrt{18}\right)+\frac{1}{5}$

Lời giải

Ta có $2f\left((x-1)^2\right) + 3f\left((x+2)(x-4)\right) = \sqrt{3x^2-6x+9}+1$

$$\Rightarrow 2f\left(\left(x-1\right)^2\right)+3f\left(9-\left(x-1\right)^2\right)=\sqrt{3\left(x-1\right)^2+6}+1$$

Đặt $y=\left(x-1\right)^2 \Rightarrow 2f\left(y\right)+3f\left(9-y\right)=\sqrt{3y+6}+1$

Ta có $\int_4^5 f\left(y\right)dy=\int_4^5 f\left(9-y\right)dy \Rightarrow 5\int_4^5 f\left(y\right)dy=\int_4^5\left(\sqrt{3y+6}+1\right)dy$

$$\Rightarrow \int_4^5 f\left(x\right)dx=\frac{1}{5}.\left.\left(\frac{\left(3y+6\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}.\frac{1}{3}+y\right)\right|_4^5=\frac{1}{5}.\left(\frac{2}{9}\left(\sqrt{21^3}-\sqrt{18^3}\right)+1\right)=\frac{2}{15}\left(7\sqrt{21}-6\sqrt{18}\right)+\frac{1}{5}$$

Chọn ý **C.**

Câu 28.

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\left[0;3\right]$, thỏa mãn $\begin{cases} f\left(3-x\right).f\left(x\right)=1 \\ f\left(x\right)\neq -1 \end{cases}$ với mọi $x\in\left[0;3\right]$ và $f\left(0\right)=\frac{1}{2}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^3 \frac{xf'\left(x\right)}{\left[1+f\left(3-x\right)\right]^2.f^2\left(x\right)}dx.$

A. $I=\frac{1}{2}.$ **B.** $I=1.$ **C.** $I=\frac{3}{2}.$ **D.** $I=\frac{5}{2}.$

Lời giải

Từ giả thiết $\begin{cases} f\left(3-x\right).f\left(x\right)=1 \\ f\left(0\right)=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow f\left(3\right)=2$

Ta có $\left[1+f\left(3-x\right)\right]^2.f^2\left(x\right)=\left[1+f\left(x\right)\right]^2\left(f\left(3-x\right).f\left(x\right)=1\right)$

- Tính $I=\int\limits_0^3 \frac{xf'\left(x\right)}{\left[1+f\left(x\right)\right]^2}dx=-\int\limits_0^3 xd\left(\frac{1}{1+f\left(x\right)}\right)=-\left.\frac{x}{1+f\left(x\right)}\right|_0^3+\int\limits_0^3\frac{1}{1+f\left(x\right)}dx=-1+J$
- Tính $J=\int\limits_0^3\frac{1}{1+f\left(x\right)}dx\overset{t=3-x}{=}-\int\limits_3^0\frac{1}{1+f\left(3-t\right)}dt=\int\limits_0^3\frac{1}{1+f\left(3-t\right)}dt=\int\limits_0^3\frac{1}{1+f\left(3-x\right)}dx$

$$\Rightarrow 2J=\int\limits_0^3\frac{1}{1+f\left(x\right)}dx+\int\limits_0^3\frac{1}{1+f\left(3-x\right)}dx=\int\limits_0^3 dx\left(f\left(3-x\right).f\left(x\right)=1\right)=3\Rightarrow J=\frac{3}{2}$$

Vậy $I=\int\limits_0^3\frac{xf'\left(x\right)}{\left[1+f\left(3-x\right)\right]^2.f^2\left(x\right)}dx=\frac{1}{2}$

Chọn ý **A.**

Câu 29.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và thỏa mãn $\begin{cases} f(x)+f(1-x)=x^3-x^2 \\ f(x-1)+f(1-x)=x(1-x) \end{cases}$. Tính giá trị của biểu thức tích phân $I=\int_{-1}^{0} f(x)dx$.

A. $I=-2$. **B.** $I=\frac{2}{3}$. **C.** $I=-\frac{2}{14}$. **D.** $I=-\frac{7}{24}$.

Lời giải

Tích phân 2 vế ta được $\begin{cases} \int_0^1 [f(x)+f(1-x)]dx=\int_0^1 (x^3-x^2)dx \\ \int_{-1}^{1} [f(x-1)+f(1-x)]dx=\int_{-1}^{1} x(1-x)dx \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 f(1-x)d(1-x)=\int_0^1 (x^3-x^2)dx \\ \int_{-1}^{1} f(x-1)d(x-1)-\int_{-1}^{1} f(1-x)d(1-x)=\int_{-1}^{1} x(1-x)dx \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 f(x)d(x)=-\frac{1}{12} \\ \int_{-1}^{1} f(x-1)d(x-1)+\int_{-1}^{1} f(x-1)d(x-1)=-\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_0^1 f(x)dx=-\frac{1}{24} \\ \int_{-1}^{1} f(x-1)d(x-1)=-\frac{1}{3} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_0^1 f(1-x)dx=-\frac{1}{24} \\ \int_{-1}^{1} f(1-x)dx=-\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \int_{-1}^{0} f(1-x)dx=-\frac{7}{24} \Rightarrow \int_{1}^{2} f(x)dx=-\frac{7}{24}.$$

Chọn ý **D.**

Câu 30.

Cho hàm số $f(x)$ và hằng số a thỏa mãn $f(-x)=\frac{-1}{2}f(x)(e^x+1)+e^x$. Tính $I=\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{e^x+1}dx$?

A. $\ln\left|\frac{e^{-a}+1}{e^a+1}\right|$. **B.** $\ln\left|\frac{e^{a}+1}{e^{-a}+1}\right|$. **C.** $\ln\left|e^a\right|$ **D.** $\ln\left|e^{-a}\right|$

Lời giải

$$\text{Ta có } I=\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{e^x+1}dx=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a} f(x)dx.$$

$$\Rightarrow I=\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{e^x+1}dx=\int_{a}^{-a}\frac{f(-x)}{e^x+1}-dx=\int_{-a}^{a}\frac{\frac{-1}{2}f(x)(e^x+1)+e^x}{e^x+1}dx.$$

$$\Rightarrow 2I=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}f(x)dx+\int_{-a}^{a}\frac{\frac{-1}{2}f(x)\left(e^x+1\right)+e^x}{e^x+1}dx=\int_{-a}^{a}\frac{e^x}{e^x+1}dx.$$

Đặt $e^x=t$.

$$\Rightarrow e^x dx=dt\Rightarrow 2I=\int_{e^{-a}}^{e^a}\frac{dt}{t+1}=\int_{e^{-a}}^{e^a}\frac{d(t+1)}{t+1}=\ln|t+1|\Big|_{e^{-a}}^{e^a}=\ln\left|\frac{e^a+1}{e^{-a}+1}\right|.$$

Chọn ý **B.**

Câu 31.

Cho hàm số $f(x)$ bậc 2 có cực trị tại $x=0$ và thỏa mãn điều kiện

$$\left(x^2-x\right).f(x+1)-f^2(x)=x^3-1.$$

Tính giá trị của tích phân $\int_{-2}^{2}f(x)dx$?

A. $I=\frac{4}{3}$. **B.** $I=\frac{2}{3}$. **C.** $I=\frac{1}{2}$. **D.** $I=\frac{5}{4}$.

Lời giải

Đạo hàm 2 vế $(2x-1)f(x+1)+f'(x+1)\left(x^2-x\right)-f'(x)2f(x)=3x^2$ (1)

Thay $x=0\Rightarrow f(1)=0$ (Do $f'(0)=0$ vì hàm số có cực trị tại $x=0$)

Hàm số có dạng $y=ax^2+bx+c$ với $x=0$ là cực trị nên $2ax+b=0\Rightarrow b=0$

Mà $f(1)=0$ nên $a+b+c=0$ $\Rightarrow a+c=0$

Thay $x=-1$ vào (1) thì $f(0)=-1$ (do hàm số có dạng ax^2+c nên $f(1)=f(-1)$)

$$\Rightarrow c=-1;a=1\Rightarrow f(x)=x^2-1\Rightarrow\int_{-2}^{2}f(x)dx=\int_{-2}^{2}\left(x^2-1\right)dx=\frac{4}{3}.$$

Chọn ý **A.**

Câu 32.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$(6x+5)f\left(3x^2+5x+3\right)=f\left(4x^2+9\right).8x+2xf\left(x^2+5\right)+x^2-6x$$

Tính giá trị của tích phân $\int_{3}^{5}f(x)dx$?

A. $I=-\frac{3}{2}$. **B.** $I=\frac{-28}{3}$. **C.** $I=\frac{27}{2}$. **D.** $I=\frac{5}{4}$.

Lời giải

Tích phân 2 vế lấy cận từ 0 đến 2 ta có $\int_{0}^{2}f\left(3x^2+5x+3\right)dx=\int_{0}^{2}f\left(4x^2+9\right)dx+\int_{0}^{2}f\left(x^2+5\right)$.

$$\Rightarrow\int_{3}^{25}f(t)\frac{dt}{6x+5}.(6x+5)=\int_{9}^{25}f(m)\frac{dm}{8x}.8x+\int_{5}^{9}f(n)\frac{dn}{2x}.2x.$$

TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC

$$\Rightarrow \int_3^{25} f(t)dt = \int_9^{25} f(m)dm + \int_5^{9} f(n)dn + \int_0^{2}\left(x^2-6x\right)dx$$

$$\Rightarrow \int_3^{25} f(x)dx = \int_9^{25} f(x)dx + \int_5^{9} f(x)dx + \int_0^{2}\left(x^2-6x\right)dx$$

$$\Rightarrow \int_3^{5} f(x)dx = \int_0^{2}\left(x^2-6x\right)dx = -\frac{28}{3}.$$

Chọn ý **B.**

Câu 33.

Cho hàm số thỏa mãn $f^3(x)+f(1-x)=-6x^2+8 \quad (*)$. Tính giá trị của tích phân $I=\int_0^1\left(f(x)-1\right)xdx$?

A. $I=\frac{1}{3}$. **B.** $I=\frac{-8}{3}$. **C.** $I=\frac{1}{2}$. **D.** $I=\frac{5}{4}$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} f^3(0)+f(1)=8 \\ f^3(1)+f(0)=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0)=2 \\ f(1)=0 \end{cases}$.

Lấy đạo hàm 2 vế của $(*)$ ta được $f'(x).3.f^2(x)dx+f'(1-x)dx=-12xdx$.

$$\Rightarrow \int_0^1\left(f(x)-1\right)xdx = -\frac{1}{12}\int_0^1\left(f(x)-1\right)\left(f'(x).3.f^2(x)dx+f'(1-x)\right)dx$$

$$=\frac{-1}{12}\left[\int_0^1 f'(x).3.f^3(x)dx - \int_0^1 f'(x).3.f^2(x)dx - \int_0^1 f'(1-x)dx + \int_0^1 f(x)f'(1-x)dx\right]$$

$$=-\left.\frac{f^4(x)}{16}\right|_0^1 + \left.\frac{f^3(x)}{12}\right|_0^1 + \frac{1}{12}f(x)\Big|_0^1 - \left.\frac{f^2(x)}{24}\right|_0^1 = 1-\frac{2}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}.$$

Chọn ý **A.**

Câu 34.

Cho hàm số thỏa mãn $f(x).f(a-x)=1 \quad (*)$ .Biết $I_n=\int_0^a \frac{e^n}{1+f(x)}dx$ .Tính giá trị của tổng $I_1+I_2+...+I_n$?

A. $2a.\frac{e^{n+1}-1}{e-1}$. **B.** $a.\frac{e^{n+1}-1}{e}$. **C.** $a.\frac{e^{n+1}-1}{e-1}$. **D.** $a.\frac{e^{n+1}-1}{2e-2}$.

Lời giải

Biến đổi giả thiết $I_n=\int_0^a \frac{e^n}{1+f(x)}dx=\int_a^0 \frac{e^n}{1+f(a-x)}-dx=e^n\int_0^a \frac{1}{1+\frac{1}{f(x)}}dx=e^n\int_0^a \frac{f(x)}{1+f(x)}dx$.

Ta có $\int_0^a \frac{1}{1+f(x)}dx+\int_0^a \frac{f(x)}{1+f(x)}dx=\int_0^a dx=a \Rightarrow= \int_0^a \frac{e^n}{1+f(x)}dx=\frac{a}{2}.e^n=I_n$.

Suy ra $I_1 + I_2 + ... + I_n = \frac{a}{2}\left(e + e^2 + ... + e^n\right) = a.\frac{e^{n+1} - 1}{2e - 2}$.

Chọn ý **D.**

Câu 35.

Cho hàm số thỏa mãn $f(x) + f(1-x) = x^2(1-x)\ \ (*)$. Tính giá trị của biểu thức tích phân $I = \int_0^1 f(x)\left(2xf'(x) - f(x) + 1\right)dx$

A. $\frac{1}{24}$. **B.** $\frac{25}{24}$. **C.** $\frac{5}{24}$. **D.** $\frac{8}{24}$.

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có $I = \int_0^1 f(x)\left(2xf'(x) + f(x) + 1\right)dx$

$$= \int_0^1 f(x).2xf'(x)dx + \int_0^1 f^2(x)dx + \int_0^1 f(x)dx = J + \int_0^1 f^2(x)dx + \int_0^1 f(x)dx$$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f(x).f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{f^2(x)}{2} \end{cases} \Rightarrow J = 2.\left.\frac{x.f^2(x)}{2}\right|_0^1 - 2.\frac{1}{2}\int_0^1 f^2(x)dx = 1 - \int_0^1 f^2(x)dx$.

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) + f(1-x)dx = \int_0^1 x^2(1-x) \Rightarrow 2\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{12}.$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{24} \Rightarrow I = 1 + \frac{1}{24} = \frac{25}{24}.$$

Chọn ý **B.**

Câu 36.

Cho hàm số thỏa mãn $f(x) + f(1-x) = x(1-x)\ \ (*)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức tích phân $I = \int_0^1 f(x)xf'(x)dx$?

A. $\frac{143}{288}$. **B.** $\frac{1}{144}$. **C.** $\frac{126}{167}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f(x).f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{f^2(x)}{2} \end{cases} \Rightarrow I = \left.\frac{x.f^2(x)}{2}\right|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 f^2(x)dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 f^2(x)dx$.

Ta có $f(x) + f(1-x) = x(1-x) \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 f(1-x)dx = \int_0^1 x(1-x)dx = \frac{1}{6}$.

$$\Rightarrow 2\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{6} \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{12}.$$

Áp dụng tính chất $\left(\int_a^b f(x).g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx.\int_a^b g^2(x)dx$

$$\Rightarrow\left(\int_0^1 f(x).1dx\right)^2 \le \int_0^1 f^2(x)dx.\int_0^1 1dx \Rightarrow \int_0^1 f^2(x)dx \ge \left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 = \frac{1}{144}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $f(x)=k \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 kdx = \frac{1}{12} \Rightarrow k = \frac{1}{12} = f(x) \Rightarrow I \le \frac{143}{288}$

Chọn ý **A.**

Nhận xét. *Bất đẳng thức tích phân các bạn tìm hiểu ở phần sau nhé!*

Câu 37.

Cho hàm số thỏa mãn $f(x).f(a-x)=9^x$ $(*)$. Tính giá trị của biểu thức tích phân $I=\int_0^a \frac{3^{2x}}{3^x+f(x)}dx$?

A. $\frac{3^a-1}{2}$. **B.** $\frac{3^a}{\ln 3}$. **C.** $\frac{3^a}{2.\ln 3}$. **D.** $\frac{3^a-1}{2.\ln 3}$.

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có $I=\int_0^a \frac{3^{2x}}{3^x+f(x)}dx = \int_a^0 \frac{3^{2x}}{3^x+f(a-x)} - dx = \int_0^a \frac{3^{2x}}{3^x+\frac{9^x}{f(x)}}dx$.

$$=\int_0^a \frac{3^{2x}.f(x)}{3^x\left(f(x)+3^x\right)}dx = \int_0^a \frac{3^x.f(x)}{f(x)+3^x}dx \Rightarrow 2I = \int_0^a \frac{3^{2x}+3^x f(x)}{3^x+f(x)}dx = \int_0^a 3^x dx.$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_0^a 3^x dx = \frac{1}{2}.\frac{3^x}{\ln 3}\Big|_0^a = \frac{3^a-1}{2.\ln 3}.$$

Chọn ý **D.**

Câu 38.

Cho hàm số thỏa mãn $f(x).f(1-x)=e^{2x^2-2x}(*)$. Giá trị của biểu thức tích phân $\int_0^1 (2x-1)f(x)dx$?

A. e^6-1. **B.** e^3-1. **C.** e^2. **D.** e^3.

Lời giải

Đặt $f(x)=e^{ax^2+bx+c}$. $f(0)=1 \Rightarrow c=0$.

Thay $f(x)$ vào $(*) \Rightarrow e^{ax^2+bx}.e^{a(1-x)^2+b(1-x)} = e^{2x^2-2x} \Rightarrow e^{2ax^2-2ax+a+b} = e^{2x^2-2x}$.

Đồng nhất hệ số suy ra $\begin{cases}2a=2\\a+b=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases} \Rightarrow f(x)=e^{x^2-x}$.

$$\Rightarrow \int_0^3 (2x-1)f(x)dx = \int_0^3 (2x-1)e^{x^2-x}dx = \int_0^3 \left(e^{x^2-x}\right)'dx = e^{x^2-x}\Big|_0^3 = e^6-1.$$

Chọn ý **A.**

Câu 39.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 |f'(x)|dx = 1$, $f(0)=f(1)=0$. Khẳng định nào dưới đây là đúng ?

A. $|f(x)| \ge 1$. **B.** $|f(x)| \le 1$. **C.** $|f(x)| \ge \frac{1}{2}$. **D.** $|f(x)| \le \frac{1}{2}$.

Lời giải

Phân tích. *Bài toán có chút kiến thức về bất đẳng thức !*

Giả sử tồn tại điểm $a \in [0;1]$ sao cho $|f(a)| > \frac{1}{2}$.

Ta thấy $1 = \int_0^1 |f'(x)|dx = \int_0^a |f'(x)|dx + \int_a^1 |f'(x)|dx$ (1)

Ta có $\int_0^a |f'(x)|dx \ge \left|\int_0^a f'(x)dx\right| = |f(a) - f(0)| = |f(a)| > \frac{1}{2}$ (2)

$\int_0^1 |f'(x)|dx \ge \left|\int_0^1 f'(x)dx\right| = |f(1) - f(a)| = |f(a)| > \frac{1}{2}$. (3)

Từ $(1),(2),(3) \Rightarrow 1 > 1$ mâu thuẫn nên điều giả sử là sai.

Chọn ý **D.**

Câu 40.

Cho hàm số $f(x)$ trên tập R thỏa mãn $\begin{cases} f(-x) = -f(x) \\ f(x+1) = f(x) + 1 \\ f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^2} \end{cases}$. Tính $I = \int_0^1 f(x)^{2019} dx$.

A. $\frac{4}{1010}$. **B.** $\frac{1}{1010}$. **C.** $\frac{1}{2020}$ **D.** 0.

Lời giải

Phân tích. *Một bài toán mang màu sắc của phương trình hàm !*

Ta có $\begin{cases} f(-0) = -f(0) \\ f(0) = f(-1+1) = f(-1) + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(-1) = -1 \end{cases}$

Tại các điểm $x \ne \{-1;0\}$ ta xét như sau $f\left(\frac{x+1}{x}\right) = f\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 + f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{f(x)}{x^2}$.

$$f\left(\frac{x+1}{x}\right) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 .f\left(\frac{x}{x+1}\right) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 .f\left(1 - \frac{1}{x+1}\right) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 \left[1 - f\left(\frac{1}{x+1}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 \left[1 - \frac{1}{(x+1)^2} f(x+1)\right] = \frac{1}{x^2}\left[(x+1)^2 - f(x) - 1\right].$$

Từ $(*),(**)$ ta được $f(x) + x^2 = x^2 + 2x - f(x) \Rightarrow f(x) = x$.

$$\Rightarrow I = \int_0^1 f(x)^{2019}\,dx = \int_0^1 x^{2019}dx = \left.\frac{x^{2020}}{2020}\right|_0^1 = \frac{1}{2020}.$$

Chọn ý **C.**

Câu 41.

Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\begin{cases} f(x)+2f(-(x+3)) = x^2+x+1 \\ 2f(x)+3f(x+4) = x^2-x+1 \end{cases}$. Tính giá trị của tích phân $\int_0^1 f(x)dx$

A. $\frac{17}{6}$ **B.** $\frac{5}{3}$ **C.** $\frac{13}{10}$ **D.** $\frac{12}{7}$

Lời giải

Từ giả thiết ta biến đổi được $\begin{cases} 2f(x)+4f(-(x+3)) = 2(x^2+x+1) \\ 2f(x)+3f(x+4) = x^2-x+1 \end{cases}$

$$\Rightarrow 3f(x+4)+4f(-(x+3)) = (x^2-x+1)-2(x^2+x+1) = -x^2-3x-1$$

Đặt $x+4=y \Rightarrow 3f(y)-4f(1-y) = -(y-4)^2-3(y-4)-1 = -y^2+5y-5$

$$\Rightarrow 3\int_0^1 f(y)dy - 4\int_0^1 f(1-y)dy = \int_0^1(-y^2+5y-5)dy$$

$$\Rightarrow -\int_0^1 f(y)dy = \left.\left(-\frac{y^3}{3}+\frac{5y^2}{2}-5y\right)\right|_0^1 = -\frac{17}{6} \Rightarrow \int_0^1 f(y)dy = \frac{17}{6}$$

Chọn ý **A.**

Câu 42.

Cho $I = \int_0^\pi \frac{a\cos x}{b+c\sin x}dx, b\neq 0, b+c\neq 0$. Giá trị của a,b,c để $I=0$ là

A. $a=b=c=1$ **B.** $\forall a,b,c$ **C.** $b=1; a,c$ tùy ý **D.** Không có giá trị nào của a,b,c

Lời giải

Ta sẽ đi CM $\forall a,b,c$ đều thỏa mãn $I=0$

Đặt $x=2t \Rightarrow dx = 2dt \Rightarrow I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\cos 2t}{b+c\sin 2t}dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a(\cos^2 t - \sin^2 t)}{b+2c\sin t.\cos t}dt$

Xét $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\cos^2 t}{b+2c\sin t.\cos t}dt$. Đặt $u = \frac{\pi}{2}-t \Rightarrow du = -dt$

$$\Rightarrow J = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{a\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}{b+2c\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}.(-du) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\cos^2 u}{b+2c\sin u.\cos u}du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\cos^2 t}{b+2c\sin t.\cos t}dt$$

$$\Rightarrow I = J - J = 0\ \forall a,b,c \text{ thỏa mãn } b\neq 0, b+c\neq 0$$

Chọn ý **B.**

Câu 43.

Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{(\sin x+e)^{2\cos x+1}}{(\cos x+e)^{\sin x+1}} dx = a(e+1)\ln(e+1)+be+c, a,b,c\in\mathbb{R}$. Tính $a+b+c$

A. 0 **B.** 1 **C.** –1 **D.** 2

Lời giải

Đặt $t=\frac{\pi}{2}-x \Rightarrow dx=-dt$

$$\Rightarrow I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln \frac{\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+e\right)^{2\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+1}}{\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+e\right)^{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+1}}(-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{(\cos t+e)^{2\sin t+1}}{(\sin t+e)^{\cos t+1}}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{(\cos x+e)^{2\sin x+1}}{(\sin x+e)^{\cos x+1}}dx$$

$$\Rightarrow 2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{(\sin x+e)^{2\cos x+1}}{(\cos x+e)^{\sin x+1}}.\frac{(\cos x+e)^{2\sin x+1}}{(\sin x+e)^{\cos x+1}}\right)dx=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x+e)\cos x dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x+e)\sin x dx=J+K$$

Xét $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x+e)d(\sin x)=\int_0^1 \ln(u+e)du$

$$=\left((u+e)\ln(u+e)-(u+e)\right)\Big|_0^1=(e+1)\left(\ln(e+1)-1\right)$$

$$K=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x+e)d(\cos x)=\int_0^1 \ln(u+e)du=(e+1)\left(\ln(e+1)-1\right)$$

$$\Rightarrow 2I=J+K=2(e+1)\left(\ln(e+1)-1\right)\Rightarrow I=(e+1)\left(\ln(e+1)-1\right)$$

$$\Rightarrow a=1, b=-1, c=-1\Rightarrow a+b+c=-1$$

Chọn ý **C.**

Câu 44.

Cho $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{\sin^2 x+3}dx=\frac{\pi\ln a}{b}; a,b\in\mathbb{R}$. Giá trị của ab là

A. 30 **B.** 6 **C.** 20 **D.** 12

Lời giải

Đặt $x=\pi-t\Rightarrow dx=-dt$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{\sin^2 x+3}dx=\int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{\sin^2(\pi-t)+3}.(-dt)=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-t)\sin t}{\sin^2 t+3}dt=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin x}{\sin^2 x+3}dx$$

$$\Rightarrow 2I=\int_0^{\pi}\frac{\pi\sin x}{\sin^2 x+3}dx\Rightarrow I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\sin^2 x+3}dx$$

Xét $\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\sin^2 x+3}dx=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{4-\cos^2 x}dx=\frac{1}{4}\left(\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{2-\cos x}dx+\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{2+\cos x}dx\right)$

$$=\frac{1}{4}\left(\ln|\cos x-2|-\ln|\cos x+2|\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{\ln 3}{2}\Rightarrow I=\frac{\pi\ln 3}{4}\Rightarrow a=3, b=4\Rightarrow ab=12$$

Chọn ý **D.**

Câu 45.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$3f(x)+f(2-x)=2(x-1)e^{x^2-2x+1}+4.$$

Tính tích phân $I=\int_0^2 f(x)dx$ ta được kết quả là?

A. $I=e+4$ **B.** $I=8$ **C.** $I=2$ **D.** $I=e+2$

Lời giải

Theo giả thuyết ta có $\int_0^2\left[3f(x)+f(2-x)\right]dx=\int_0^2\left[2(x-1)e^{x^2-2x+1}+4\right]dx$ $(*)$.

Ta tính $\int_0^2 f(2-x)dx=-\int_0^2 f(2-x)d(2-x)=\int_0^2 f(x)dx$.

Vì vậy $\int_0^2\left[3f(x)+f(2-x)\right]dx=4\int_0^2 f(x)dx$.

Hơn nữa $\int_0^2 2(x-1)e^{x^2-2x+1}dx=\int_0^2 e^{x^2-2x+1}d\left(x^2-2x+1\right)=e^{x^2-2x+1}\Big|_0^2=0$ và $\int_0^2 4dx=8$.

Chọn ý **B.**

Câu 46.

Giả sử tồn tại $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $(1-x)^2 f(x)+x^2f(1-x)=1$. Tính giá trị của tích phân $I=\int_0^1\frac{(1-x)^2 f(x)}{2x^2-2x+1}dx$

A. 1 **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{\pi}{4}$ **D.** π

Lời giải

Đặt $x=1-t\Rightarrow dx=-dt$

$$\Rightarrow I=\int_1^0\frac{t^2f(1-t)}{2(1-t)^2-2(1-t)+1}.(-dt)=\int_0^1\frac{t^2f(1-t)}{2t^2-2t+1}dt=\int_0^1\frac{x^2f(1-x)}{2x^2-2x+1}dx$$

$$\Rightarrow 2I=\int_0^1\frac{(1-x)^2 f(x)}{2x^2-2x+1}dx+\int_0^1\frac{x^2f(1-x)}{2x^2-2x+1}dx=\int_0^1\frac{1}{2x^2-2x+1}dx$$

$$\Rightarrow I=\int_0^1\frac{dx}{4x^2-4x+2}=\int_0^1\frac{dx}{(2x-1)^2+1}$$

Đặt $2x-1=\tan t\Rightarrow 2dx=\frac{dt}{\cos^2 t}\Rightarrow I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2 t+1}.\frac{dt}{2\cos^2 t}=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{2}=\frac{\pi}{4}$

Chọn ý **C.**

Câu 47.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f^3(x)+f(x)=x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tính giá trị của biểu thức $I=\int_0^2 f(x)dx$.

A. $I=-\frac{4}{5}$. **B.** $I=\frac{4}{5}$. **C.** $I=-\frac{5}{4}$. **D.** $I=\frac{5}{4}$.

Lời giải

Đặt $u=f(x)$, ta thu được $u^3+u=x$. Suy ra $(3u^2+1)du=dx$.

Từ $u^3+u=x$, ta đổi cận $\begin{cases} x=0\to u=0 \\ x=2\to u=1 \end{cases}$. Khi đó $I=\int_0^1 u(3u^2+1)du=\frac{5}{4}$.

***Cách* 2.** Nếu bài toán cho $f(x)$ có đạo hàm liên tục thì ta làm như sau:

Từ giả thiết $f^3(x)+f(x)=x\Rightarrow\begin{cases} f^3(0)+f(0)=0 \\ f^3(2)+f(2)=2 \end{cases}\to\begin{cases} f(0)=0 \\ f(2)=1 \end{cases}$

Cũng từ giả thiết $f^3(x)+f(x)=x$, ta có $f'(x).f^3(x)+f'(x).f(x)=x.f'(x)$.

Lấy tích phân hai vế $\int_0^2\left[f'(x).f^3(x)+f'(x).f(x)\right]dx=\int_0^2 x.f'(x)dx$

$$\Rightarrow\left(\frac{\left[f(x)\right]^4}{4}+\frac{\left[f(x)\right]^2}{2}\right)\Bigg|_0^2=xf(x)\Big|_0^2-\int_0^2 f(x)dx\Rightarrow\int_0^2 f(x)dx=\frac{5}{4}$$

Chọn ý **D.**

Câu 48.

Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f'(x)=f'(1-x)$ với mọi $x\in[0;1]$. Biết rằng $f(0)=1$, $f(1)=41$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$.

A. $I=\sqrt{41}$. **B.** $I=21$. **C.** $I=41$. **D.** $I=42$.

Lời giải

Ta có $f'(x)=f'(1-x)\Rightarrow f(x)=-f(1-x)+C\Rightarrow f(0)=-f(1)+C\Rightarrow C=42$

$$\Rightarrow f(x)=-f(1-x)+42\Rightarrow f(x)+f(1-x)=42\Rightarrow\int_0^1\left[f(x)+f(1-x)\right]dx=\int_0^1 42dx=42\ (1)$$

Vì $f'(x)=f'(1-x)\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(1-x)dx.\ (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(1-x)dx=21$.

Chọn ý **B.**

Câu 49.

Cho các hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $[0;1]$, thỏa $m.f(x)+n.f(1-x)=g(x)$ với m, n là số thực khác 0 và $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 g(x)dx=1$. Tính $m+n$.

A. $m+n=0$. **B.** $m+n=\frac{1}{2}$. **C.** $m+n=1$. **D.** $m+n=2$.

Lời giải

Từ giả thiết $m.f(x)+n.f(1-x)=g(x)$, lấy tích phân hai vế ta được :

Do $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 g(x)dx=1 \Rightarrow \int_0^1\left[m.f(x)+n.f(1-x)\right]dx=\int_0^1 g(x)dx \Rightarrow m+n\int_0^1 f(1-x)dx=1(1)$

Xét tích phân $\int_0^1 f(1-x)dx$. Đặt $t=1-x$, suy ra $dt=-dx$. Đổi cận: $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=1 \\ x=1\Rightarrow t=0 \end{cases}$

Khi đó $\int_0^1 f(1-x)dx=-\int_1^0 f(t)dt=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1 f(x)dx=1.\ (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $m+n=1$.

Chọn ý **C.**

Câu 50.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.\cos x, \forall x\in\mathbb{R}, \text{ và } f(0)=0.$$

Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x.f'(x)dx$ bằng

A. $-\frac{\pi}{4}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{\pi}{4}$ **D.** $-\frac{1}{4}$

Lời giải

Theo giả thiết, $f(0)=0$ và $f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.\cos x$ nên $f(0)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

Ta có: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x.f'(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} xd\left[f(x)\right]=\left[xf(x)\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \Rightarrow I=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

Mặt khác, ta có:

$$f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.\cos x \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.\cos x dx=\frac{1}{2}$$

Suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\frac{1}{4}$

Vậy $I=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=-\frac{1}{4}$.

Câu 51.

Giả sử tồn tại $f(x)$ thỏa mãn $f(x).f(-x)=1$. Tính $P_n=\sum_{k=1}^{n}\int_{-k}^{k}\frac{dx}{1+f(x)}$

A. n **B.** $\frac{n(n+1)}{2}$ **C.** $n(n+1)$ **D.** $n+1$

Lời giải

Xét $I_k=\int_{-k}^{k}\frac{dx}{1+f(x)}$. Đặt $t=-x\Rightarrow dt=-dx$

$$\Rightarrow I_k=\int_{k}^{-k}\frac{-dt}{1+f(-t)}=\int_{-k}^{k}\frac{dt}{1+f(-t)}=\int_{-k}^{k}\frac{dx}{1+f(-x)}\Rightarrow 2I_k=\int_{-k}^{k}\left(\frac{1}{1+f(x)}+\frac{1}{1+f(-x)}\right)dx$$

$$=\int_{-k}^{k}\frac{f(x)+1+f(-x)+1}{(f(x)+1)(f(-x)+1)}dx=\int_{-k}^{k}\frac{f(x)+f(-x)+2}{f(x)+f(-x)+2}dx=\int_{-k}^{k}dx=2k$$

$$\Rightarrow I_k=k\Rightarrow P_n=\sum_{k=1}^{n}I_k=\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Chọn ý **B.**

Câu 52.

Cho $f(x)$ thỏa mãn $(2019-x).f(x)+x.f(2019-x)=1$. Biết $f(1)=0$, tính giá trị của tích phân $I=\int_1^{2018}\ln x.f'(x)dx$

A. $\ln 2018$ **B.** $\ln 2019$ **C.** $\frac{2018}{2019}\ln 2018$ **D.** $\frac{2019}{2018}\ln 2019$

Lời giải

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=f'(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{dx}{x}\\ v=f(x)\end{cases}\Rightarrow I=f(x)\ln x\Big|_1^{2018}-\int_1^{2018}\frac{f(x)}{x}dx=f(2018)\ln 2018-K$

Thay $x=1$ và đề bài, có $2018.f(1)+f(2018)=1\Rightarrow f(2018)=1$

Xét $K=\int_1^{2018}\frac{f(x)}{x}dx=\int_1^{2018}\frac{f(2019-x)}{2019-x}dx$

$$\Rightarrow 2K=\int_1^{2018}\left(\frac{f(x)}{x}+\frac{f(2019-x)}{2019-x}\right)dx=\int_1^{2018}\frac{dx}{x(2019-x)}$$

$$\Rightarrow K=\frac{1}{4038}\int_1^{2018}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-2019}\right)dx=\frac{1}{4038}\ln\left|\frac{x}{x-2019}\right|\Bigg|_1^{2018}=\frac{\ln 2018}{2019}$$

$$\Rightarrow I=\ln 2018-\frac{\ln 2018}{2019}=\frac{2018}{2019}\ln 2018$$

Chọn ý **C.**

Câu 53.

Cho $f(x)$ là hàm chẵn. Biết $\frac{1}{n}\int_{n-1}^{n} f(x)dx = 1,\ \forall n \in \mathbb{R}$, tính $F_n = \int_{-n}^{n} \frac{f(x)}{2^x+1}dx$ theo n

A. n **B.** $n(n+1)$ **C.** $\frac{n(n+1)}{2}$ **D.** $2n$

Lời giải

Xét $F_n = \int_{-n}^{n}\frac{f(x)}{2^x+1}dx$. Đặt $x=-t \Rightarrow F_n = \int_{n}^{-n}\frac{f(-t)}{2^{-t}+1}.(-dt) = \int_{-n}^{n}\frac{2^t f(t)}{2^t+1}dt\int_{-n}^{n}\frac{2^x f(x)}{2^x+1}dx$

$$\Rightarrow 2F_n = \int_{-n}^{n} f(x)dx \Rightarrow F_n = \frac{1}{2}\int_{-n}^{n} f(x)dx = \int_{0}^{n} f(x)dx \qquad \text{(Vì } f(x) \text{ là hàm chẵn)}$$

$$\Rightarrow F_n = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + ... + \int_{n-1}^{n} f(x)dx = 1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Chọn ý **C.**

Câu 54.

Cho $f(x)$ thỏa mãn $f(x) = f(x+4)$. Biết $f(4) = a; \int_0^4 f(x)dx = b$. Tính giá trị của biểu thức $P = \int_0^4 xf'(x)dx + \int_0^{4^2} xf'(x)dx + \int_0^{4^3} xf'(x)dx + ... + \int_0^{4^{2019}} xf'(x)dx$ theo a và b?

A. $4^{2019}.(a-b)$ **B.** $4^{2019}.(4a-b)$ **C.** $(4^{2019}-1)(4a-b)$ **D.** $\frac{4^{2019}-1}{3}.(4a-b)$

Lời giải

Ta có $f(x) = f(x+4) \Rightarrow f(4) = f(4^2) = f(4^3) = ... = f(4^{2019}) = a$

Xét dạng TQ $I_n = \int_0^{4^n} x.f'(x)dx$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$

$$\Rightarrow I_n = xf(x)\Big|_0^{4^n} - \int_0^{4^n} f(x)dx = 4^n.f(4^n) - 4^{n-1}\int_0^4 f(x)dx = 4^n.a - 4^{n-1}.b$$

(Vì $f(x)$ tuần hoàn chu kì 4)

$$\Rightarrow P = I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_{2019} = a.(4+4^2+4^3...+4^{2019}) - b.(1+4+4^2+...+4^{2018})$$

$$= (4a-b)(1+4+4^2+...+4^{2018}) = \frac{4^{2019}-1}{3}.(4a-b)$$

Chọn ý **D.**

Câu 55.

Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4\cos 2x + 3\sin 2x)\ln(\cos x + 2\sin x)dx = c\ln 2 - \frac{a}{b}$, trong đó $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $T = a+b+c$.

A. $T=9$ **B.** $T=-11$ **C.** $T=5$ **D.** $T=7$

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(4\cos 2x + 3\sin 2x)\ln(\cos x + 2\sin x)dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(\cos x + 2\sin x)(2\cos x - \sin x)\ln(\cos x + 2\sin x)dx.$$

Đặt $t = \cos x + 2\sin x \Rightarrow dt = (-\sin x + 2\cos x)dx$.

- Với $x = 0$ thì $t = 1$.
- Với $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 2$.

Suy ra $I = \int_1^2 2t\ln t dt = \int_1^2 \ln t d(t^2) = (t^2.\ln t)\Big|_1^2 - \int_1^2 t dt = 4\ln 2 - \frac{t^2}{2}\Big|_1^2 = 4\ln 2 - \frac{3}{2}$.

Vậy $\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow T = a + b + c = 9$.

Chọn ý **A.**

Câu 56.

Tính giá trị của tích phân $\int_{-2^{2019}\pi}^{2^{2019}\pi} (\cos 2x - \cos^2 2x)dx$.

A. $2^{2019}\pi$ **B.** $-\pi$ **C.** π **D.** $-2^{2019}\pi$

Lời giải

Nhận thấy hàm số $\cos 2x - \cos^2 2x$ là hàm chẵn, tuần hoàn chu kì π, nên ta biến đổi về tích phân gọn hơn như sau

$$I = 2\int_0^{2^{2019}\pi} (\cos 2x - \cos^2 2x)dx = 2.2^{2019}\int_0^{\pi} (\cos 2x - \cos^2 2x)dx = 2^{2020}.J$$

Xét $J = \int_0^{\pi} \cos 2x dx - \int_0^{\pi} \cos^2 2x dx = \frac{\sin 2x}{2}\Big|_0^{\pi} - \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sin 4x}{8}\right)\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2}\pi \Rightarrow I = -2^{2019}\pi$

Chọn ý **D.**

Câu 57.

Cho $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x)dx = \frac{\pi \ln a}{b}$ với a là số nguyên tố và b nguyên dương. Giá trị biểu thức $a + b$ bằng

A. 10 **B.** 6 **C.** 11 **D.** 7

Lời giải

Đặt $t = \frac{\pi}{4} - x \Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x)dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln\left(1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\right).(-dt)$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \frac{1 - \tan t}{1 + \tan t}\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{2}{1 + \tan t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{2}{1 + \tan x}dx$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{2}{1 + \tan x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2dx = \frac{\pi \ln 2}{4}$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi \ln 2}{8} \Rightarrow a = 2, b = 8 \Rightarrow a + b = 10$$

Chọn ý **A.**

Câu 58.

Cho tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left[\frac{(2018+\cos x)^{1+\cos x}}{2018+\sin x}\right]dx=a\ln a-b\ln b-1$ với a,b là các số nguyên dương. Giá trị của $a+b$ bằng?

A. 2015 **B.** 4030 **C.** 4037 **D.** 2025

Lời giải

Sử dụng tính chất $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$, ta có

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left[\frac{(2018+\cos x)^{1+\cos x}}{2018+\sin x}\right]dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left[\frac{(2018+\sin x)^{1+\sin x}}{2018+\cos x}\right]dx$$

$$\Rightarrow 2I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left[(2018+\cos x)^{\cos x}(2018+\sin x)^{\sin x}\right]dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\ln(2018+\cos x)dx$$

$$=\int_0^1\ln(2018+x)dx=2019\ln 2019-2018\ln 2018-1$$

Chọn ý **C.**

Câu 59.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f^3(x^2)+f(x^2)=2x^2+9$. Tính giá trị của tích phân $I=\int_1^{\sqrt{6}}xf^2(x^2)dx$?

A. $I=\frac{82}{15}$ **B.** $I=\frac{85}{12}$ **C.** $I=\frac{18}{52}$ **D.** $I=7$

Lời giải

Lấy vi phân 2 vế giả thiết ta có

$$d(2x^2+9)=4xdx=\left[6xf'(x^2)f^2(x^2)+2xf'(x)\right]dx$$

$$=2xf'(x^2)\left[3f^2(x^2)+1\right]dx\Rightarrow dx=\frac{f'(x^2)(3f^2(x^2)+1)dx}{2}$$

$$\Rightarrow I=\int_1^{\sqrt{6}}xf^2(x^2)dx=\int_1^{\sqrt{6}}xf^2(x^2)\frac{f'(x^2)(3f^2(x^2)+1)dx}{2}$$

Đặt $t=f(x^2)\Rightarrow dt=2xf'(x^2)dx\Rightarrow I=\int_0^2 t^2\frac{3t^2+1}{2}.\frac{dt}{2}=\frac{1}{4}\int_0^2(3t^4+t^2)dt=\frac{82}{15}$

Câu 60.

Cho $f(x)$ liên tục trên $[1;3]$ thỏa mãn $f(x)(x+1)(f(x)+1)+2=0\ \forall x$. Biết $f(3)=3$; $f(1)=2$. Tính $I=\int_1^3\frac{f(x)}{(x+1)^2}dx$.

A. $\frac{37}{12}$ **B.** $\frac{37}{6}$ **C.** $\frac{91}{12}$ **D.** $\frac{91}{6}$

Lời giải

Có $f(x)(x+1)(f(x)+1)+2 \Rightarrow (x+1)f^2(x)+(x+1)f(x)+2=0$

$$\Rightarrow (x+1)f^2(x)+(x+1)f(x)+x+1=x-1 \Rightarrow f^2(x)+f(x)+1=\frac{x-1}{x+1}$$

Lấy đạo hàm 2 vế $\Rightarrow (2f(x)+1)f'(x)dx=\frac{2}{(x+1)^2}dx$

$$\Rightarrow I=\int_1^3 f(x).\frac{2f(x)+1}{2}.f'(x)dx=\frac{1}{2}.\left(\frac{2}{3}f^3(x)+\frac{1}{2}f^2(x)\right)\Bigg|_1^3=\frac{91}{12}$$

Chọn ý **C.**

Câu 61.

Cho $f(x)$ liên tục trên khoảng $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $\sin x.f'(x)+\cos x.f(x)=\sin 2x$. Biết $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\ln 2$. Tính $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $2\ln 2$ **B.** $\sqrt{2}\ln 2$ **C.** $\ln 2$ **D.** $(\sqrt{2}+1)\ln 2$

Lời giải

Ta sẽ đưa bài toán về dạng $u'v+uv'=(uv)'$

Ta có $\sin x.f'(x)+\cos x.f(x)=\sin 2x \Rightarrow \frac{f'(x)}{\sin x}-\frac{\cos x}{\sin^2 x}.f(x)=2\frac{\cos x}{\sin x}$

$$\Rightarrow f'(x).\frac{1}{\sin x}+f(x).\left(\frac{1}{\sin x}\right)'=2\frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{\sin x}\right)'=2\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{\sin x}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x}dx=2\ln|\sin x|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1}-\frac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=2.\left(-\ln\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\ln 2 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\ln 2.(\sqrt{2}+1)$$

Chọn ý **D.**

Câu 62.

Giả sử tồn tại $f(x)$ thoản mãn $2xf(x^2+1)-f(x+1)=2x^3+1$. Tính $I=\int_3^5 f(x)dx$.

A. 6 **B.** 8 **C.** 10 **D.** 12

Lời giải

Lấy tích phân cả 2 vế, có $2\int_0^2 xf(x^2+1)dx-\int_0^2 f(x+1)dx=\int_0^2(2x^3+1)dx$

Đặt $x^2+1=t \Rightarrow 2xdx=dt \Rightarrow 2\int_0^2 xf(x^2+1)dx=\int_1^5 f(t)dt=\int_1^5 f(x)dx$

Có $\int_1^2 f(x+1)dx=\int_1^3 f(x)dx \Rightarrow \int_1^5 f(x)dx-\int_1^3 f(x)dx=\int_0^2(2x^3+1)dx=10 \Rightarrow \int_3^5 f(x)dx=10$

Chọn ý **C.**

Câu 63.

Cho $f(x)$ liên tục đạt giá trị dương trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x).f'(x)=2\sqrt{xf^2(x)+25x}$. Biết $f(9)=12$, tính $I=\int_0^1 f^2(x)dx$.

A. $479\frac{41}{45}$ **B.** $480\frac{41}{45}$ **C.** $479\frac{4}{45}$ **D.** $480\frac{4}{45}$

Lời giải

Có $f(x).f'(x)=2\sqrt{xf^2(x)+25x}\Rightarrow \frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+25}}=2\sqrt{x}\Rightarrow\left(\sqrt{f^2(x)+25}\right)'=2\sqrt{x}$

$$\Rightarrow\sqrt{f^2(x)+25}=\int 2\sqrt{x}dx=2.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{4}{3}.x^{\frac{3}{2}}+C$$

Có $f(9)=12\Rightarrow\sqrt{12^2+25}=36+C\Rightarrow C=-23$

$$\Rightarrow\sqrt{f^2(x)+25}=\frac{4}{3}.x^{\frac{3}{2}}-23\Rightarrow f^2(x)=\frac{16}{9}.x^3-\frac{184}{3}.x^{\frac{3}{2}}+504$$

$$\Rightarrow I=\int_0^1\left(\frac{16}{9}.x^3-\frac{184}{3}.x^{\frac{3}{2}}+504\right)dx=\left.\left(\frac{16}{9}.\frac{x^4}{4}-\frac{184}{3}.\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+504\right)\right|_0^1=\frac{21596}{45}=479\frac{41}{45}$$

Chọn ý **A.**

Câu 64.

Cho $f(x)$ là hàm chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\frac{x}{f(x^2-1)}+\frac{2}{f(4x-1)}=f'(x)$. Biết $\int_{-7}^{7}\frac{dx}{f(x)}=a;f(1)=b$. Tính $f(2)$ theo a và b

A. $b+\frac{a}{2}$ **B.** $2b+a$ **C.** $b+\frac{a}{4}$ **D.** $4b+a$

Lời giải

Có $f(x)$ là hàm chẵn $\Rightarrow a=\int_{-7}^{7}\frac{dx}{f(x)}=2\int_0^7\frac{dx}{f(x)}\Rightarrow\int_0^7\frac{dx}{f(x)}=\frac{a}{2}$

Lấy tích phân 2 vế biểu thức đề bài, có

$$\int_1^2\frac{xdx}{f(x^2-1)}+\int_1^2\frac{2dx}{f(4x-1)}=\int_1^2 f'(x)dx=f(2)-f(1)=f(2)-b$$

Đặt $t=x^2-1\Rightarrow dt=2xdx\Rightarrow\int_1^2\frac{xdx}{f(x^2-1)}=\frac{1}{2}\int_0^3\frac{dt}{f(t)}$

Đặt $t=4x-1\Rightarrow dt=4dx\Rightarrow\int_1^2\frac{2dx}{f(4x-1)}=\frac{1}{2}\int_3^7\frac{dt}{f(t)}$

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{x dx}{f\left(x^2-1\right)}+\int_1^2 \frac{2 dx}{f(4x-1)}=\frac{1}{2}\left(\int_0^3 \frac{dt}{f(t)}+\int_3^7 \frac{dt}{f(t)}\right)=\frac{1}{2}\int_0^7 \frac{dt}{f(t)}=\frac{a}{4}$$

$$\Rightarrow f(2)-b=\frac{a}{4}\Rightarrow f(2)=b+\frac{a}{4}$$

Chọn ý **C.**

Câu 65.

Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f^2(x)=x^2+1$. Biết $f(2)=\frac{-1+3\sqrt{2}}{2}$, tính $I=\int_0^1 f(x)dx$

A. $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\ln\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{4}$

B. $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\ln\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{4}$

C. $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\ln\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{4}$

D. $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\ln\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{4}$

Lời giải

Ta có $f(x)+f^2(x)=x^2+1\Rightarrow\left(2f(x)+1\right)^2=4x^2+2\Rightarrow f(x)=\frac{-1\pm\sqrt{4x^2+2}}{2}$

Mà $f(2)=\frac{-1+3\sqrt{2}}{2}\Rightarrow f(x)=\frac{-1+\sqrt{4x^2+2}}{2}$

$$\Rightarrow I=\int_0^1 \frac{-1+\sqrt{4x^2+2}}{2}dx=-\frac{1}{2}\int_0^1 dx+\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{4x^2+2}dx=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}J$$

Xét $J=\int_0^1 \sqrt{4x^2+2}dx$. Đặt $\begin{cases}u=\sqrt{4x^2+2}\\ dv=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{4x}{\sqrt{4x^2+2}}dx\\ v=x\end{cases}$

$$\Rightarrow J=\left(x\sqrt{4x^2+2}\right)\Big|_0^1-\int_0^1 \frac{4x^2}{\sqrt{4x^2+2}}dx=\sqrt{6}-\int_0^1 \frac{4x^2+2-2}{\sqrt{4x^2+2}}dx=\sqrt{6}-J+2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4x^2+2}}$$

$$\Rightarrow 2J=\sqrt{6}+2\int_0^1 \frac{2+\frac{4x}{\sqrt{4x^2+2}}}{\sqrt{4x^2+2}.\left(2+\frac{4x}{\sqrt{4x^2+2}}\right)}dx=\sqrt{6}+2\int_0^1 \frac{d\left(2x+\sqrt{4x^2+2}\right)}{4x+2\sqrt{4x^2+2}}$$

$$\Rightarrow J=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2+2}\right|\Big|_0^1=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\Rightarrow I=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\ln\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{4}$$

Chọn ý **A.**

TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC

Câu 66.

Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)+2x=f(x)$. Biết $f(2)=10;f(1)=5$. Tính giá trị của tích phân $\int_1^2\left(\frac{x}{f(x)}\right)^2 f'(x)dx$

A. $\frac{6}{5}+\ln 2$ **B.** $\frac{6}{5}-\ln 2$ **C.** $\frac{4}{5}+\ln 2$ **D.** $\frac{4}{5}-\ln 2$

Lời giải

Xét $I=\int_1^2\left(\frac{x}{f(x)}\right)^2 f'(x)dx$. Đặt $\begin{cases} u=x^2 \\ dv=\frac{f'(x)}{f(x)^2}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=2xdx \\ v=-\frac{1}{f(x)} \end{cases}$

$$\Rightarrow I=-\left.\frac{x^2}{f(x)}\right|_1^2+\int_1^2\frac{2x}{f(x)}dx=-\frac{1}{5}+\int_1^2\frac{2x}{f(x)}dx$$

Có $f'(x)+2x=f(x)\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{2x}{f(x)}=1\Rightarrow \int_1^2\frac{f'(x)}{f(x)}dx+\int_1^2\frac{2x}{f(x)}dx=\int_1^2 dx$

$$\Rightarrow \int_1^2\frac{2x}{f(x)}dx=1-\ln\left|f(x)\right|\Big|_1^2=1-\frac{\ln 10}{\ln 5}=1-\ln 2\Rightarrow I=\frac{4}{5}-\ln 2$$

Chọn ý **D.**

Câu 67.

ho $\int_0^3\left[f'(x)\right]^2dx=36,\int_0^3 f(x)dx=0$.Biết $f(3)=-6,f(0)=3$. Tính $f(-1)$

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u=f(x) \\ dv=dx \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} du=f'(x)dx \\ v=x \end{cases}\Rightarrow \int_1^3 f(x)dx=xf(x)\Big|_0^3-\int_0^3 xf'(x)dx\Rightarrow\int_0^3 xf'(x)dx=-18$

Ta tìm k sao cho $\int_0^3\left[f'(x)+kx\right]^2dx=0$

$$\Leftrightarrow \int_0^3\left[f'(x)\right]^2dx+2k\int_0^3 xf'(x)dx+k^2\int_0^3 x^2dx=0\Leftrightarrow 36-36k+9k^2=0$$

$$\Rightarrow k=2\Rightarrow f'(x)=-2x\Rightarrow f(x)=-x^2+C. \text{ Mà } f(0)=3\Rightarrow C=3\Rightarrow f(x)=3-x^2\Rightarrow f(-1)=2$$

Chọn ý **C.**

Câu 68.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x+1)+f(x+2)=e^x\left(x^2-1\right)$. Tính giá trị của tích phân $I=\int_1^3 f(x)dx$?

A. 0 **B.** 1 **C.** -1 **D.** 3

Lời giải

Lấy tích phân 2 vế cận từ 0 tới 1 ta được

$$\int_0^1 f(x+1)dx+\int_0^1 f(x+2)dx=\int_0^1 e^x\left(x^2-1\right)dx=-1$$

Đến đây quay trở về bài toán đổi ẩn quen thuộc, ta có

$$\int_0^1 f(x+1)dx = \int_1^2 f(t)dt = \int_1^2 f(x)dx$$

$$\int_0^1 f(x+2)dx = \int_2^3 f(t)dt = \int_2^3 f(x)dx$$

Từ đây ta có $\int_0^1 f(x+1)dx + \int_0^1 f(x+2)dx = -1 \Leftrightarrow \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx = -1 = \int_1^3 f(x)dx$

Chọn ý **C.**

Nhận xét. Với bài này cái khó nhất là tại sao ta biết để lấy được tích phân cận từ 0 tới 1, nếu không nhìn thấy ngay ta có thể giả sử lấy tích phân từ a tới b như sau.

$$\int_a^b f(x+1)dx + \int_a^b f(x+2)dx = \int_a^b e^x(x^2-1)dx$$

Với tích phân $\int_a^b f(x+1)dx = \int_a^b f(x+1)d(x+1) = \int_{a+1}^{b+1} f(x)dx$

Với tích phân $\int_a^b f(x+2)dx = \int_a^b f(x+2)d(x+2) = \int_{a+2}^{b+2} f(x)dx$

Đến đây chọn a và b sao cho $\begin{cases} a+1=1 \\ b+2=3 \\ b+1=a+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$

Câu 69.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(x+1)+3f(3x+2)-4f(4x+1)-f(2^x) = \frac{3}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}, \forall x \in [-1;+\infty)$$

Tính giá trị của tích phân $I = \int_1^2 \frac{f(x)dx}{x}$?

A. $(2+6\sqrt{3}-8\sqrt{2})\ln 2$

B. $(2+6\sqrt{3}+8\sqrt{2})\ln 2$

C. $(2-6\sqrt{3}-8\sqrt{2})\ln 2$

D. $(2-6\sqrt{3}+8\sqrt{2})\ln 2$

Lời giải

Lấy tích phân 2 vế từ 0 đến 1 ta có

$$\int_0^1 f(x+1)dx + \int_0^1 3f(3x+2)dx - \int_0^1 4f(4x+1)dx - \int_0^1 f(2^x)dx = \int_0^1 \frac{3dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}$$

Dễ dàng tính được tích phân $\int_0^1 \frac{3dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}} = \int_0^1 3\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)dx$

$$= 2\left((x+2)\sqrt{x+2}-(x+1)\sqrt{x+1}\right)\Big|_0^1 = 2+6\sqrt{3}-8\sqrt{2}$$

Mặt khác ta lại có

- $\int_0^1 f(x+1)dx = \int_1^2 f(t)dt = \int_1^2 f(x)dx$
- $\int_0^1 3f(3x+2)dx = \int_2^5 f(t)dt = \int_2^5 f(x)dx$
- $\int_0^1 4f(4x+1)dx = \int_1^5 f(t)dt = \int_1^5 f(x)dx$

- $\int_0^1 f\left(2^x\right)dx = \int_1^2 \frac{f(t)dt}{t\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}\int_1^2 \frac{f(t)dt}{t} = \frac{1}{\ln 2}\int_1^2 \frac{f(x)dx}{x}$

Khi đó ta có $\int_1^2 f(x)dx + \int_2^5 f(x)dx - \int_1^5 f(x)dx - \frac{1}{\ln 2}\int_1^2 \frac{f(x)dx}{x} = 2 + 6\sqrt{3} - 8\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 \frac{f(x)dx}{x} = \left(2 + 6\sqrt{3} - 8\sqrt{2}\right)\ln 2$$

Câu 70.

Cho $S_n = -\int\limits_0^1 (x-1)^{100}dx + \int\limits_0^2 (x-2)^{100}dx - ... + \int\limits_0^n (x-n)^{100}dx$.

Tính giá trị của biểu thức $S_{100} + \left(\int\limits_0^1 x^{100} + \int\limits_2^3 x^{100} + ... + \int\limits_{98}^{100} x^{100}\right) - \int\limits_0^{100} x^{100}$?

A. $-\frac{1}{2}\int\limits_0^{100} x^{100}$ **B.** $\int\limits_0^{100} x^{100}$ **C.** 0 **D.** $2\int\limits_0^{100} x^{100}$

Lời giải

Ta có $\int\limits_0^n (x-n)^{100}dx = \int\limits_0^n (n-x)^{100}dt = -\int\limits_n^0 t^{100}dt = \int\limits_0^n x^{100}dx$.

$$\Rightarrow S_{100} = -\int\limits_0^1 x^{100}dx + \int\limits_0^2 x^{100}dx - ... + \int\limits_0^{100} x^{100}dx.$$

Ta có $2S_{100} = -2\int\limits_0^1 x^{100}dx + 2\int\limits_0^2 x^{100}dx - ... + 2\int\limits_0^{100} x^{100}dx$

$$= -\int\limits_0^1 x^{100}dx - \int\limits_0^1 x^{100}dx + \int\limits_0^2 x^{100}dx + \int\limits_0^2 x^{100}dx - \int\limits_0^3 x^{100}dx - ... - \int\limits_0^{99} x^{100}dx + \int\limits_0^{100} x^{100}dx$$

$$= -\int\limits_0^1 x^{100}dx + \int\limits_1^2 x^{100}dx - \int\limits_2^3 x^{100}dx + \int\limits_3^3 x^{100}dx - ... + \int\limits_{99}^{100} x^{100}dx$$

$$\Rightarrow 2S_{100} + 2\left(\int\limits_0^1 x^{100} + \int\limits_2^3 x^{100} + ... + \int\limits_{98}^{100} x^{100}\right) = \int\limits_0^1 x^{100} + \int\limits_1^2 x^{100} + \int\limits_2^3 x^{100} + ... + \int\limits_{98}^{100} x^{100} = \int\limits_0^{100} x^{100}$$

$$\Rightarrow S_{100} + \int\limits_0^1 x^{100} + \int\limits_2^3 x^{100} + ... + \int\limits_{98}^{100} x^{100} - \int\limits_0^{100} x^{100} = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{100} x^{100}.$$

Chọn ý **A.**

Câu 71.

Tính giá trị của tích phân $I = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{\sin x + \tan x}dx$?

A. $-\frac{1}{2}$ **B.** 0. **C.** 1. **D.** $\frac{\pi}{2}$

Lời giải

Ta sẽ chứng minh hàm số $f(x) = \frac{x^2}{\sin x + \tan x}$ là hàm số lẻ.

CHINH PHỤC OLYMPIC TOÁN

TXĐ của hàm số trên $\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \sin x+\tan x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x\neq 0\\ (\cos x+1)\sin x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x\neq 0\\ \sin x\neq 0\end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x\neq k\pi \Leftrightarrow x\neq \frac{k\pi}{2}, k\in Z.$$

$f(-x)=\dfrac{(-x)^2}{\sin(-x)+\tan(-x)}=-\dfrac{x^2}{\sin x+\tan x}=-f(x)$ nên hàm số là hàm số lẻ.

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{0}\frac{x^2}{\sin x+\tan x}dx=\int_{-\pi}^{0}-\frac{(-x)^2}{\sin(-x)+\tan(-x)}dx=\int_{\pi}^{0}\frac{x^2}{\sin x+\tan x}dx=-\int_{0}^{\pi}\frac{x^2}{\sin x+\tan x}dx$$

$$\Rightarrow I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^2}{\sin x+\tan x}dx=\int_{\pi}^{0}\frac{x^2}{\sin x+\tan x}dx+\int_{0}^{\pi}\frac{x^2}{\sin x+\tan x}dx=0.$$

Chọn ý **B.**

Câu 72.

Cho tích phân $I=\int_0^{\pi}\dfrac{4x^3-3x}{\sqrt{1-x}.\sqrt{1+x}}dx=a\pi^3+b\pi^2+c\pi$. Tính $a+b+c$?

A. $\dfrac{1}{3}$ **B.** 0. **C.** 0. **D.** $\dfrac{\pi}{2}$

Lời giải

Ta có $I=\int_0^{\pi}\dfrac{4x^3-3x}{\sqrt{1-x}.\sqrt{1+x}}dx=\int_0^{\pi}\dfrac{4x^3-3x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\pi}\dfrac{4x^2-3}{\sqrt{1-x^2}}xdx$

Đặt $1-x^2=t^2 \Rightarrow \begin{cases}tdt=-xdx\\ 3-4x^2=3-4(1-t^2)=4t^2-1\end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\pi}\frac{4t^2-1}{t}tdt=\int_0^{\pi}4t^2-1dt=\left(\frac{4}{3}t^3-t\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{4}{3}\pi^3-\pi\Rightarrow a+b+c=\frac{1}{3}.$$

Chọn ý **A.**

Câu 73.

Tính giá trị của tích phân $I=\int_{\tan\frac{a}{2}}^{\tan\frac{b}{2}}\dfrac{\ln x\left(1-x^2\right)^2}{\left(1+x^2\right)^2}$ theo $\int_a^b\dfrac{\ln\left(\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)}{2}dx=M$?

A. M. **B.** 0. **C.** $\dfrac{M}{4}$ **D.** 2M

Lời giải

Đặt $x=\tan\dfrac{t}{2}\Rightarrow dx=\dfrac{1}{2\cos^2 x}dt=\dfrac{\left(1+x^2\right)^2}{2\left(1-x^2\right)^2}dt\Rightarrow I=\int\dfrac{\ln\left(\tan\dfrac{t}{2}\right)dt}{2}$

Ta có $\begin{cases} \tan\dfrac{t}{2}=\dfrac{1-\cos t}{\sin t} \\ \tan\dfrac{t}{2}=\dfrac{\sin t}{1+\cos t} \end{cases} \Rightarrow 2I=\int_a^b \dfrac{\ln\left(\dfrac{1-\cos t}{1+\cos t}\right)}{2}dt=\int_a^b \dfrac{\ln\left(\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)}{2}dx \Rightarrow I=\dfrac{M}{4}$.

Chọn ý **C.**

Câu 74.

Cho tích phân $J_n=\int_{-n}^{n} e^n\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$. Tính $J_1+J_2+...+J_{100}$?

A. $\frac{1}{2}.\sum_{n=1}^{100}e^n$ **B.** $2\sum_{n=1}^{100}e^n$. **C.** 0 **D.** $\sum_{n=1}^{100}e^n$

Lời giải

Ta có hàm số $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ liên tục khi $n\in[1;100]$ nên

$$f(-x)+f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+\ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)$$
$$=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)=\ln 1=0\Rightarrow f(x)=-f(-x)$$

Hàm số là hàm số lẻ. Suy ra

$$I=\int_{-a}^{a}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx=\int_{-a}^{0}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx+\int_{0}^{a}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$$

Đổi biến $t=-x$ ta được

$$I=\int_{-a}^{0}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx+\int_{0}^{a}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx=\int_{0}^{a}\ln\left(-t+\sqrt{t^2+1}\right)dt+\int_{0}^{a}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$$
$$=-\int_{0}^{a}\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)dt=-\int_{0}^{a}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dt+\int_{0}^{a}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx=0.$$
$$\Rightarrow J_1+...+J_{100}=\left(e+e^1+...+e^{100}\right)=0.$$

Chọn ý C.

Câu 75.

Cho $\dfrac{f(x)}{f\left(\dfrac{1-x}{x}\right)}=\dfrac{1}{-(x+1)^2}$, $\int_{\frac{-1}{2}}^{2}\dfrac{\ln(1-x)}{f\left(\dfrac{1-x}{x}\right)}dx=a$ Tính $\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{3}}-\dfrac{\ln x}{(x+1)^2f(x)}dx$ theo a?

A. $\frac{1}{2}a$ **B.** 2a **C.** 0 **D.** a

Lời giải

Ta có $\int_{\frac{1}{3}}^{3}-\dfrac{\ln x}{(x+1)^2f(x)}dx=\int_{\frac{1}{3}}^{2}\dfrac{\ln x}{f\left(\dfrac{1-x}{x}\right)}dx$

Đặt $x=\frac{1-t}{t}\Rightarrow dx=-\frac{1}{t^2}dt\Rightarrow\begin{cases}x=2\Rightarrow t=\frac{-1}{2}\\ x=\frac{1}{3}\Rightarrow t=2\end{cases}$.

Ta có $x=\frac{1-t}{t}\Rightarrow -t^2=-\frac{1}{(x+1)^2}\Rightarrow I=\int\limits_{2}^{\frac{-1}{2}}\frac{\ln\left(\frac{1-t}{t}\right)}{f\left(\frac{1-t}{t}\right)}dt=\int\limits_{2}^{\frac{-1}{2}}\frac{\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)}{f\left(\frac{1-x}{x}\right)}dx=-\int\limits_{\frac{-1}{2}}^{2}\frac{\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)}{f\left(\frac{1-x}{x}\right)}dx$.

$$\Rightarrow\int\limits_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{3}}-\frac{\ln x}{(x+1)^2f(x)}dx=\int\limits_{\frac{-1}{2}}^{2}-\frac{\ln x}{(x+1)^2f(x)}dx-\int\limits_{\frac{1}{3}}^{2}-\frac{\ln x}{(x+1)^2f(x)}dx$$

$$=\int\limits_{\frac{-1}{2}}^{2}-\frac{\ln x}{(x+1)^2f(x)}dx+\int\limits_{\frac{-1}{2}}^{2}\frac{\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)}{f\left(\frac{1-x}{x}\right)}dx=\int\limits_{\frac{-1}{2}}^{2}\frac{\ln x}{f\left(\frac{1-x}{x}\right)}dx+\int\limits_{\frac{-1}{2}}^{2}\frac{\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)}{f\left(\frac{1-x}{x}\right)}dx=\int\limits_{\frac{-1}{2}}^{2}\frac{\ln(1-x)}{f\left(\frac{1-x}{x}\right)}dx=a.$$

Chọn ý **D.**

Câu 76.

Cho hàm số chẵn $f(x)$ thỏa mãn $f(x).(x-1)=f(x-1).x$. Tính $\int\limits_0^2 f(x-2)dx$?

A. 1 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 7

Lời giải

Ta có $f(x).(x-1)=f(x-1).x\Rightarrow\frac{f(x)}{x}=\frac{f(x-1)}{x-1}\Rightarrow f(x)=x$.

Đặt $t=2-x\Rightarrow dt=-dx\Rightarrow\int\limits_0^2 f(x-2)dx=\int\limits_0^2 f(2-x)dx=-\int\limits_2^0 f(t)dt=\int\limits_0^2 f(x)dx=\int\limits_0^2 xdx=2$.

Chọn ý **B.**

Câu 77.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x).f(2-x)=2019$. Tính giá trị của biểu thức tích phân $\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{2019}+f(x)}$

A. 0 **B.** 1 **C.** $\frac{2}{\sqrt{2019}}$ **D.** $\frac{1}{\sqrt{2019}}$

Lời giải

Đặt $t=2-x\Rightarrow dt=-dx\Rightarrow I=\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{2019}+f(x)}=\int_2^0\frac{dt}{\sqrt{2019}+f(2-t)}=\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{2019}+f(2-x)}$

$$\Rightarrow 2I=\int_0^2\left(\frac{1}{\sqrt{2019}+f(x)}+\frac{1}{\sqrt{2019}+f(2-x)}\right)dx$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int_0^2\left(\frac{2\sqrt{2019}+f(x)+f(2-x)}{2.2019+f(x)\sqrt{2019}+f(2-x)\sqrt{2019}}\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{2019}}=\frac{1}{\sqrt{2019}}$$

Chọn ý **D.**

Câu 78.

Cho hàm số $f(x)=x^3+(x-1)^3+...+(x-100)^3$. Tính giá trị của biểu thức tích phân $\int_0^{100} f(x)dx$?

A. 0 **B.** 1. **C.** $\frac{2}{\sqrt{2019}}$ **D.** $\frac{1}{\sqrt{2019}}$

Lời giải

Đặt $x=100-t \Rightarrow dx=-dt \Rightarrow I=-\int_{100}^{0} f(100-t)dt=\int_0^{100} f(100-x)dx$

Xét $f(100-x)=(100-x)^3+(99-x)^3+...+(-x)^3=-\left(x^3+(x-1)^3+...+(x-100)^3\right)=-f(x)$

$$\Rightarrow I=\int_0^{100} f(x)dx=-\int_0^{100} f(x)dx \Rightarrow I=0$$

Câu 79.

Cho hàm số $f(x)$ xác định là liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x+1)=\frac{f(x)-1}{f(x)+1}$. Biết rằng $\int_0^4 f(x)dx=1, f(4)=2$. Tính giá trị của tích phân $\int_0^{2^{2019}} xf'(x)dx$?

A. 2^{2019} **B.** 2^{2020} **C.** 7.2^{2017} **D.** 7.2^{2018}

Lời giải

Xét hàm số $f(x+2)=f(x+1+1)=\frac{f(x+1)-1}{f(x+1)+1}=\frac{\frac{f(x)-1}{f(x)+1}-1}{\frac{f(x)-1}{f(x)+1}+1}=-\frac{1}{f(x)}$

$$\Rightarrow f(x+4)=f(x+2+2)=-\frac{1}{f(x+2)}=f(x)$$

Suy ra $f(x)$ là hàm số tuần hoàn chu kì $T=4$.

Xét tích phân $\int_0^{2^{2019}} xf'(x)dx=xf(x)\Big|_0^{2^{2019}}-\int_0^{2^{2019}} f(x)dx$

$$=2^{2019}f\left(2^{2019}\right)-2^{2017}\int_0^2 f(x)dx=2^{2020}-2^{2017}=7.2^{2017}$$

Câu 80.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời 2 điều kiện:

$$\begin{cases} f(0)=f'(0)=1 \\ f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy(x+y)-1, \forall x,y\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Tính tích phân $\int_0^1 f(x-1)dx$.

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $-\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{7}{4}$

Lời giải

Lấy đạo hàm 2 vế theo hàm số y ta được $f'(x+y)=f'(y)+3x^2+6xy,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Cho $y=0\Rightarrow f'(x)=f'(0)+3x^2 \Rightarrow f'(x)=1+3x^2$

Vậy $f(x)=\int f'(x)dx=x^3+x+C$ mà $f(0)=1\Rightarrow C=1$ suy ra $f(x)=x^3+x+1$.

$$\Rightarrow\int_0^1 f(x-1)dx=\int_{-1}^0 f(x)dx=\int_{-1}^0\left(x^3+x+1\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{-1}^0=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{4}.$$

Chọn ý **C.**

Câu 81.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$ và $f^2(-x)=\left(x^2+2x+4\right)f(x+2)$ Biết rằng $f(x)\neq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ tính tích phân $I=\int_0^2 xf''(x)dx$.

A. $I=-4$ **B.** $I=4$ **C.** $I=0$ **D.** $I=8$

Lời giải

Theo giả thiết ta có

$$I=\int_0^2 xf''(x)dx=f'(x)\Big|_0^2-\int_0^2 f'(x)dx=f'(x)\Big|_0^2-f(x)\Big|_0^2=f'(2)-f'(0)-f(2)+f(0)$$

Trong giả thiết ta thay $x=0;x=2$ ta có:

$$\begin{cases}f^2(0)=4f(2)\\ f^2(2)=4f(0)\end{cases}\Rightarrow f^4(0)=16f^2(2)=64f(0)\Rightarrow\begin{cases}f(0)=4\\ f(2)=4\end{cases}$$

Đạo hàm hai vế ta có $-2f'(-x).f(-x)=(2x+2)f(x+2)+\left(x^2+2x+4\right)f'(x+2)$

Lại thay $x=0$ và $x=-2$, ta có $\begin{cases}-2f'(0)=2+f'(2)\\ -2f'(2)=-2+f'(0)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'(0)=-2\\ f'(2)=2\end{cases}$

Kết hợp lại ta được $I=2-(-2)-4+4=4$.

Chọn ý **B.**

Câu 82.

Có bao nhiêu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện

$$\int_0^1\left(f(x)\right)^{2018}dx=\int_0^1\left(f(x)\right)^{2019}dx=\int_0^1\left(f(x)\right)^{2020}dx$$

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

Từ điều kiện ta suy ra $\int_0^1\left(f(x)\right)^{2018}\left(f(x)-1\right)^2dx=0\Rightarrow\left(f(x)\right)^{2018}\left(f(x)-1\right)^2=0$

Mà $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ nên $\left[\begin{array}{l}f(x)=1\\ f(x)=0\end{array}\right.$. Vậy có 2 hàm thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn ý **B.**

Câu 83.

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\left[\frac{1}{2};2\right]$, thỏa mãn điều kiện $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}+2$. Tính tích phân $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x^2+1}dx$.

A. $I=\frac{3}{2}$. **B.** $I=2$. **C.** $I=\frac{5}{2}$. **D.** $I=3$.

Lời giải

Đặt $x=\frac{1}{t}$, suy ra $dx=-\frac{1}{t^2}dt$. Khi đó $I=\int\limits_{2}^{\frac{1}{2}}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{t^2}+1}.\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2+1}dt=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+1}dx$

$$\Rightarrow 2I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x^2+1}dx+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+1}dx=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+1}dx=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{x^2+\frac{1}{x^2}+2}{x^2+1}dx$$

$$=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{x^2+1}{x^2}dx=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx=\left(x-\frac{1}{x}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}=3\Rightarrow I=\frac{3}{2}$$

Chọn ý **A.**

Câu 84.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ ta có $f(0)=0,f'(0)\neq 0$ và đồng thời $f(x)f'(x)+18x^2=(3x^2+x)f'(x)+(6x+1)f(x),\forall x\in\mathbb{R}$, biết rằng

$$\int_0^1(x+1)e^{f(x)}dx=ae^2+b(a,b\in\mathbb{Q})$$

Giá trị của $a-b$ bằng?

A. 0 **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** 1 **D.** 2

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có

$$f(x)f'(x)+18x^2=(3x^2+x)f'(x)+(6x+1)f(x)$$

$$\Leftrightarrow f(x)f'(x)+18x^2=\left((3x^2+x)f(x)\right)'$$

$$\Rightarrow (3x^2+x)f(x)=\int\left(f(x)f'(x)+18x^2\right)dx=\frac{1}{2}f^2(x)+6x^3+C$$

Vì $f(0)=0\Rightarrow 0=0+0+C\Leftrightarrow C=0$

Vậy $(3x^2+x)f(x)=\frac{1}{2}f^2(x)+6x^3\Leftrightarrow f^2(x)-2(3x^2+x)f(x)+12x^3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=6x^2\\ f(x)=2x\end{array}\right.$

Do $f'(0)\neq 0\Rightarrow f(x)=2x\Rightarrow\int_0^1(x+1)e^{f(x)}dx=\int_0^1(x+1)e^{2x}dx=\frac{3e^2}{4}-\frac{1}{4}$. Chọn ý **C.**

CHƯƠNG 7 CÁC BÀI TOÁN LẤY TÍCH PHÂN 2 VẾ

Thực ra đây là một bài viết không mới, mình đã viết phần này trong chuyên đề *Các bài toán vận dụng cao nguyên hàm và tích phân,* bài viết dưới đây chỉ mang tính tổng hợp lại các bài toán của dạng này trong chuyên đề đó để các bạn có thể tiện tham khảo. Trong phần này ta sẽ cùng nhau tìm hiểu về một lớp bài toán liên quan tới quan hệ của hai hàm $f'(x), f(x)$, đây là một dạng đã xuất hiện trong đề thi THPT Quốc Gia 2018 của Bộ GD&ĐT và trong rất nhiều đề thi thử của các trường chuyên. Bây giờ ta sẽ cùng bắt đầu tìm hiểu vấn đề này.

BÀI TOÁN LIÊN QUAN TỚI TÍCH

Ta sẽ bắt gặp các bài toán có dạng $f'(x)=g(x).h(f(x))$, với $g(x)$ là hàm theo biến *x* khi đó cách làm chung của ta sẽ là lấy nguyên hàm 2 vế, cụ thể:

$$f'(x)=g(x).h(f(x)) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{h(f(x))}=g(x) \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{h(f(x))}dx=\int g(x)dx$$

Hoặc có thể lấy tích phân 2 vế, đến đây thì tùy thuộc vào yêu cầu và giả thiết của bài toán mà ta có thể suy ra kết quả cần tính.
Để cùng hiểu rõ hơn ta sẽ bắt đầu với những ví dụ sau:

Câu 1.

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{25}$ và $f'(x)=4x^3(f(x))^2\ \forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng?

A. $-\frac{41}{100}$ **B.** $-\frac{1}{10}$ **C.** $-\frac{391}{400}$ **D.** $-\frac{1}{40}$

Đề thi THPT Quốc Gia 2018

Lời giải

Phân tích: Nếu ban đầu gặp dạng này có lẽ ta sẽ không biết cách xử lý thế nào, tuy nhiên bám sát vào bài toán tổng quát ta sẽ có hướng làm như sau:

Giả thiết tương đương với: $f'(x)=4x^3(f(x))^2 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{(f(x))^2}=4x^3$.

Đến đây ta sẽ lấy nguyên hàm hay tích phân? Chú ý là với những bài toán bắt tính giá trị của hàm số tại một điểm mà giả thiết đã cho giá trị cụ thể của hàm tại một điểm nào đó thì ta sẽ lấy tích phân hai vế. Lấy tích phân cận từ 1 đến 2 cả 2 vế ta được:

$$\frac{f'(x)}{\left(f(x)\right)^2}=4x^3\Rightarrow\int_1^2\frac{f'(x)}{\left(f(x)\right)^2}dx=\int_1^2 4x^3dx=15$$

$$\Leftrightarrow-\left.\frac{1}{f(x)}\right|_1^2=15\Leftrightarrow-\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(1)}=15\Rightarrow f(1)=-\frac{1}{10}$$

Chọn ý **B.**

Câu 2.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên tập số thực. Biết rằng $f(2)=1; 2f(x)\sqrt{f'(x)}=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{f^2(x)+4}}$. Đặt $g(x)=-\frac{f^4(x)}{16}+\frac{16}{f^4(x)}+8\ln f(x)$. Tính giá trị của $g(1)$?

A. $\frac{215}{16}$ **B.** 13 **C.** 14 **D.** $\frac{223}{16}$

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có

$$2f(x)\sqrt{f'(x)}=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{f^2(x)+4}}\Leftrightarrow 4f'(x)f^2(x)\sqrt{f^2(x)+4}=(x+1)$$

$$\Leftrightarrow 4f'(x)f^2(x)\sqrt{f^2(x)+4}=x+1\Rightarrow\int 4f'(x)f^2(x)\sqrt{f^2(x)+4}dx=\frac{x^2}{2}+x$$

$$\Rightarrow\int 4f^2(x)\sqrt{f^2(x)+4}d\left(f(x)\right)=\frac{x^2}{2}+x$$

Vấn đề nảy sinh ở đây là tính nguyên hàm này! Ta sẽ sử dụng phương pháp đặt ẩn Euler cho bài toán này.

Đặt $u=f(x),\sqrt{u^2+4}=u-t\Leftrightarrow u^2+4=u^2-2ut+t^2\Leftrightarrow u=\frac{t^2-4}{2t}\Leftrightarrow\begin{cases}du=\frac{t^2+4}{2t^2}dt\\ \sqrt{u^2+4}=\frac{t^2-4}{2t}-t=-\frac{t^2+4}{2t}\end{cases}$

$$\Rightarrow-\int 4\left(\frac{t^2-4}{2t}\right)^2.\frac{t^2+4}{2t^2}.\frac{t^2+4}{2t}dt=-\int\frac{\left(t^4-16\right)^2}{4t^5}dt=-\frac{t^4}{16}+\frac{16}{t^4}+8\ln(t)+C$$

Theo giả thiết ta có $f(2)=1\Rightarrow-\frac{1}{16}+\frac{16}{1}+C=4\Rightarrow C=-\frac{191}{16}$

Suy ra $-\frac{f^4(x)}{16}+\frac{16}{f^4(x)}+\ln\left(f(x)\right)-\frac{191}{16}=\frac{x^2}{2}+x\Rightarrow g(1)=\frac{215}{16}$

Câu 3.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=2$ và $\left[f(x)\right]^4\left[f'(x)\right]^2\left(x^2+1\right)=1+\left[f(x)\right]^3\ \forall x\in[0;1]$. Biết rằng $f'(x)\ge 0, f(x)>0 \forall x\in[0;1]$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $2<f(1)<3$ **B.** $3<f(1)<4$ **C.** $4<f(1)<5$ **D.** $5<f(1)<6$

Đề thi thử chuyên Lê Khiết – Quảng Ngãi

Lời giải

Vẫn là ý tưởng đó nhưng có vẻ đã được tác giả giấu kỹ hơn!

Ta bám sát bài toán tổng quát, chú ý rằng bài toán tổng quát thì $f'(x)$ chỉ ở bậc 1, vậy làm sao để đưa về bậc 1 bây giờ? Rất đơn giản thôi ta sẽ lấy căn hai vế!

Ta có:

$$f'(x)f^2(x)\sqrt{x^2+1}=\sqrt{1+f^3(x)}\Leftrightarrow \frac{f'(x)f^2(x)}{\sqrt{1+f^3(x)}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{f'(x)f^2(x)}{\sqrt{1+f^3(x)}}dx=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Big|_0^1=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{d\left(1+f^3(x)\right)}{\sqrt{1+f^3(x)}}dx=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow \frac{2}{3}\sqrt{1+f^3(x)}\Big|_0^1=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\left(\sqrt{1+f^3(x)}-\sqrt{1+2^3}\right)=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\Rightarrow f(1)=2.6051...$$

Chọn ý **A.**

Câu 4.

Cho hàm số $f(x)$ $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục và nhận giá trị không âm trên $[1;+\infty)$, thỏa $f(1)=0$, $e^{2f(x)}.\left[f'(x)\right]^2=4x^2-4x+1$ với mọi $x\in[1;+\infty)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $-1<f'(4)<0.$ **B.** $0<f'(4)<1.$ **C.** $1<f'(4)<2.$ **D.** $2<f'(4)<3.$

Lời giải

Câu này thoạt nhìn có vẻ khá khó khăn nhưng ý tưởng vẫn giống bài của chuyên Lê Khiết , ta sẽ lấy căn hai vế!

Lấy căn hai vế ta được $e^{f(x)}f'(x)=2x-1$ do $f'(x)$ không âm trên $[1;+\infty)$

$$\Rightarrow \int e^{f(x)}f'(x)dx=\int(2x-1)dx\Leftrightarrow e^{f(x)}=x^2-x+C.$$

Thay $x=1$ vào hai vế, ta được $e^{f(1)}=1^2-1+C\Rightarrow C=1.$

Suy ra $e^{f(x)}=x^2-x+1\Rightarrow f(x)=\ln\left(x^2-x+1\right)\Rightarrow f'(x)=\frac{2x-1}{x^2-x+1}\Rightarrow f'(4)=\frac{7}{13}.$

Chọn ý **B.**

Câu 5.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định, liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f'(0)=-1$ và $\begin{cases}\left[f'(x)\right]^2=f''(x)\\ f'(x)\neq 0\end{cases}$ với mọi $x\in[0;1]$. Đặt $P=f(1)-f(0)$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $-2\le P\le -1$. **B.** $-1\le P\le 0$. **C.** $0\le P\le 1$. **D.** $1\le P\le 2$.

Lời giải

Ta đã nhìn thấy chút bóng dáng của $P=\int_0^1 f'(x)dx=f(1)-f(0)$ nên ta cần tìm $f'(x)$.

Từ giả thiết ta có:

$$\frac{f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2}=1\Rightarrow\int\frac{f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2}dx=x\Leftrightarrow-\frac{1}{f'(x)}=x+C\Leftrightarrow f'(x)=-\frac{1}{x+C}$$

Mà $f'(0)=-1\Rightarrow C=1\Rightarrow f'(x)=-\dfrac{1}{x+1}$. Vậy $P=\int\limits_0^1 f'(x)dx=-\int\limits_0^1\dfrac{1}{x+1}dx=-\ln 2\approx -0,69$.

Chọn ý **B.**

Câu 6.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $[0;3]$, thỏa mãn $\begin{cases}f(3-x).f(x)=1\\ f(x)\neq -1\end{cases}$ với mọi $x\in[0;3]$ và $f(0)=\dfrac{1}{2}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^3\dfrac{xf'(x)}{\left[1+f(3-x)\right]^2.f^2(x)}dx$

A. $I=\dfrac{1}{2}$. **B.** $I=1$. **C.** $I=\dfrac{3}{2}$. **D.** $I=\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Từ giả thiết $\begin{cases}f(3-x).f(x)=1\\ f(0)=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow f(3)=2$.

Do $f(3-x)f(x)=1\Rightarrow\left[1+f(3-x)\right]^2.f^2(x)=\left[1+f(x)\right]^2$.

Khi đó ta được:

$$I=\int\limits_0^3\frac{xf'(x)}{\left[1+f(x)\right]^2}dx=-\int\limits_0^3 xd\left(\frac{1}{1+f(x)}\right)=-\frac{x}{1+f(x)}\Bigg|_0^3+\int\limits_0^3\frac{1}{1+f(x)}dx=-1+J.$$

Tính $J=\int\limits_0^3\dfrac{1}{1+f(x)}dx\overset{t=3-x}{=}-\int\limits_3^0\dfrac{1}{1+f(3-t)}dt=\int\limits_0^3\dfrac{1}{1+f(3-t)}dt=\int\limits_0^3\dfrac{1}{1+f(3-x)}dx$.

Suy ra $2J=\int\limits_0^3\dfrac{1}{1+f(x)}dx+\int\limits_0^3\dfrac{1}{1+f(3-x)}dx\overset{f(3-x).f(x)=1}{=}\int\limits_0^3 1dx=3\Rightarrow J=\dfrac{3}{2}$. Vậy $I=\dfrac{1}{2}$.

Chọn ý **A.**

> ***Tóm lại.*** Qua 5 ví dụ vừa rồi ta đã làm quen được với dạng toán có $f'(x), f(x)$ và đã tìm hiểu qua cách giải của các bài toán này, từ đó ta rút ra được các chú ý sau:
> - Chuyển $f'(x)$ và hàm theo biến $f(x)$ sang một bên, chú ý $f'(x)$ phải luôn bậc nhất
> - Lấy nguyên hàm hoặc tích phân tùy thuộc vào đề bài
> - Ngoài ra có thể nhớ nhanh kết quả sau: $f'(x) = kf(x) \Rightarrow f(x) = Ce^{kx}$

BÀI TOÁN LIÊN QUAN TỚI TỔNG

Xét bài toán tổng quát sau: $f'(x) + k(x)f(x) = g(x)$.

+ Gọi $G(x) = \int g(x)dx$ với $G(x)$ là một họ nguyên hàm của $g(x)$.

+ Nhân cả hai vế với $e^{G(x)}$ ta được:

$$e^{G(x)}f'(x) + g(x).e^{G(x)}f(x) = k(x)e^{G(x)}$$
$$\Leftrightarrow \left(e^{G(x)}f(x)\right)' = k(x)e^{G(x)} \Rightarrow f(x) = e^{-G(x)}\int k(x)e^{G(x)}dx$$

Ngoài ra còn một số dạng nữa ta sẽ tìm hiểu trong các ví dụ.

Ta sẽ cùng giải quyết dạng toán này thông qua các ví dụ sau.

Câu 1.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{0;-1\}$, thỏa mãn $x(x+1).f'(x) + f(x) = x^2 + x$ với mọi $x \in \mathbb{R}\backslash\{0;-1\}$ và $f(1) = -2\ln 2$. Biết $f(2) = a + b\ln 3$ với $a, b \in \mathbb{Q}$, tính $P = a^2 + b^2$.

A. $P = \dfrac{1}{2}$. **B.** $P = \dfrac{3}{4}$. **C.** $P = \dfrac{13}{4}$. **D.** $P = \dfrac{9}{2}$.

Lời giải

Theo như bài toán tổng quát thì $f'(x)$ đang độc lập nên ở bài toán này ta cũng cần phải độc lập $f'(x)$. Biến đổi giả thiết ta được

$$x(x+1).f'(x) + f(x) = x^2 + x \Leftrightarrow f'(x) + \frac{1}{x(x+1)}f(x) = 1$$

Ta có: $\displaystyle\int \frac{1}{x(x+1)}dx = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \Rightarrow e^{\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)} = \frac{x}{x+1}$

Nhân cả hai vế với $\dfrac{x}{x+1}$ ta thấy : $\dfrac{x}{x+1}f'(x) + \dfrac{1}{(x+1)^2}f(x) = \left[f(x).\dfrac{x}{x+1}\right]'$.

Do đó giả thiết tương đương với :

$$\left[f(x).\frac{x}{x+1}\right]' = \frac{x}{x+1} \Rightarrow f(x).\frac{x}{x+1} = \int\frac{x}{x+1}dx = \int\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx = x - \ln|x+1| + C.$$

Mà $f(1)=-2\ln 2\Rightarrow C=-1\Rightarrow f(x).\dfrac{x}{x+1}=x-\ln|x+1|-1.$

Cho $x=2$ ta được $f(2).\dfrac{2}{3}=2-\ln 3-1\Rightarrow f(2)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}\ln 3\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{3}{2}\\ b=-\dfrac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow P=\dfrac{9}{2}.$

Chọn ý **D.**

Câu 2.

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=1$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{9}{2}$. **C.** 8. **D.** 10.

Chuyên Đại học Vinh

Lời giải

Đây là một câu nhìn qua tương đối lạ, tuy nhiên ý tưởng của bài toán vẫn như bài trên đó là vẫn biến đổi một vế là đạo hàm của vế kia nhưng cách thực hiện không tương tự. Hướng giải của bài toán như sau:

Nhận thấy được $[f'(x)]^2+f(x).f''(x)=[f(x).f'(x)]'$.

Do đó giả thiết tương đương với $[f(x).f'(x)]'=15x^4+12x$.

$$f(x).f'(x)=\int(15x^4+12x)dx=3x^5+6x^2+C\xrightarrow{f(0)=f'(0)=1.}C=1\Rightarrow f(x).f'(x)=3x^5+6x^2+1$$

$$\Rightarrow\int f(x).f'(x)dx=\int(3x^5+6x^2+1)dx\Leftrightarrow\frac{f^2(x)}{2}=\frac{x^6}{2}+2x^3+x+C'.$$

Thay $x=0$ vào hai vế ta được $\dfrac{f^2(0)}{2}=C'\Rightarrow C'=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $f^2(x)=x^6+4x^3+2x+1\Rightarrow f^2(1)=8$.

Chọn ý **C.**

Câu 3.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm đến cấp 2 đồng thời liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0)=f'(0)=1$ và $f(x)+2f'(x)+f''(x)=x^3+2x^2\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$.

A. $\dfrac{107}{12}-\dfrac{21}{e}$ **B.** $\dfrac{107}{21}-\dfrac{12}{e}$ **C.** $\dfrac{107}{12}+\dfrac{21}{e}$ **D.** $\dfrac{107}{21}+\dfrac{12}{e}$

Lời giải

Đây lại là một dạng nhìn rất lạ phải không, nhưng thực chất chính là bài toán tổng quát ban đầu, tuy nhiên phải có chút tinh ý để nhận ra điều sau:

$$
\begin{aligned}
& f(x)+f'(x)+\left(f'(x)+f''(x)\right)=x^3+2x^2\\
& \Leftrightarrow f(x)+f'(x)+\left(f(x)+f'(x)\right)'=x^3+2x^2\\
& \Leftrightarrow e^x\left(f(x)+f'(x)\right)+e^x\left(f(x)+f'(x)\right)'=e^x\left(x^3+2x^2\right)\\
& \Leftrightarrow \left(e^x\left(f(x)+f'(x)\right)\right)'=e^x\left(x^3+2x^2\right)\\
& \Rightarrow e^x\left(f(x)+f'(x)\right)=e^x\left(x^3-x^2+2x-2\right)+C
\end{aligned}
$$

Mặt khác $f(0)=f'(0)=1$ nên $C=4$

$$
\begin{aligned}
& \Rightarrow e^x\left(f(x)+f'(x)\right)=e^x\left(x^3-x^2+2x-2\right)+4\\
& \Leftrightarrow \left(e^x f(x)\right)'=e^x\left(x^3-x^2+2x-2\right)+4\\
& \Rightarrow e^x f(x)=\int\left(e^x\left(x^3-x^2+2x-2\right)+4\right)dx=e^x\left(x^3-4x^2+10x-12\right)+4x+C
\end{aligned}
$$

Ta lại có:

$$f(0)=1\Rightarrow C=13\Rightarrow f(x)=x^3-4x^2+10x-12+(4x+13)e^{-x}\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx=\frac{107}{12}-\frac{21}{e}$$

Chọn ý **A.**

Câu 4.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm đến cấp 2 đồng thời liên tục trên đoạn $[0;2]$ $f(0)=1, f(2)=e^4$ và $f(x)>0, \left(f(x)\right)^2-f(x)f''(x)+\left(f'(x)\right)^2=0 \forall x\in[0;2]$. Tính $f(1)$.

A. e **B.** $e^{\frac{3}{4}}$ **C.** e^2 **D.** $e^{\frac{3}{2}}$

Lời giải

Bài này nhìn qua thì thấy giống bài trước, có lẽ bạn đọc đến đây sẽ tập trung đưa về như bài trước nhưng điều này gần như không thể bởi vì sự xuất hiện "vô duyên" của dấu "-". Vậy làm sao để xử lý được dấu "-"? Ý tưởng thì vẫn là thế, tuy nhiên để ý rằng đạo hàm của hàm nào ra dấu "-"? Rất đơn giản đó là hàm phân thức!

Đến đây ta biến đổi bài toán:

$$\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'=\frac{f(x)f''(x)-\left(f'(x)\right)^2}{\left(f(x)\right)^2}=1\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=x+C\Rightarrow\ln f(x)=\int(x+C)dx=\frac{x^2}{2}+Cx+D$$

Mặt khác:

$$f(0)=1, f(2)=e^6\Rightarrow\begin{cases}D=0\\4=2+2C+D\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C=1\\D=0\end{cases}\Rightarrow\ln f(x)=\frac{x^2}{2}+x\Rightarrow f(x)=e^{\frac{x^2}{2}+x}$$

Do đó $f(1)=e^{\frac{3}{2}}$.

Chọn ý **D.**

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp 2 liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=-1, f(1)=-\frac{2}{3}$ và $f''(x)f(x)-2[f'(x)]^2=x[f(x)]^3, \forall x\in[0;1]$. Tích phân $\int_0^1(3x^2+2)f(x)dx$ bằng?

A. $-\ln\frac{3}{2}$ **B.** $-3\ln\frac{3}{2}$ **C.** $-2\ln\frac{3}{2}$ **D.** $-6\ln\frac{3}{2}$

Chọn ý **D.**

2. Cho hàm số $f(x)>0, \forall x\ge 0$ có đạo hàm cấp 2 liên tục trên nửa khoảng $[0;+\infty)$ thỏa mãn $f''(x)f(x)-2[f'(x)]^2+xf^3(x)=0, f'(0)=0, f(0)=1$. Tính $f(1)$?

A. $\frac{2}{3}$ **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** $\frac{6}{7}$ **D.** $\frac{7}{6}$

Chọn ý **D.**

Câu 5.

Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1;2]$, thỏa mãn $f(1)=g(1)=0$ và

$$\begin{cases}\dfrac{x}{(x+1)^2}g(x)+2017x=(x+1)f'(x)\\ \dfrac{x^3}{x+1}g'(x)+f(x)=2018x^2\end{cases}, \forall x\in[1;2].$$ Tính $I=\int\limits_1^2\left[\frac{x}{x+1}g(x)-\frac{x+1}{x}f(x)\right]dx.$

A. $I=\frac{1}{2}.$ **B.** $I=1.$ **C.** $I=\frac{3}{2}.$ **D.** $I=2.$

Lời giải

Bài này có vẻ tương đối khó khăn rồi do đây là 2 hàm độc lập, tuy nhiên ta chú ý vẫn bám sát ý tưởng của các bài toán trong mục này!

Từ giả thiết ta có $\begin{cases}\dfrac{1}{(x+1)^2}g(x)-\dfrac{(x+1)}{x}f'(x)=-2017\\ \dfrac{x}{x+1}g'(x)+\dfrac{1}{x^2}f(x)=2018\end{cases}.$

Cộng lại vế theo vế ta được:

$$\left[\frac{1}{(x+1)^2}g(x)+\frac{x}{x+1}g'(x)\right]-\left[\frac{(x+1)}{x}f'(x)-\frac{1}{x^2}f(x)\right]=1$$

$$\Leftrightarrow\left[\frac{x}{x+1}g(x)\right]'-\left[\frac{(x+1)}{x}f(x)\right]'=1\Rightarrow\frac{x}{x+1}g(x)-\frac{(x+1)}{x}f(x)=x+C.$$

Mà ta lại có $f(1)=g(1)=0\Rightarrow C=-1\Rightarrow I=\int\limits_1^2\left[\frac{x}{x+1}g(x)-\frac{x+1}{x}f(x)\right]dx=\int\limits_1^2(x-1)dx=\frac{1}{2}.$

Chọn ý **A.**

MỘT VÀI BÀI TOÁN TỔNG HỢP

ĐỀ BÀI

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm tại mọi $x \in (0;+\infty)$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f(x) = x(\sin x + f'(x)) + \cos x$ và $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\sin x dx = -4$. Khi đó giá trị của $f(\pi)$ nằm trong khoảng nào?

A. $(6;7)$ **B.** $(5;6)$ **C.** $(12;13)$ **D.** $(11;12)$

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x).[f(x)]^{2018} = x.e^x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 1$. Hỏi phương trình $f(x) = -\frac{1}{e}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 2

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(0).f'(2) \neq 0$ và $g(x)f'(x) = x(x-2)e^x$. Tính giá trị của tích phân $I = \int_0^2 f(x).g'(x)dx$?

A. -4 **B.** $e-2$ **C.** 4 **D.** $2-e$

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;4]$, thỏa mãn điều kiện $f(x) + f'(x) = e^{-x}\sqrt{2x+1}$ với mọi $x \in [0;4]$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $e^4f(4) - f(0) = \frac{26}{3}$.

B. $e^4f(4) - f(0) = 3e$.

C. $e^4f(4) - f(0) = e^4 - 1$.

D. $e^4f(4) - f(0) = 3$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x) - 2018f(x) = 2018x^{2017}e^{2018x}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2018$. Tính giá trị $f(1)$.

A. $f(1) = 2018e^{-2018}$.

B. $f(1) = 2017e^{2018}$.

C. $f(1) = 2018e^{2018}$.

D. $f(1) = 2019e^{2018}$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x) + xf(x) = 2xe^{-x^2}$ và $f(0) = -2$. Tính $f(1)$.

A. $f(1) = e$. **B.** $f(1) = \frac{1}{e}$. **C.** $f(1) = \frac{2}{e}$. **D.** $f(1) = -\frac{2}{e}$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, thỏa mãn hệ thức $f(x) + \tan x.f'(x) = \frac{x}{\cos^3 x}$. Biết rằng $\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right) = a\pi\sqrt{3} + b\ln 3$ trong đó $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$.

A. $P = -\frac{4}{9}$. **B.** $P = -\frac{2}{9}$. **C.** $P = \frac{7}{9}$. **D.** $P = \frac{14}{9}$.

Câu 8. Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1;4]$, thỏa mãn $\begin{cases} f(1)+g(1)=4 \\ g(x)=-xf'(x) \\ f(x)=-xg'(x) \end{cases}$ với mọi $x\in[1;4]$. Tính tích phân $I=\int\limits_1^4 [f(x)+g(x)]dx$.

A. $I=3\ln 2$. **B.** $I=4\ln 2$. **C.** $I=6\ln 2$. **D.** $I=8\ln 2$.

Câu 9. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$, thỏa mãn $f'(0).f'(2)\neq 0$ và $g(x).f'(x)=x(x-2)e^x$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2 f(x).g'(x)dx$.

A. $I=-4$. **B.** $I=4$. **C.** $I=e-2$. **D.** $I=2-e$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định, liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f'(0)=-1$ và $\begin{cases} [f'(x)]^2=f''(x) \\ f'(x)\neq 0 \end{cases}$ với mọi $x\in[0;1]$. Đặt $P=f(1)-f(0)$, khẳng định nào sau đây đúng

A. $-2\le P\le -1$. **B.** $-1\le P\le 0$. **C.** $0\le P\le 1$. **D.** $1\le P\le 2$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)>0,\forall x\ge 0$, $f'(0)=0;f(0)=1$ và đồng thời điều kiện $f''(x)f(x)-2[f'(x)]^2+xf^3(x)=0$. Tính giá trị của $f(1)$?

A. $\frac{2}{3}$ **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** $\frac{6}{7}$ **D.** $\frac{7}{6}$

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, thỏa mãn $f(0)=\sqrt{3}$ và $f(x).f'(x)=\cos x.\sqrt{1+f^2(x)}, \forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$.

A. $m=\frac{\sqrt{21}}{2}$, $M=2\sqrt{2}$. **B.** $m=\frac{5}{2}$, $M=3$

C. $m=\frac{\sqrt{5}}{2}$, $M=\sqrt{3}$. **D.** $m=\sqrt{3}$, $M=2\sqrt{2}$.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f'(x).e^{f^3(x)-x^2-1}-\frac{2x}{f^2(x)}=0$ và $f(0)=1$. Tích phân $\int\limits_0^{\sqrt{7}} x.f(x)dx$ bằng

A. $\frac{2\sqrt{7}}{3}$ **B.** $\frac{15}{4}$ **C.** $\frac{45}{8}$ **D.** $\frac{5\sqrt{7}}{4}$

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;1)$ và $f(x)\neq 0$, $\forall x\in(0;1)$. Biết rằng $f(x)$ thỏa mãn $f\left(\frac{1}{2}\right)=a$, $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=b$ và $x+xf'(x)=2f(x)-4$, $\forall x\in(0;1)$. Tính tích phân $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x.\cos x+2\sin 2x}{f^2(\sin x)}dx$ theo a và b.

A. $I=\frac{3a+b}{4ab}$ **B.** $I=\frac{3b+a}{4ab}$ **C.** $I=\frac{3b-a}{4ab}$ **D.** $I=\frac{3a-b}{4ab}$

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn $f'(0)=9$ và $9f''(x)+\left[f'(x)-x\right]^2=9$. Tính $T=f(1)-f(0)$.

A. $T=2+9\ln 2$ **B.** $T=9$ **C.** $T=\frac{1}{2}+9\ln 2$ **D.** $T=2-9\ln 2$

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 2 liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn đồng thời các điều kiện $\begin{cases} f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}, \\ f(0)=f'(0)=1, \\ x\left[f(x)\right]^2+\left[f'(x)\right]^2=f(x)f''(x),\forall x\in\mathbb{R}. \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{1}{2}<\ln f(1)<1$ **B.** $0<\ln f(1)<\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{3}{2}<\ln f(1)<2$ **D.** $1<\ln f(1)<\frac{3}{2}$

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm khác 0 và liên tục đến cấp hai trên đoạn $[1;2]$. Biết $\ln 2f'(1)=f(1)=1, f'(x)=\sqrt[3]{\frac{f'(x)-xf''(x)}{2^{f(x)-1}\ln^2 2}},\forall x\in[1;2]$. Tính tích phân $I=\int_1^2 xf(x)dx$?

A. $\log_2 5+\frac{1}{2\ln 2}+1$ **B.** $3\log_2 5-\frac{3}{4\ln 2}-2$

C. $\log_2 5-\frac{3}{\ln 2}+2$ **D.** $2\log_2 5-\frac{3}{2\ln 2}-1$

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn đồng thời 2 điều kiện $2\left[f(2)\right]^2-\left[f(1)\right]^2=63; 2\left[f(x)\right]^2+x^2\left[f'(x)\right]^2=27x^2,\forall x\in[1;2]$. Tính giá trị của tích phân $\int_1^2\left[f(x)\right]^2dx$

A. 15 **B.** 18 **C.** 21 **D.** 25

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1, f(x)>0$ và đồng thời $f(x)\ln f(x)=xf'(x)\left[f(x)-1\right],\forall x\in[0;1]$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x)dx$.

A. $\frac{e-1}{3}$ **B.** $\frac{e-6}{6}$ **C.** 4 **D.** 1

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $f(1)=\frac{7}{3}$ và đồng thời $\frac{3x^3f(x)}{\left[f'(x)\right]^2+xf'(x)+x^2}=f'(x)-x,\forall x\in[1;2]$. Tính giá trị của $f(2)$?

A. $\frac{7\sqrt{7}-1}{3}$ **B.** $\frac{7\sqrt{7}+1}{3}$ **C.** $\frac{2\sqrt{7}-1}{3}$ **D.** $\frac{2\sqrt{7}+1}{3}$

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f^3(x).\left[4\left(f'(x)\right)^2+f(x).f''(x)\right]=e^x, \forall x\in\mathbb{R}$, biết $f(0)=0$. Khi đó $\int\limits_0^{5\ln 2} f^5(x)dx$ bằng?

A. $5\left(31-\frac{25\ln^2 2}{2}-5\ln 2\right)$ **B.** $\frac{1}{5}\left(31-\frac{355\ln 2}{2}\right)$

C. $\frac{1}{5}\left(31-\frac{25\ln^2 2}{2}-5\ln 2\right)$ **D.** $5\left(31-\frac{355\ln 2}{2}\right)$

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ thỏa mãn $f'(1)=g(1)=1; f(2).g(2)=f(1)$ và đồng thời $1-f'(x)g'(x)=g(x)\left[f''(x)+\frac{1}{x}f'(x)\right], \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Tính giá trị của biểu thức tích phân $I=\int_1^2 f(x)g'(x)dx$?

A. $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$ **B.** $-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$ **C.** $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$ **D.** $-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$

Câu 23. Cho $f''(x).f(x)-2\left[f'(x)\right]^2+x.f(x)^3=0$. Biết $f'(0)=0; f'(1)=-\frac{1}{2}, f(1)>0; f''(0)\neq 0$. Tính giá trị của $\int\limits_0^1 f'(x)dx$

A.3.. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 24. Cho $f'(x).2f(x)+f(x)+f'(x).x=4x$. Biết đồ thị hàm số $f(x)$ đồng biến trên tập R, $f(0)=0$. Tìm nghiệm của phương trình $\cos 3f(x)=-4x^3+3x$ trên khoảng $(0;\pi)$.

A. $\frac{\pi}{2}$. **B.** 0. **C.** $\frac{\pi}{3}$. **D.** π.

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\begin{cases}\frac{x^2f(x)}{x-1}-\frac{f'(x)}{x-1}=x^2+x\\ \frac{f(x)}{x-1}-\frac{x^2f'(x)}{x-1}=-xf(x)\end{cases}$ (*). Tính $f(0)$?

A. 0. **B.** $\frac{-1}{6}$. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\begin{cases}2.f'(x).f(x)-2xf'(x)-2f(x)-1=e^{2f(x)-3x-1}\\ e^{f(x)^2-2xf(x)-x}=e^{-x^2}\left[2f'(x)-2x-3\right]\end{cases}$ (*). Biết $f(0)=1$. Tính $\frac{1}{f(0).f(1)}+\frac{1}{f(1).f(2)}+...\frac{1}{f(99).f(100)}$?

A. $\frac{98}{99}$. **B.** $\frac{101}{100}$. **C.** $\frac{99}{100}$. **D.** $\frac{100}{101}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm tại mọi $x\in(0;+\infty)$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f(x)=x(\sin x+f'(x))+\cos x$ và $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\sin x dx=-4$. Khi đó giá trị của $f(\pi)$ nằm trong khoảng nào?

A. $(6;7)$ **B.** $(5;6)$ **C.** $(12;13)$ **D.** $(11;12)$

Lời giải

Ta có:

$$f(x)=x(\sin x+f'(x))+\cos x \Rightarrow \frac{f(x)-xf'(x)}{x^2}=\frac{\sin x}{x}+\frac{\cos x}{x^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\left(\frac{1}{x}\cos x\right)' \Rightarrow \frac{f(x)}{x}=\frac{1}{x}\cos x+c \Rightarrow f(x)=\cos x+cx$$

Khi đó: $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\sin x dx=-4 \Leftrightarrow \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(\cos x+cx)\sin x dx=-4$

$$\Leftrightarrow \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos x\sin x dx+c\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}x\sin x dx=-4 \Leftrightarrow 0+c(-2)=-4 \Leftrightarrow c=2$$

$$\Rightarrow f(x)=\cos x+2x \Rightarrow f(\pi)=2\pi-1\in(5;6).$$

Chọn ý **B.**

Câu 2.

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x).[f(x)]^{2018}=x.e^x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=1$. Hỏi phương trình $f(x)=-\frac{1}{e}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 2

Lời giải

Ta có: $\int f'(x).[f(x)]^{2018}dx=\int x.e^x dx \Leftrightarrow \int [f(x)]^{2018}df(x)=(x-1).e^x+C$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2019}.[f(x)]^{2019}=(x-1).e^x+C \Leftrightarrow [f(x)]^{2019}=2019(x-1).e^x+2019C.$$

Do $f(1)=1$ nên $2019C=1$ hay $[f(x)]^{2019}=2019(x-1).e^x+1$.

Ta có: $f(x)=-\frac{1}{e} \Leftrightarrow [f(x)]^{2019}=-\frac{1}{e^{2019}} \Leftrightarrow 2019(x-1).e^x+1+\frac{1}{e^{2019}}=0$.

Xét hàm số $g(x)=2019(x-1).e^x+1+\frac{1}{e^{2019}}$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $\begin{cases} g'(x)=2019x.e^{x};g'(x)=0\Leftrightarrow x=0;g(0)=-2019+1+\dfrac{1}{e^{2019}}<0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty;\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=1+\dfrac{1}{e^{2019}}>0 \end{cases}$

Bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$1+e^{-2019}$	$\searrow$	$g(0)$	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó phương trình $f(x)=-\dfrac{1}{e}$ có đúng 2 nghiệm.

Chọn ý **D.**

Câu 3.

Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(0).f'(2)\neq 0$ và $g(x)f'(x)=x(x-2)e^{x}$. Tính giá trị của tích phân $I=\int\limits_0^2 f(x).g'(x)dx$?

A. -4 **B.** $e-2$ **C.** 4 **D.** $2-e$

Lời giải

Ta có $g(x)f'(x)=x(x-2)e^{x}\Rightarrow g(0)=g(2)=0$ (vì $f'(0).f'(2)\neq 0$)

Khi đó tích phân cần tính trở thành:

$$I=\int\limits_0^2 f(x).g'(x)dx=\int\limits_0^2 f(x)dg(x)$$

$$=\left(f(x).g(x)\right)\Big|_0^2-\int\limits_0^2 g(x).f'(x)dx=-\int\limits_0^2\left(x^2-2x\right)e^{x}dx=4.$$

Chọn ý **C.**

Câu 4.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;4]$, thỏa mãn điều kiện $f(x)+f'(x)=e^{-x}\sqrt{2x+1}$ với mọi $x\in[0;4]$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $e^4f(4)-f(0)=\dfrac{26}{3}$. **B.** $e^4f(4)-f(0)=3e$.

C. $e^4f(4)-f(0)=e^4-1$. **D.** $e^4f(4)-f(0)=3$.

Lời giải

Nhân hai vế cho e^{x} để thu được đạo hàm đúng, ta được

$$e^{x}f(x)+e^{x}f'(x)=\sqrt{2x+1}\Leftrightarrow\left[e^{x}f(x)\right]'=\sqrt{2x+1}.$$

Suy ra $e^x f(x)=\int\sqrt{2x+1}dx=\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}+C.$

Vậy $e^4 f(4)-f(0)=\frac{26}{3}.$

Chọn ý **A.**

Câu 5.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x)-2018f(x)=2018x^{2017}e^{2018x}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2018.$ Tính giá trị $f(1).$

A. $f(1)=2018e^{-2018}.$ **B.** $f(1)=2017e^{2018}.$

C. $f(1)=2018e^{2018}.$ **D.** $f(1)=2019e^{2018}.$

Lời giải

Nhân hai vế cho e^{-2018x} để thu được đạo hàm đúng, ta được

$$f'(x)e^{-2018x}-2018f(x)e^{-2018x}=2018x^{2017}\Leftrightarrow\left[f(x)e^{-2018x}\right]'=2018x^{2017}$$

Suy ra $f(x)e^{-2018x}=\int 2018x^{2017}dx=x^{2018}+C.$

Thay $x=0$ vào hai vế ta được $C=2018\Rightarrow f(x)=\left(x^{2018}+2018\right)e^{2018x}$

Vậy $f(1)=2019e^{2018}.$

Chọn ý **D.**

Câu 6.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x)+xf(x)=2xe^{-x^2}$ và $f(0)=-2.$ Tính $f(1).$

A. $f(1)=e.$ **B.** $f(1)=\frac{1}{e}.$ **C.** $f(1)=\frac{2}{e}.$ **D.** $f(1)=-\frac{2}{e}.$

Lời giải

Nhân hai vế cho $e^{\frac{x^2}{2}}$ để thu được đạo hàm đúng, ta được

$$f'(x)e^{\frac{x^2}{2}}+f(x)xe^{\frac{x^2}{2}}=2xe^{-\frac{x^2}{2}}\Leftrightarrow\left[e^{\frac{x^2}{2}}f(x)\right]'=2xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

Suy ra $e^{\frac{x^2}{2}}f(x)=\int 2xe^{-\frac{x^2}{2}}dx=-2e^{-\frac{x^2}{2}}+C.$

Thay $x=0$ vào hai vế ta được $C=0\Rightarrow f(x)=-2e^{-x^2}$. Vậy $f(1)=-2e^{-1}=-\frac{2}{e}.$

Chọn ý **D.**

TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC

Câu 7.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, thỏa mãn hệ thức $f(x)+\tan x.f'(x)=\frac{x}{\cos^3 x}$. Biết rằng $\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)=a\pi\sqrt{3}+b\ln 3$ trong đó $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b$.

A. $P=-\frac{4}{9}$. **B.** $P=-\frac{2}{9}$. **C.** $P=\frac{7}{9}$. **D.** $P=\frac{14}{9}$.

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có

$$\cos xf(x)+\sin xf'(x)=\frac{x}{\cos^2 x}\Leftrightarrow\left[\sin xf(x)\right]'=\frac{x}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow\sin xf(x)=\int\frac{x}{\cos^2 x}dx=x\tan x+\ln\left|\cos x\right|+C$$

- Với $x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi\sqrt{3}}{3}-\ln 2\Rightarrow\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}-2\ln 2+2C.$
- Với $x=\frac{\pi}{6}\Rightarrow\frac{1}{2}f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi\sqrt{3}}{18}+\frac{1}{2}\ln 3-\ln 2+C\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi\sqrt{3}}{9}+\ln 3-2\ln 2+2C$

$$\Rightarrow\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{5\pi\sqrt{3}}{9}-\ln 3\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{5}{9}\\b=-1\end{cases}\Rightarrow P=a+b=-\frac{4}{9}$$

Chọn ý **A.**

Câu 8.

Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1;4]$, thỏa mãn $\begin{cases}f(1)+g(1)=4\\g(x)=-xf'(x)\\f(x)=-xg'(x)\end{cases}$ với mọi $x\in[1;4]$. Tính tích phân $I=\int_1^4\left[f(x)+g(x)\right]dx$.

A. $I=3\ln 2$. **B.** $I=4\ln 2$. **C.** $I=6\ln 2$. **D.** $I=8\ln 2$.

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có

$$f(x)+g(x)=-x.f'(x)-x.g'(x)\Leftrightarrow\left(f(x)+x.f'(x)\right)+\left(g(x)+x.g'(x)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x.f(x)\right)'+\left(x.g(x)\right)'=0\Rightarrow x.f(x)+x.g(x)=C\Rightarrow f(x)+g(x)=\frac{C}{x}$$

Mà $f(1)+g(1)=4\Rightarrow C=4\Rightarrow I=\int_1^4\left[f(x)+g(x)\right]dx=\int_1^4\frac{4}{x}dx=8\ln 2$

Chọn ý **D.**

Câu 9.

Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$, thỏa mãn $f'(0).f'(2)\neq 0$ và $g(x).f'(x)=x(x-2)e^x$. Tính tích phân $I=\int_0^2 f(x).g'(x)dx$.

A. $I=-4$. **B.** $I=4$. **C.** $I=e-2$. **D.** $I=2-e$.

Lời giải

Từ giả thiết $f'(0).f'(2)\neq 0 \Rightarrow \begin{cases} f'(0)\neq 0 \\ f'(2)\neq 0 \end{cases}$

Do đó từ $g(x).f'(x)=x(x-2)e^x \Rightarrow \begin{cases} g(2)=\dfrac{2(2-2)e^x}{f'(2)}=0 \\ g(0)=\dfrac{0(0-2)e^x}{f'(0)}=0 \end{cases}$

Tích phân từng phần ta được $I=\left[f(x).g(x)\right]\Big|_0^2-\int_0^2 g(x).f'(x)dx$

$$=f(2).g(2)-f(0).g(0)-\int_0^2 x(x-2)e^x dx=-\int_0^2 x(x-2)e^x dx=4.$$

Chọn ý **B.**

Câu 10.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định, liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f'(0)=-1$ và $\begin{cases} \left[f'(x)\right]^2=f''(x) \\ f'(x)\neq 0 \end{cases}$ với mọi $x\in[0;1]$. Đặt $P=f(1)-f(0)$, khẳng định nào sau đây đúng

A. $-2\le P\le -1$. **B.** $-1\le P\le 0$. **C.** $0\le P\le 1$. **D.** $1\le P\le 2$.

Lời giải

Nhận thấy $P=f(1)-f(0)=\int_0^1 f'(x)dx$ nên ta cần tìm $f'(x)$.

Biến đổi giả thiết ta có

$$\frac{f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2}=1\Rightarrow \int\frac{f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2}dx=\int dx \Leftrightarrow -\frac{1}{f'(x)}=x+C\Leftrightarrow f'(x)=-\frac{1}{x+C}$$

Mà $f'(0)=-1\Rightarrow C=1\Rightarrow f'(x)=-\dfrac{1}{x+1}$

Vậy $P=\int_0^1 f'(x)dx=-\int_0^1\dfrac{1}{x+1}dx=-\ln 2\approx -0,69$

Chọn ý **B.**

Câu 11.

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)>0,\forall x\geq 0$, $f'(0)=0;f(0)=1$ và đồng thời điều kiện $f''(x)f(x)-2\left[f'(x)\right]^2+xf^3(x)=0$. Tính giá trị của $f(1)$?

A. $\frac{2}{3}$ **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** $\frac{6}{7}$ **D.** $\frac{7}{6}$

Lời giải

Biến đổi giả thiết tương đương

$$\frac{f'(x)d\left(f'(x)\right)-f'(x)d\left(f^2(x)\right)}{f^4(x)}=-x\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=\frac{-x^2}{2}+C\Rightarrow C=0$$

$$\Rightarrow\frac{1}{f(x)}=\frac{x^3}{6}+K\Rightarrow K=1\Rightarrow f(x)=\frac{6}{x^3+6}\Rightarrow f(1)=\frac{6}{7}$$

Chọn ý **C.**

Câu 12.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, thỏa mãn $f(0)=\sqrt{3}$ và $f(x).f'(x)=\cos x.\sqrt{1+f^2(x)},\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$.

A. $m=\frac{\sqrt{21}}{2}$, $M=2\sqrt{2}$. **B.** $m=\frac{5}{2}$, $M=3$

C. $m=\frac{\sqrt{5}}{2}$, $M=\sqrt{3}$. **D.** $m=\sqrt{3}$, $M=2\sqrt{2}$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có

$$f(x).f'(x)=\cos x.\sqrt{1+f^2(x)}\Rightarrow\frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}=\cos x\Rightarrow\int\frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}dx=\sin x+C$$

Đặt $t=\sqrt{1+f^2(x)}\Rightarrow t^2=1+f^2(x)\Rightarrow tdt=f(x)f'(x)dx$.

Thay vào ta được $\int dt=\sin x+C\Rightarrow t=\sin x+C\Rightarrow\sqrt{1+f^2(x)}=\sin x+C$.

Do $f(0)=\sqrt{3}\Rightarrow C=2$.

Vậy $\sqrt{1+f^2(x)}=\sin x+2\Rightarrow f^2(x)=\sin^2 x+4\sin x+3$

$\Rightarrow f(x)=\sqrt{\sin^2 x+4\sin x+3}$, vì hàm số $f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Ta có $\frac{\pi}{6}\leq x\leq\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}\leq\sin x\leq 1$, xét hàm số $g(t)=t^2+4t+3$ có hoành độ đỉnh $t=-2$ loại.

Suy ra $\max\limits_{\left[\frac{1}{2};1\right]} g(t) = g(1) = 8$, $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};1\right]} g(t) = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{21}{4}$.

Suy ra $\max\limits_{\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sqrt{2}$, $\min\limits_{\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]} f(x) = g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{21}}{2}$.

Chọn ý **A.**

Câu 13.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f'(x).e^{f^3(x)-x^2-1} - \frac{2x}{f^2(x)} = 0$ và $f(0) = 1$.

Tích phân $\int\limits_0^{\sqrt{7}} x.f(x)dx$ bằng

A. $\frac{2\sqrt{7}}{3}$ **B.** $\frac{15}{4}$ **C.** $\frac{45}{8}$ **D.** $\frac{5\sqrt{7}}{4}$

Lời giải

Ta có $3f'(x).e^{f^3(x)-x^2-1} - \frac{2x}{f^2(x)} = 0 \Leftrightarrow 3f^2(x).f'(x).e^{f^3(x)} = 2x.e^{x^2+1}$

Suy ra $e^{f^3(x)} = e^{x^2+1} + C$. Mặt khác, vì $f(0) = 1$ nên $C = 0$.

Do đó $e^{f^3(x)} = e^{x^2+1} \Leftrightarrow f^3(x) = x^2 + 1 \Leftrightarrow f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$.

Vậy $\int\limits_0^{\sqrt{7}} x.f(x)dx = \int\limits_0^{\sqrt{7}} x.\sqrt[3]{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{7}} \sqrt[3]{x^2+1}\,d(x^2+1) = \frac{3}{8}\left[(x^2+1)\sqrt[3]{x^2+1}\right]\Big|_0^{\sqrt{7}} = \frac{45}{8}$.

Chọn ý **C.**

Câu 14.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;1)$ và $f(x) \neq 0$, $\forall x \in (0;1)$. Biết rằng $f(x)$ thỏa mãn $f\left(\frac{1}{2}\right) = a$, $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = b$ và $x + xf'(x) = 2f(x) - 4$, $\forall x \in (0;1)$. Tính tích phân $I = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x.\cos x + 2\sin 2x}{f^2(\sin x)}dx$ theo a và b.

A. $I = \frac{3a+b}{4ab}$ **B.** $I = \frac{3b+a}{4ab}$ **C.** $I = \frac{3b-a}{4ab}$ **D.** $I = \frac{3a-b}{4ab}$

Lời giải

Theo giả thiết ta có:

$$x + xf'(x) = 2f(x) - 4 \Leftrightarrow x + 4 = 2f(x) - xf'(x)$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x = 2xf(x) - x^2f'(x) \Leftrightarrow \frac{x^2+4x}{f^2(x)} = \frac{2xf(x) - x^2f'(x)}{f^2(x)} \Leftrightarrow \frac{x^2+4x}{f^2(x)} = \left(\frac{x^2}{f(x)}\right)'.$$

Tính tích phân $I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x.\cos x+2\sin 2x}{f^2(\sin x)}dx=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x.\cos x+4\sin x.\cos x}{f^2(\sin x)}dx$

Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos xdx$, đổi cận $x=\frac{\pi}{6}\Rightarrow t=\frac{1}{2}$, $x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{t^2+4t}{f^2(t)}dt=\left.\frac{t^2}{f(t)}\right|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{f\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{3}{4b}-\frac{1}{4a}=\frac{3a-b}{4ab}$.

Chọn ý **D.**

Câu 15.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn $f'(0)=9$ và $9f''(x)+[f'(x)-x]^2=9$. Tính $T=f(1)-f(0)$.

A. $T=2+9\ln 2$ **B.** $T=9$ **C.** $T=\frac{1}{2}+9\ln 2$ **D.** $T=2-9\ln 2$

Lời giải

Ta có $9f''(x)+[f'(x)-x]^2=9\Rightarrow 9(f''(x)-1)=-[f'(x)-x]^2\Rightarrow -\frac{f''(x)-1}{[f'(x)-x]^2}=\frac{1}{9}$.

Lấy nguyên hàm hai vế $-\int\frac{f''(x)-1}{[f'(x)-x]^2}dx=\int\frac{1}{9}dx\Rightarrow\frac{1}{f'(x)-x}=\frac{x}{9}+C$.

Do $f'(0)=9$ nên $C=\frac{1}{9}$ suy ra $f'(x)-x=\frac{9}{x+1}$ $\Rightarrow f'(x)=\frac{9}{x+1}+x$

Vậy $T=f(1)-f(0)=\int\limits_0^1\left(\frac{9}{x+1}+x\right)dx=\left.\left(9\ln|x+1|+\frac{x^2}{2}\right)\right|_0^1=9\ln 2+\frac{1}{2}$.

Câu 16.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 2 liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn đồng thời các điều kiện $\begin{cases}f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R},\\ f(0)=f'(0)=1,\\ x[f(x)]^2+[f'(x)]^2=f(x)f''(x),\forall x\in\mathbb{R}.\end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{1}{2}<\ln f(1)<1$ **B.** $0<\ln f(1)<\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{3}{2}<\ln f(1)<2$ **D.** $1<\ln f(1)<\frac{3}{2}$

Lời giải

Ta có

$$x[f(x)]^2+[f'(x)]^2=f(x)f''(x)\Leftrightarrow\frac{f(x)f''(x)-[f'(x)]^2}{[f(x)]^2}=x\Leftrightarrow\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]'=x\ \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{x^2}{2}+C.$$

Lại có $f(0)=f'(0)=1\Rightarrow C=1$.

Ta có $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{x^2}{2}+1\Leftrightarrow\int\limits_0^1\dfrac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\limits_0^1\left(\dfrac{x^2}{2}+1\right)dx\Leftrightarrow\ln(f(x))\Big|_0^1=\dfrac{7}{6}\Leftrightarrow\ln f(1)=\dfrac{7}{6}$.

$\Rightarrow 1<\ln(f(1))<\dfrac{3}{2}$.

Chọn ý **D.**

Câu 17.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm khác 0 và liên tục đến cấp hai trên đoạn $[1;2]$. Biết $\ln 2f'(1)=f(1)=1, f'(x)=\sqrt[3]{\dfrac{f'(x)-xf''(x)}{2^{f(x)-1}\ln^2 2}}, \forall x\in[1;2]$. Tính tích phân $I=\int_1^2 xf(x)dx$?

A. $\log_2 5+\dfrac{1}{2\ln 2}+1$ **B.** $3\log_2 5-\dfrac{3}{4\ln 2}-2$

C. $\log_2 5-\dfrac{3}{\ln 2}+2$ **D.** $2\log_2 5-\dfrac{3}{2\ln 2}-1$

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có:

$$f'(x)=\sqrt[3]{\frac{f'(x)-xf''(x)}{2^{f(x)-1}\ln^2 2}}\Leftrightarrow f'(x).2^{f(x)}\ln^2 2=\frac{2f'(x)-2xf''(x)}{\left[f'(x)\right]^2}$$

$$\Leftrightarrow\left(2^{f(x)}\ln 2\right)'=\left(\frac{2x}{f'(x)}\right)'\Leftrightarrow 2^{f(x)}\ln 2=\frac{2x}{f'(x)}+C_1$$

Vì $\ln 2f'(1)=f(1)=1\Rightarrow C_1=0$. Khi đó ta được

$$f'(x)2^{f(x)}\ln 2=2x\Leftrightarrow\left(2^{f(x)}\right)'=2x\Leftrightarrow 2^{f(x)}=\int 2xdx=x^2+C_2\Leftrightarrow f(x)=\log_2\left(x^2+C_2\right)$$

Vì $f(1)=1\Rightarrow C_2=1\Rightarrow f(x)=\log_2\left(x^2+1\right)$. Sử dụng tích phân từng phần ta có

$$I=\int_1^2 x\log_2\left(x^2+1\right)dx=\frac{1}{2}x^2\log_2\left(x^2+1\right)\Big|_1^2-\frac{1}{\ln 2}\int_1^2\frac{x^3}{x^2+1}dx$$

$$=2\log_2 5-\frac{1}{2}-\frac{1}{\ln 2}\int_0^1\left(x-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=2\log_2 5-\frac{1}{2}-\frac{1}{\ln 2}\left[\frac{x^2}{2}\Big|_1^2-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_1^2\right]$$

$$=2\log_2 5-\frac{3}{\ln 2}-1$$

Chọn ý **D.**

Câu 18.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn đồng thời 2 điều kiện $2[f(2)]^2-[f(1)]^2=63; 2[f(x)]^2+x^2[f'(x)]^2=27x^2, \forall x\in[1;2]$. Tính giá trị của tích phân $\int_1^2[f(x)]^2dx$

A. 15 **B.** 18 **C.** 21 **D.** 25

Lời giải

Theo giả thiết ta có

$$\int_1^2[f(x)]^2dx+\int_1^2[f(x)]^2dx+\int_1^2x^2[f'(x)]^2dx=\int_1^2 27x^2dx=63\ (1)$$

Xét tích phân $I=\int_1^2[f(x)]^2dx$, đặt $\begin{cases}u=[f(x)]^2\\dv=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2f'(x)f(x)\\v=x\end{cases}$

$$\Rightarrow I=x[f(x)]^2\Big|_1^2-2\int_1^2xf'(x)f(x)dx=63-2\int_1^2xf'(x)f(x)dx$$

Ta có:

$$(1)\Leftrightarrow\int_1^2[f(x)]^2dx-2\int_1^2xf'(x)f(x)dx+\int_1^2x^2[f'(x)]^2dx=0\Leftrightarrow\int_1^2[f(x)-xf'(x)]^2dx=0$$

Do đó $f(x)-xf'(x)=0\Leftrightarrow\left(\frac{1}{x}f(x)\right)'=0\Leftrightarrow f(x)\equiv Cx$

Vậy $2(Cx)^2+x^2C^2=3C^2x^2=27x^2\Rightarrow C=3\Rightarrow\int_1^2[f(x)]^2dx=21$

Chọn ý **C.**

Trong bài toán này ta đã sử dụng tính chất sau của tích phân:

Nếu $\int_a^b[f(x)]^2dx=0$ thì ta suy ra $f(x)=0$

Câu 19.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1, f(x)>0$ và đồng thời $f(x)\ln f(x)=xf'(x)[f(x)-1], \forall x\in[0;1]$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x)dx$.

A. $\frac{e-1}{3}$ **B.** $\frac{e-6}{6}$ **C.** 4 **D.** 1

Lời giải

Biến đổi giả thiết tương đương

$$\Leftrightarrow f(x)\ln f(x)+xf'(x)=xf'(x)f(x)\Leftrightarrow\ln f(x)+x\frac{f'(x)}{f(x)}=xf'(x)$$

$$\Leftrightarrow(x\ln f(x))'=xf'(x)\Leftrightarrow x\ln f(x)\Big|_0^1=\int_0^1xf'(x)dx=xf(x)\Big|_0^1-\int_0^1f(x)dx$$

Vậy ta được $\int_0^1f(x)dx=f(1)=1$

Chọn ý **D.**

Câu 20.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $f(1)=\dfrac{7}{3}$ và đồng thời $\dfrac{3x^3f(x)}{[f'(x)]^2+xf'(x)+x^2}=f'(x)-x, \forall x\in[1;2]$. Tính giá trị của $f(2)$?

A. $\dfrac{7\sqrt{7}-1}{3}$ **B.** $\dfrac{7\sqrt{7}+1}{3}$ **C.** $\dfrac{2\sqrt{7}-1}{3}$ **D.** $\dfrac{2\sqrt{7}+1}{3}$

Lời giải

Biến đổi giả thiết tương đương

$$3x^3f(x)=(f'(x)-x)\left([f'(x)]^2+xf'(x)+x^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 3x^3f(x)=[f'(x)]^3-x^3 \Leftrightarrow x^3(3f(x)+1)=[f'(x)]^3 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{3f(x)+1}}=x$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{3f(x)+1}}dx=\int_1^2 xdx=\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\int_1^2 [3f(x)+1]^{-\frac{1}{3}}d(3f(x)+1)=\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}.\frac{3}{2}[3f(x)+1]^{\frac{2}{3}}\Big|_1^2=\frac{3}{2} \Leftrightarrow [3f(2)+1]^{\frac{2}{3}}-[3f(1)+1]^{\frac{2}{3}}=3 \Rightarrow f(2)=\frac{7\sqrt{7}-1}{3}$$

Chọn ý **A.**

Câu 21.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f^3(x).\left[4(f'(x))^2+f(x).f''(x)\right]=e^x, \forall x\in\mathbb{R}$, biết $f(0)=0$. Khi đó $\int\limits_0^{5\ln 2} f^5(x)dx$ bằng?

A. $5\left(31-\dfrac{25\ln^2 2}{2}-5\ln 2\right)$ **B.** $\dfrac{1}{5}\left(31-\dfrac{355\ln 2}{2}\right)$

C. $\dfrac{1}{5}\left(31-\dfrac{25\ln^2 2}{2}-5\ln 2\right)$ **D.** $5\left(31-\dfrac{355\ln 2}{2}\right)$

Lời giải

Giả thiết tương đương $(f^4(x).f'(x))'=e^x \Rightarrow f^4(x)f'(x)=e^x+C$ mà $f(0)=0 \Rightarrow C=-1$

$$\Rightarrow f^4(x)f'(x)=e^x-1 \Rightarrow \int f^4(x)f'(x)dx=e^x-x+D \Rightarrow f^5(x)=5(e^x-x+D)$$

Mặt khác $f(0)=0 \Rightarrow D=-1 \Rightarrow f^5(x)=5(e^x-x-1)$

$$\Rightarrow \int_0^{5\ln 2} f^5(x)dx=5\int_0^{5\ln 2}(e^x-x-1)dx=5\left(31-\frac{25\ln^2 2}{2}-5\ln 2\right)$$

Chọn ý **A.**

Câu 22.

Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ thỏa mãn $f'(1)=g(1)=1;f(2).g(2)=f(1)$ và đồng thời $1-f'(x)g'(x)=g(x)\left[f''(x)+\frac{1}{x}f'(x)\right],\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Tính giá trị của biểu thức tích phân $I=\int_1^2 f(x)g'(x)dx$?

A. $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$ **B.** $-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$ **C.** $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$ **D.** $-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$

Lời giải

Biến đổi giả thiết tương đương

$$x-xf'(x)g'(x)=xg(x)f''(x)+g(x)f'(x)$$
$$\Leftrightarrow x=x\left[g'(x)f'(x)+g(x)f''(x)\right]+g(x)f'(x)$$
$$\Leftrightarrow x=\left(xf'(x)g(x)\right)'\Rightarrow xf'(x)g(x)=\frac{x^2}{2}+C$$
$$\Leftrightarrow f'(x)g(x)=\frac{x}{2}+\frac{C}{x}\xrightarrow{f'(1)=g(1)=1}f'(x)g(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}$$
$$\Leftrightarrow \int_1^2 f'(x)g(x)dx=\int_1^2\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)dx=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$$

Sử dụng tích phân từng phần ta có

$$I=\int_1^2 f'(x)g(x)dx=g(x)f(x)\Big|_1^2-\int_1^2 f(x)g'(x)dx=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$$
$$\Rightarrow \int_1^2 f(x)g'(x)dx=-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\ln 2$$

Chọn ý **D.**

Câu 23.

Cho $f''(x).f(x)-2\left[f'(x)\right]^2+x.f(x)^3=0$. Biết $f'(0)=0;f'(1)=-\frac{1}{2},f(1)>0;f''(0)\neq 0$. Tính giá trị của $\int_0^1 f'(x)dx$

A.3.. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Ta có $f''(x).f(x)-2\left[f'(x)\right]^2+x.f(x)^3=0$ (1)

$$\Rightarrow \frac{f''(x)}{f(x)^2}-2\frac{\left[f'(x)\right]^2}{f(x)^3}+x=0\Rightarrow \frac{f''(x).f(x)^2}{f(x)^4}-2\frac{\left[f'(x)\right]^2.f(x)}{f(x)^4}+x=0\Rightarrow \left[\frac{f'(x)}{f(x)^2}\right]'=-x.$$

Ta có $\int_0^1\left[\frac{f'(x)}{f(x)^2}\right]'dx=\int_0^1 -xdx\Rightarrow \frac{f'(1)}{f(1)^2}-\frac{f'(0)}{f(0)^2}=\frac{-1}{2}\Rightarrow \frac{-1}{2f(1)^2}=\frac{-1}{2}\Rightarrow f(1)=1$.

Thay $x=0$ vào (1) ta được $f''(0).f(0)-2\left[f'(0)\right]^2+0=0\Rightarrow f(0)=0$.

Ta có $\int_0^1 f'(x)dx = f(1) - f(0) = 1$.

Chọn ý **B.**

Câu 24.

Cho $f'(x).2f(x) + f(x) + f'(x).x = 4x$. Biết đồ thị hàm số $f(x)$ đồng biến trên tập R, $f(0) = 0$. Tìm nghiệm của phương trình $\cos 3f(x) = -4x^3 + 3x$ trên khoảng $(0;\pi)$.

A. $\frac{\pi}{2}$. **B.** 0. **C.** $\frac{\pi}{3}$. **D.** π.

Lời giải

Ta có $f'(x).2f(x) + f(x) + f'(x).x = 4x \Rightarrow f(x)^2 + x.f(x) = 2x^2 + c$.

Mặt khác $f(0) = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow f(x)^2 + x.f(x) - 2x^2 = 0$. (1)

Có $\Delta = x^2 + 4.2x^2 = 9x^2$.

Ta tìm được 2 nghiệm của phương trình (1) là $\begin{cases} f_1(x) = \dfrac{-x+3x}{2} = x \\ f_2(x) = \dfrac{-x-3x}{2} = -2x \end{cases}$.

Mà hàm số $f(x)$ đồng biến trên tập R nên $f(x) = x$.

$\cos 3f(x) = -4x^3 + 3x \Rightarrow -4\cos^3 f(x) + 3\cos f(x) = 4x^3 - 3x \Rightarrow -4\cos^3 x + 3\cos x = 4x^3 - 3x$.

Ta có $h(x) = -4\cos x^3 + 3\cos x \Rightarrow h'(x) = \sin x(12\cos x^2 - 3)$ luôn đồng biến trên $\Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

Hàm số $g(x) = 4x^3 - 3x = 12x^2 - 3$ luôn đồng biến trên tập R nên để $g(x) = h(x)$ thì $\cos x = x$

Ta có $y = \cos x - x \Rightarrow y' = -\sin x - 1$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k\pi(k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

Chọn ý **A.**

Câu 25.

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\begin{cases} \dfrac{x^2 f(x)}{x-1} - \dfrac{f'(x)}{x-1} = x^2 + x \\ \dfrac{f(x)}{x-1} - \dfrac{x^2 f'(x)}{x-1} = -xf(x) \end{cases}$ (*) . Tính $f(0)$?

A. 0. **B.** $\frac{-1}{6}$. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Trừ 2 vế của $(*)$ ta được $\dfrac{x^2 f(x)}{x-1} - \dfrac{f'(x)}{x-1} - \dfrac{f(x)}{x-1} + \dfrac{x^2 f'(x)}{x-1} = x^2 + x + xf(x)$.

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2-1)f(x)}{x-1}+\frac{(x^2-1)f'(x)}{x-1}=x^2+x+xf(x)\Leftrightarrow (x+1)f(x)+(x+1)f'(x)=x^2+x+xf(x).$$

$$\Leftrightarrow (x+1)f(x)+(x+1)f'(x)-xf(x)=x^2+x\Leftrightarrow \left[(x+1)f(x)\right]'=x^2+x.$$

$$\Rightarrow (x+1)f(x)=\int (x^2+x)dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+c.$$

Thay $x=-1\Rightarrow c=-\frac{1}{6}\Rightarrow f(x)=\dfrac{\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{-1}{6}}{x+1}=\dfrac{2x^3+3x^2-1}{6(x+1)}\Rightarrow f(0)=\dfrac{-1}{6}$.

Câu 26.

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\begin{cases} 2.f'(x).f(x)-2xf'(x)-2f(x)-1=e^{2f(x)-3x-1} \\ e^{f(x)^2-2xf(x)-x}=e^{-x^2}\left[2f'(x)-2x-3\right] \end{cases}$ $(*)$. Biết $f(0)=1$.

Tính $\dfrac{1}{f(0).f(1)}+\dfrac{1}{f(1).f(2)}+...\dfrac{1}{f(99).f(100)}$?

A. $\dfrac{98}{99}$. **B.** $\dfrac{101}{100}$. **C.** $\dfrac{99}{100}$ **D.** $\dfrac{100}{101}$.

Lời giải

Nhân 2 vế của hệ phương trình $(*)$ với nhau ta được

$$e^{f(x)^2-2xf(x)-x}.\left[2.f'(x).f(x)-2xf'(x)-2f(x)-1\right]=e^{2f(x)-x^2-3x-1}\left[2f'(x)-2x-3\right].$$

$$\Rightarrow \left[e^{f(x)^2-2xf(x)-x}\right]'=\left[e^{2f(x)-x^2-3x-1}\right]'\Rightarrow e^{f(x)^2-2xf(x)-x}=e^{2f(x)-x^2-3x-1}+C.$$

Ta có $f(0)=1\Rightarrow e=e+c\Rightarrow c=0\Rightarrow e^{f(x)^2-2xf(x)-x}=e^{2f(x)-x^2-3x-1}$.

$$\Rightarrow f(x)^2-2xf(x)-x=2f(x)-x^2-3x-1\Rightarrow f(x)^2-2(x+1)f(x)+x^2+2x+1=0.$$

$$\Rightarrow \left[f(x)-(x+1)\right]^2=0\Rightarrow f(x)=x+1\Rightarrow \frac{1}{f(x)f(x-1)}=\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(0).f(1)}+\frac{1}{f(1).f(2)}+...\frac{1}{f(99).f(100)}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{100}-\frac{1}{101}=\frac{1}{1}-\frac{1}{101}=\frac{100}{101}.$$

Chọn ý **D.**

LUYỆN TẬP

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $2f(x)+x.f'(x)\ge 673x^{2017}$.

Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}$ **B.** $\dfrac{1}{3.2017}$ **C.** $\dfrac{1}{3.2018}$ **D.** $\dfrac{1}{3.2019}$

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm liên tục trên nửa khoảng $[0;+\infty)$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{(x+1)f(x)}}$ và $f(0)=1, f(1)=\sqrt[3]{a+b\sqrt{2}}$ với a,b là các số nguyên. Tính $P=ab$.

A. $P=-3$ **B.** $P=-66$ **C.** $P=6$ **D.** $P=-36$

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=2f(x)$ và $f(0)=\sqrt{3}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $2\sqrt{3}(e^2-1)$ **B.** $\sqrt{3}(2e-1)$ **C.** $\dfrac{\sqrt{3}(e^2-1)}{2}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{3}(2e-1)}{2}$

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị âm và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)=(2x+1)[f(x)]^2$ và $f(0)=-1$. Giá trị của tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $-\dfrac{1}{6}$ **B.** $-\ln 2$ **C.** $-\dfrac{2\pi\sqrt{3}}{9}$ **D.** $-\dfrac{\pi\sqrt{3}}{9}$

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp 2 liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f'(0)=-1$ và $f''(x)=[f'(x)]^2$. Giá trị của biểu thức $f(1)-f(0)$ bằng

A. $\ln 2$ **B.** $-\ln 2$ **C.** $\dfrac{1}{2}\ln 2$ **D.** $-\dfrac{1}{2}\ln 2$

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)=-e^x f^2(x) \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=\dfrac{1}{2}$. Tính $f(\ln 2)$

A. $\ln 2+\dfrac{1}{2}$ **B.** $\dfrac{1}{3}$ **C.** $\dfrac{1}{4}$ **D.** $\ln^2 2+\dfrac{1}{2}$

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm liên tục trên $[0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1)=1, f(x)=f'(x)\sqrt{3x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng

A. $1<f(5)<2$ **B.** $4<f(5)<5$ **C.** $3<f(5)<4$ **D.** $2<f(5)<3$

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm liên tục trên $[0;+\infty)$ thỏa mãn $f(3)=\dfrac{2}{3}$ và $f'(x)=\sqrt{(x+1)f(x)}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $2613<f^2(8)<2614$ **B.** $2614<f^2(8)<2615$

C. $2618<f^2(8)<2619$ **D.** $2616<f^2(8)<2617$

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)f'(x)=3x^5+6x^2$. Biết rằng $f(0)=2$. Tính $f^2(2)$.

A. 144 **B.** 100 **C.** 64 **D.** 81

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị âm và có đạo hàm liên tục trên $[1;4]$ thỏa mãn $f'(x)=(2x+1)f^2(x)$ và $f(1)=\dfrac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $\sum_{i=1}^{2018} f(i)$ bằng

TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC

A. $-\dfrac{2010}{2019}$ **B.** $-\dfrac{2017}{2018}$ **C.** $-\dfrac{2016}{2017}$ **D.** $-\dfrac{2018}{2019}$

Câu 11: Cho hai hàm số $f(x),g(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;4]$ thỏa mãn $f(1)+g(1)=9e$ và $f(x)=-x^2g'(x);g(x)=-x^2f'(x)$. Tích phân $\int_1^4 \dfrac{f(x)+g(x)}{x^2}dx$ bằng

A. $\dfrac{9}{e}\left(e-\sqrt[4]{e}\right)$ **B.** $9\left(e-\sqrt[4]{e}\right)$ **C.** $\dfrac{e}{9}\left(e-\sqrt[4]{e}\right)$ **D.** $\dfrac{e-\sqrt[4]{e}}{9}$

Câu 12: Cho hai hàm số $f(x),g(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;4]$ thỏa mãn $f(1)+g(1)=4$ và $f(x)=-x^2g'(x);g(x)=-x^2f'(x)$. Tích phân $\int_1^4 (f(x)+g(x))dx$ bằng

A. $8\ln 2$ **B.** $3\ln 2$ **C.** $6\ln 2$ **D.** $4\ln 2$

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ và có đạo hàm liên tục trên $[0;+\infty)$ và thỏa mãn điều kiện $f(x)+f'(x)=e^{-x}\sqrt{2x+1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $e^4f(4)-f(0)=\dfrac{26}{3}$ **B.** $e^4f(4)-f(0)=-\dfrac{26}{3}$

C. $e^4f(4)-f(0)=\dfrac{4}{3}$ **D.** $e^4f(4)-f(0)=-\dfrac{4}{3}$

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=0$ và $2xf(x)+f'(x)=x\left(x^2-1\right)$. Tích phân $\int_0^1 xf(x)dx$ bằng

A. $\dfrac{e-4}{8e}$ **B.** $\dfrac{1}{6}$ **C.** $\dfrac{7}{6}$ **D.** $\dfrac{e-4}{4e}$

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;\pi]$ thỏa mãn $f(0)=\sqrt{3}$ và $f'(x)f(x)=\cos x\sqrt{1+f^2(x)}$. Tích phân $\int_0^\pi f^2(x)dx$ bằng

A. $8+\dfrac{11\pi}{2}$ **B.** $8+\dfrac{7\pi}{2}$ **C.** $\dfrac{7\pi}{2}-8$ **D.** $\dfrac{11\pi}{2}-8$

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=1$ và $f(x)=\left(f'(x)\right)^2$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\dfrac{5}{4}$ **B.** $\dfrac{19}{12}$ **C.** $\dfrac{5}{2}$ **D.** $\dfrac{19}{3}$

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện $2018f(x)+x.f'(x)\ge x^{2019},\forall x\in[0;1]$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\dfrac{1}{4037}$ **B.** $\dfrac{1}{2018.4037}$ **C.** $\dfrac{1}{2019.4037}$ **D.** $\dfrac{1}{2020.4037}$

Câu 18: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\cos xf(x)+\sin xf'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x},\forall x\in\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right]$ và đồng thời $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}$. Tích phân $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx$ bằng

A. $\ln\left(1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ **B.** $2\ln\left(1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ **C.** $\ln\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}-1\right)$ **D.** $\frac{1}{2020.4037}$

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0)=0$, $f(x)>-1$ và đồng thời $f'(x)=\sqrt{x^2+1}=2x\sqrt{f(x)+1}, \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $f\left(\sqrt{3}\right)$?

A. 12 **B.** 3 **C.** 7 **D.** 9

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và đồng biến trên đoạn $[1;4]$, $f(1)=0$ và đồng thời thỏa mãn $x+2x.f(x)=\left[f'(x)\right]^2, \forall x\in[1;4]$. Đặt $I=\int_1^4 f(x)dx$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $1<I<4$ **B.** $4<I<8$ **C.** $8<I<12$ **D.** $12<I<16$

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left[f'(x)\right]^2+f(x)f''(x)=2x^2-x+1, \forall x\in\mathbb{R}$, và đồng thời $f(0)=f'(0)=3$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng?

A. 28 **B.** 22 **C.** $\frac{19}{2}$ **D.** 10

Câu 22: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0)=1$ và $f'(x)+2xf(x)=2x.e^{-x^2}, \forall x\in\mathbb{R}$. Tính giá trị của tích phân $\int_0^1 xf(x)dx$?

A. $1-\frac{3}{2e}$ **B.** $-\frac{1}{2e}$ **C.** $1-\frac{e}{2}$ **D.** $\frac{e}{2}$

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1)=\frac{9}{e}$ và $f'(x)+3x^2f(x)=\left(15x^4+12x\right)e^{-x^2}, \forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng?

A. $3+\frac{4}{e}$ **B.** $2e-1$ **C.** $3-\frac{4}{e}$ **D.** $2e+1$

Câu 24: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f^2(x)f''(x)+2f(x)\left(f'(x)\right)^2=15x^4+12x, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=1, f'(0)=9$. Tích phân $\int_0^1 f^3(x)dx$ bằng?

A. $\frac{199}{14}$ **B.** $\frac{227}{42}$ **C.** $\frac{227}{14}$ **D.** $\frac{199}{42}$

Câu 25: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;4]$, có $f(1)=0$ và đồng thời $x+2x.f(x)=\left[f'(x)\right]^3, \forall x\in[1;4]$. Tích phân $\int_1^4 \left(2f(x)+1\right)^2 dx$ bằng?

A. 1 **B.** $\frac{1}{5}$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** $\frac{1}{4}$

Câu 26: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$, có $f(1)=4$ và đồng thời $f(x)=xf'(x)-2x^3-3x^2, \forall x\in[1;2]$. Tính giá trị của $f(2)$?

A. 5 **B.** 20 **C.** 15 **D.** 10

Câu 27: Cho hàm số $f(x)\neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x)=(2x+3)f^2(x)$ và $f(0)=\frac{-1}{2}$. Biết rằng $\sum_{i=1}^{2018} f(i)=\frac{a}{b}\left(a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{N}^*\right)$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{a}{b}<-1$ **B.** $\frac{a}{b}>1$ **C.** $a+b=1010$ **D.** $b-a=3029$

Câu 28: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=1$ và đồng thời điều kiện $f'(x)=f(x)+e^x+1,\forall x\in[0;1]$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x)dx$

A. $2e-1$ **B.** $2(e-1)$ **C.** $1-e$ **D.** $1-2e$

Câu 29: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp 2 liên tục trên đoạn $[1;3]$, $f(1)=f'(1)=1$ và $f(x)>0$, $f(x)f''(x)=(f'(x))^2-(xf(x))^2,\forall x\in[1;3]$. Tính $\ln f(3)$

A. -4 **B.** -3 **C.** 4 **D.** 3

Câu 30: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn đồng thời $f(2)=\ln\frac{3}{4}, f'(x)e^{f(x)}=\frac{2}{x^3},\forall x\in[2;2018]$. Biết rằng $\sum_{i=2}^{2018} f(i)=\ln a-\ln b+\ln c-\ln d$ với a,b,c,d là các số nguyên dương và a,c,d là số nguyên tố đồng thời $a<b<c<d$. Giá trị của biểu thức $a+b+c+d$ bằng?

A. 1968 **B.** 1698 **C.** 1689 **D.** 1986

Câu 31: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;3]$, $f(3)=4$ và đồng thời $\left[f'(x)\right]^2=8x^2-20-4f(x),\forall x\in[0;3]$. Tích phân $\int_0^3 f(x)dx$ bằng?

A. 9 **B.** -6 **C.** 21 **D.** 12

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ đồng biến, có đạo hàm cấp 2 liên tục trên đoạn $[0;2]$, biết rằng $f(0)=1,f(2)=e^6$ và $\left[f(x)\right]^2-f(x)f''(x)+\left[f'(x)\right]^2=0,\forall x\in[0;2]$. Tính $f(1)$

A. 9 **B.** -6 **C.** 21 **D.** 12

Câu 33: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$ và đồng thời $\left[f'(x)\right]^2+4(6x^2-1)f(x)=40x^6-44x^4+32x^2-4,\forall x\in[0;1]$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng?

A. $\frac{23}{15}$ **B.** $-\frac{17}{15}$ **C.** $\frac{13}{15}$ **D.** $-\frac{7}{15}$

Câu 34: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0)=\frac{1}{2}$ và đồng thời điều kiện $(x+2)f(x)+(x+1)f'(x)=e^x$. Giá trị của $f(2)$ bằng?

A. $\frac{e}{3}$ **B.** $\frac{e}{6}$ **C.** $\frac{e^2}{3}$ **D.** $\frac{e^2}{6}$

Câu 35: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ thỏa mãn $f(1)=-2\ln 2$ và $x(x+1)f'(x)+f(x)=x^2+x,\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$. Biết $f(2)=a+b\ln 3(a,b\in\mathbb{Q})$. Giá trị của biểu thức a^2+b^2 bằng?

A. $\frac{25}{4}$ **B.** $\frac{9}{2}$ **C.** $\frac{5}{2}$ **D.** $\frac{13}{4}$

Câu 36: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $\left[f(x)\right]^2=2+3\int_0^x f(t)dt,\forall x\in[0;1]$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng?

A. $\frac{3}{4}+\sqrt{2}$ **B.** $\frac{11}{4}$ **C.** $\frac{3}{4}+\sqrt{3}$ **D.** $\frac{15}{4}$

Câu 37: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn điều kiện $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\sin x dx=-4$ và $f(x)=x\left(\sin x+f'(x)\right)+\cos x$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $11<f(\pi)<12$ **B.** $5<f(\pi)<6$ **C.** $6<f(\pi)<7$ **D.** $12<f(\pi)<13$

Câu 38: Cho hàm số $f(x)$ có đạo đến cấp 2 liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện $\left[f'(x)\right]^2+f(x)f''(x)\ge 1,\forall x\in[0;1]$ và $f^2(0)+f(0)f'(0)=\frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1 f^2(x)dx$?

A. $\frac{5}{2}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{11}{6}$ **D.** $\frac{7}{2}$

Câu 39: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1)=1$ và đồng thời điều kiện $f'(x)\left[f(x)\right]^{2018}=xe^x,\forall x\in\mathbb{R}$. Số nghiệm của phương trình $f(x)=-\frac{1}{e}$ là?

A. 0 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 3

Câu 40: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f(1)=-2$ và đồng thời $x^2f^2(x)+(2x-1)f(x)=xf'(x)-1,\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Tính $\int_1^2 f(x)dx$?

A. $-\frac{\ln 2}{2}-1$ **B.** $-\ln 2-\frac{1}{2}$ **C.** $-\ln 2-\frac{3}{2}$ **D.** $-\frac{\ln 2}{2}-\frac{3}{2}$

Câu 41: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $\frac{2f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}=\frac{f(x)(x+2)}{x^3},\forall x>0$ và $f(1)=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Tích phân $\int_1^2 \frac{1}{\left[f(x)\right]^2}dx$?

A. $\frac{11}{2}+\ln 2$ **B.** $-\frac{1}{2}+\ln 2$ **C.** $\frac{3}{2}+\ln 2$ **D.** $\frac{7}{2}+\ln 2$

Câu 42: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1)=e$ và đồng thời điều kiện $(x+2)f(x)=xf'(x)-x^3,\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $f(2)$?

A. $4e^2-4e+4$ **B.** $4e^2-2e+1$ **C.** $2e^3-2e+2$ **D.** $4e^2-4e+1$

Câu 43: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương thỏa mãn $f'(x)=\frac{f(x)}{x}+3x^2,\forall x\in(0;+\infty)$ và $\int_1^2 \frac{3x^3}{f^2(x)}dx=\frac{1}{9}$. Giá trị của biểu thức $f(1)+f(2)$ bằng?

A. $\frac{27}{2}$ **B.** $\frac{43}{2}$ **C.** $\frac{45}{2}$ **D.** $\frac{49}{2}$

Câu 44: Cho hàm số $f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0)=1$ và $\left[f'(x)\right]^2=e^x f(x), \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$?

A. $e-2$ **B.** e^2-2 **C.** e^2-1 **D.** $e-1$

Câu 45: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ thỏa mãn $f'(x)=\tan x f(x), \forall x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right], f(0)=1$. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x f(x)dx$?

A. $\frac{1+\pi}{4}$ **B.** $\frac{\pi}{4}$ **C.** $\ln\frac{\pi+1}{4}$ **D.** 0

Câu 46: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)=e^{-f(x)}(2x+3)$, $f(0)=\ln 2$. Tích phân $\int_1^2 f(x)dx$ bằng?

A. $6\ln 2+2$ **B.** $6\ln 2-2$ **C.** $6\ln 2-3$ **D.** $6\ln 2+3$

Câu 47: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$ và đồng thời $xf'(x)-f(x)=x^2, \forall x\in[0;1]$. Tính tích phân $\int_0^1 xf(x)dx$?

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** $\frac{3}{4}$

Câu 48: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0)=-1$ và đồng thời điều kiện $f'(x)=f(x)+x^2e^x+1, \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $f(3)$?

A. $6e^3+3$ **B.** $6e^2+2$ **C.** $3e^2-1$ **D.** $9e^3-1$

Câu 49: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(1)=2$ và đồng thời $f'(x)+\frac{f(x)}{x}=4x^2+3x$ và $f(1)=2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là?

A. $y=16x+20$ **B.** $y=-16x+20$ **C.** $y=-16x-20$ **D.** $y=16x-20$

Câu 50: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục và nhận giá trị không âm trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $\frac{\left[f(x)\right]^2\left[f'(x)\right]^2}{e^{2x}}=1+\left[f(x)\right]^2, \forall x\in[0;1]$. Biết $f(0)=1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $f(1)\in\left(\frac{5}{2};3\right)$ **B.** $f(1)\in\left(3;\frac{7}{2}\right)$ **C.** $f(1)\in\left(2;\frac{5}{2}\right)$ **D.** $f(1)\in\left(\frac{3}{2};2\right)$

ĐÁP ÁN

Câu 1. Chọn ý **C.**

Theo giả thiết ta có $\left(x^2f(x)\right)'\geq 673x^{2018}$, lấy tích phân 2 vế cận từ 0 tới x ta được

$$\int_0^x \left(x^2f(x)\right)'dx \ge \int_0^x 673x^{2018}dx \Leftrightarrow x^2f(x) \ge \frac{673x^{2019}}{2019}$$

$$\Rightarrow f(x) \ge \frac{x^{2017}}{3} \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx \ge \int_0^1 \frac{x^{2017}}{3}dx = \frac{1}{3.2018}$$

Câu 2: Chọn ý **A.**

Câu 3: Chọn ý **C.**

Câu 4: Chọn ý **D.**

Câu 5: Chọn ý **B.**

Câu 6: Chọn ý **B.**

Câu 7: Chọn ý **C.**

Câu 8: Chọn ý **C.**

Câu 9: Chọn ý **B.**

Câu 10: Chọn ý **D.**

Ta có $\frac{f'(x)}{f(x)} = 2x+1 \Rightarrow -\frac{1}{f(x)} = x^2+x+C \xrightarrow{f(1)=-\frac{1}{2}} f(x) = -\frac{1}{x^2+x} = -\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{2018} f(i) = -\sum_{i=1}^{2018}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = -\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2019}\right) = -\frac{2018}{2019}$$

Câu 11: Chọn ý **B.**

Đặt $h(x) = f(x)+g(x), h(1) = g(1)+f(1) = 9e$. Ta có

$$f(x)+g(x) = -x^2\left[f'(x)+g'(x)\right] \Rightarrow h(x)+x^2h'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{h'(x)}{h(x)} = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow \ln|h(x)| = \frac{1}{x} + C \xrightarrow{h(1)=9e} h(x) = 9e^{\frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow \int_1^4 \frac{f(x)+g(x)}{x^2}dx = \int_1^4 \frac{9}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx = 9\left(e - \sqrt[4]{e}\right)$$

Câu 12: Chọn ý **A.**

Tương tự câu 11

Câu 13: Chọn ý **A.**

Câu 14: Chọn ý **A.**

Câu 15: Chọn ý **B.**

Câu 16: Chọn ý **B.**

Câu 17: Chọn ý **D.**

Tương tự câu 1.

Câu 18: Chọn ý **B.**

Câu 19: Chọn ý **B.**

Câu 20: Chọn ý **D.**

Câu 21: Chọn ý **A.**

Câu 22: Chọn ý **A.**

Câu 23: Chọn ý **C.**

Câu 24: Chọn ý **C.**

Câu 25: Chọn ý **B.**

Câu 26: Chọn ý **D.**

Câu 27: Chọn ý **D.**

Câu 28: Chọn ý **B.**

Câu 29: Chọn ý **A.**

Biến đổi giả thiết ta có

$$\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' = \frac{f(x)f''(x)-(f'(x))^2}{(f(x))^2} = -x^2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{x^3}{3}+C$$

$$\xrightarrow{f(1)=f'(1)=1} C=\frac{4}{3} \Rightarrow \ln f(x) = \int\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{4}{3}\right)dx = -\frac{x^4}{12}+\frac{4x}{3}+C_1$$

$$\xrightarrow{f(1)=1} D=-\frac{5}{4} \Rightarrow \ln f(x) = -\frac{x^4}{12}+\frac{4x}{3}-\frac{5}{4} \Rightarrow \ln f(3) = -4$$

Câu 30: Chọn ý **C.**

Biến đổi giả thiết ta có

$$\int f'(x)e^{f(x)}dx = \int \frac{2}{x^3}dx \Leftrightarrow e^{f(x)} = -\frac{1}{x^2+C} \xrightarrow{f(2)=\ln\frac{3}{4}} C=1$$

$$\Rightarrow f(x) = \ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow \sum_{i=2}^{2018} f(i) = \ln\left[\prod_{i=2}^{2018}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)\right]$$

$$=\ln\left[\frac{(2^2-1)(3^2-1)...(2018^2-1)}{(2.3...2018)^2}\right] = \frac{1.3.2.4.3.5...2017.2019}{(2.3...2018)^2}$$

$$=\frac{2017!.\dfrac{2019!}{1.2}}{(2018!)^2} = \frac{2019}{1.2.2018} = \frac{3.673}{2^2.1009} \Rightarrow \sum_{i=2}^{2018} f(i) = \ln 3 - \ln 4 + \ln 673 - \ln 1009$$

Câu 31: Chọn ý **B.**

Từ giả thiết ta có $\int_0^3 \left[f'(x)\right]^2 dx = \int_0^3 \left(8x^2-20-4f(x)\right)dx = 12-4\int_0^3 f(x)dx$

Áp dụng công thức tích phân từng phần ta có

$$\int_0^3 f(x)dx = xf(x)\Big|_0^3 - \int_0^3 xf'(x)dx = 12-\int_0^3 xf'(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_0^3 \left[f'(x)\right]^2 dx = 12-4\left(12-\int_0^3 xf'(x)dx\right)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^3 \left(f'(x)-2x\right)^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x)=2x \Rightarrow f(x)=x^2+C$$

$$\xrightarrow{f(3)=4} C=-5 \Rightarrow f(x)=x^2-5 \Rightarrow \int_0^3 f(x)dx = -6$$

Câu 32: Chọn ý **D.**

Ta có $f(x) \ge f(0) = 1, \forall x \in [0;2]$ do vậy

$$\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' = \frac{f(x)f''(x)-\left[f'(x)\right]^2}{\left[f(x)\right]^2} = 1 \Rightarrow \ln f(x) = \frac{x^2}{2}+Cx+D$$

CHINH PHỤC OLYMPIC TOÁN

Mặt khác do $f(0)=1, f(2)=e^6 \Rightarrow \begin{cases} D=0 \\ 6=2+2C+D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=2 \\ D=0 \end{cases} \Rightarrow f(x)=e^{\frac{x^2}{2}+2x} \Rightarrow f(1)=e^{\frac{5}{2}}$

Câu 33: Chọn ý **C.**

Lấy tích phân 2 vế trên đoạn $[0;1]$ ta được

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx + 4\int_0^1 (6x^2-1)f(x)dx = \int_0^1 (40x^6 - 44x^4 + 32x^2 - 4)dx = \frac{376}{105}$$

Áp dụng công thức tích phân từng phần ta được:

$$\int_0^1 (6x^2-1)f(x)dx = \int_0^1 f(x)d(2x^3-x)$$
$$= (2x^3-x)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 (2x^3-x)f'(x) = 1 - \int_0^1 (2x^3-x)f'(x)dx$$

Thay lại đẳng thức trên ta có

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx + 4\left(1 - \int_0^1 (2x^3-x)f'(x)dx\right) = \frac{376}{105}$$
$$\Leftrightarrow \int_0^1 [f'(x)]^2 dx - 4\int_0^1 (2x^3-x)f'(x)dx + \frac{44}{105} = 0$$
$$\Leftrightarrow \int_0^1 \left(f'(x) - 2(2x^3-x)\right)^2 dx = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2(2x^3-x) \Rightarrow f(x) = x^4 - x^2 + C$$
$$\xrightarrow{f(1)=1} C = 1 \Rightarrow f(x) = x^4 - x^2 + 1 \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \frac{13}{15}$$

Câu 34: Chọn ý **D.**

Câu 35: Chọn ý **B.**

Câu 36: Chọn ý **A.**

Xem lại phần tích phân có cận thay đổi

Câu 37: Chọn ý **B.**

Câu 38: Chọn ý **C.**

Biến đổi giả thiết tương đương $[f(x)f'(x)]' = [f'(x)]^2 + f(x)f''(x) \ge 1, \forall x \in [0;1]$

Lấy tích phân cận từ 0 đến x ta được

$$\int_0^x f(x)f'(x)dx \ge \int_0^x [f(0)f'(0) + x]dx$$
$$\Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} - \frac{f^2(0)}{2} \ge f(0)f'(0)x + \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow f^2(x) \ge x^2 + f^2(0) + 2f(0)f'(0)x$$
$$\Rightarrow \int_0^1 f^2(x)dx \ge \int_0^1 [x^2 + f^2(0) + 2f(0)f'(0)x]dx = \frac{1}{3} + f^2(0) + f(0)f'(0) = \frac{11}{6}$$

Dấu "=" xảy ra chẳng hạn tại $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$

Câu 39: Chọn ý **B.**

Ta có $\int f'(x)[f(x)]^{2018} dx = \int xe^x dx = (x-1)e^x + C$

$$\Rightarrow \frac{[f(x)]^{2019}}{2019} = (x-1)e^x + C; f(1) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2019} = C \Rightarrow f(x) = \sqrt[2019]{1 + 2019(x-1)e^x}$$

Vậy $f(x)=-\frac{1}{e}\Leftrightarrow 1+2019(x-1)e^{x}=-\frac{1}{e^{2019}}\Leftrightarrow 2019(x-1)e^{x+2019}+e^{2019}+1=0$

Xét hàm số

$$g(x)=2019(x-1)e^{x+2019}+e^{2019}+1\Rightarrow g'(x)=2019\left[e^{x+2019}+(x-1)e^{x+2019}\right]=2019xe^{x+2019}$$

Do $g'(x)=0$ có đúng 1 nghiệm nên $g(x)=0$ có tối đa 2 nghiệm

Câu 40: Chọn ý **B.**

Từ giả thiết ta có $x^2f^2(x)+2xf(x)+1=xf'(x)+f(x)\Leftrightarrow (xf(x)+1)^2=(xf(x)+1)$

Suy ra $\int\frac{(xf(x)+1)'}{(xf(x)+1)^2}dx=\int dx=x+C\Leftrightarrow xf(x)+1=-\frac{1}{x+C}$

Mặt khác $f(1)=-2\Rightarrow C=0\Rightarrow xf(x)+1=-\frac{1}{x}\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$

Suy ra $\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2-\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)dx=-\ln 2-\frac{1}{2}$

Câu 41: Chọn ý **C.**
Câu 42: Chọn ý **A.**
Câu 43: Chọn ý **C.**
Câu 44: Chọn ý **D.**
Câu 45: Chọn ý **B.**
Câu 46: Chọn ý **B.**
Câu 47: Chọn ý **B.**
Câu 48: Chọn ý **D.**
Câu 49: Chọn ý **D.**
Câu 50: Chọn ý **A.**
Tương tự với câu trong đề thi thử Chuyên Lê Khiết, xem lại phần trước.

CHƯƠNG 8 CÁC ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN

Nhiều khi các bạn có tự hỏi học tích phân để làm gì và liệu nó có vô dụng không? Mình nghĩ đây là một câu hỏi không phải ai cũng trả lời được. Trước khi đi vào nội dung của chuyên đề này, mình sẽ gửi tới các bạn một câu chuyện ngắn sau được mình trích từ Blog của giáo sư Nguyễn Tiến Dũng.

Bài viết mang tên ***Vì sao tích phân… vô dụng?***

Cuộc thăm dò ý kiến về phép tính vi tích phân của một thành viên của trang Sputnik Education khá thú vị, qua đó chúng ta biết được một điều, đó là có một tỷ lệ rất lớn những người đã trưởng thành và đã được học phép tính tích phân không dùng gì đến nó trong công việc cũng như trong cuộc sống. Thậm chí có câu hỏi được đặt ra: Phép tính tích phân *"vô dụng"*, ít được dùng như vậy, thì có nên giữ nó trong chương trình phổ thông không, hay là nên bỏ nó đi (chỉ để ở bậc đại học thôi) thì hợp lý hơn ?

Tôi sẽ không ngạc nhiên, nếu có đến trên 90% số người đã trưởng thành ở Việt Nam "*không hề dùng đến tích phân*" trong công việc cũng như trong cuộc sống. Mặt khác, theo tôi, lỗi không nằm tại bản thân phép tính tích phân, mà là tổng hợp của nhiều lý do khác nhau. Ở đây tôi thử chỉ ra hai trong số các lý do chính:

1. Trình độ khoa học và công nghệ của Việt Nam còn quá yếu kém so với thế giới.

   Sự phát triển kinh tế của thế kỷ 21 trên thế giới là theo hướng "kinh tế dựa trên hiểu biết" *(knowledge-based economy)*, phát triển dựa trên thay đổi về chất chứ không phải là về lượng nữa *(về lượng thì công suất công nghiệp và nông nghiệp của thế giới bị thừa chứ không bị thiếu)*. Muốn phát triển về chất thì phải chú trọng đến nghiên cứu và sáng tạo. Samsung sở dĩ đã đánh bại các "khủng long" như Nokia và Sony chính là vì có chính sách đầu tư cho nghiên cứu phát triển rất tốt, có đến 5000 tiến sĩ *(thật sự, chứ không phải là tiến sĩ giấy như ở Việt Nam)* làm việc cho họ. Khó có thể tưởng tượng sự thiếu vắng của các công cụ toán học hiện đại, trong đó có vi tích phân, trong bất cứ lĩnh vực nghiên cứu & phát triển nào, kể cả trong khảo cổ, sinh vật, điện tử, cho đến kinh tế, tài chính, xã hội học, và cả phim ảnh giải trí.

   Tuy nhiên, đấy là nói về thế giới, còn ở Việt Nam thì hơi khác, vì Việt Nam đang còn rất tụt hậu so với thế giới. Đặc biệt là trong các lĩnh vực nghiên cứu và phát triển. Ở Việt Nam không thiếu Iphone đời mới nhất, xe ô tô khủng nhất, nhưng đó là người Việt mua về dùng chứ không phải là thiết kế sáng tạo ra. Các dây chuyền công nghệ hiện đại nếu có ở Việt Nam thì cũng là mang từ nước ngoài về. Để lái được xe Ferrari hay quay được mấy cái máy sản xuất máy tính bảng thì tất nhiên chẳng cần biết tính tích phân — để thiết kế được ra chúng mới cần hiểu tích phân.

Môi trường lạo động của Việt Nam hiện tại cũng chưa khuyến khích việc nghiên cứu & phát triển. Thử nhìn lương trả cho các tiến sĩ ở Việt Nam thì biết: Trong khi một nhà toán học ở Mỹ có lương trung bình là 100 nghìn USD / năm, thì tiến sĩ toán ở Việt Nam có lương chính thức không bằng 1/30 lần như vậy. Thế thì *"thời gian vàng bạc"* được dành cho các việc kiếm cơm, chứ thời gian đâu mà "nghiên cứu mới chẳng phát triển" ?!

Ngay ngành tài chính trên thế giới dùng tích phân *"như cơm bữa"*. Các mô hình tài chính hiện đại dùng toán hiện đại, không những chỉ là tính tích phân theo nghĩa thông thường nhiều người biết, mà là còn tính các tích phân ngẫu nhiên, là thứ toán học phát triển từ giữa thế kỷ 20. Chính vì vậy mà nhiều người gốc toán trở thành các *"át chủ bài"* của thị trường tài chính, và chương trình cao học tài chính ở các nơi có toán khá nặng. Tôi biết có một số sinh viên Việt Nam sau khi tốt nghiệp xuất sắc ở các trường kinh tế hay tài chính, được học bổng sang Pháp học cao học, bị *"gẫy cầu"* không theo được, một phần chính vì không thể nhai nổi phép tính tích phân ngẫu nhiên này. Bởi vậy, nói là *"làm tài chính ở Việt Nam không cần tích phân"* thì có thể đúng *(cũng chính vì thế mà việc quản lý rủi ro ở các định chế tài chính của Việt Nam mới vô cùng bi bét)*, nhưng đối với thế giới thì không đúng.

2. Việc học/dạy ở Việt Nam còn quá hình thức giáo điều, khiến cho người học có thể làm lại dập khuôn theo mẫu có sẵn như cái máy, nhưng lại không hiểu gì về ý nghĩa của những khái niệm mình được học. Tất nhiên là khi không hiểu bản chất ý nghĩa của một khái niệm nào đó thì không dùng được đó, và như thế thì hệ quả tất yếu là vứt nó đi coi như không bao giờ dùng đến.

Điều này đúng không chỉ với môn toán mà với mọi môn, không chỉ đúng với phép tính tích phân mà đúng với mọi khái niệm khoa học khác. Qua tâm sự với học trò Việt Nam và đồng nghiệp, tôi nhận thấy một điều, là kiến thức học ở đại học ở Việt Nam bị hổng rất nhiều. Nghe tên các môn học rất là *"oai"* nhưng thực sự chẳng học được mấy, toàn học theo kiểu hình thức, rồi quên, không biết các khái niệm từ đâu ra, để làm cái gì, gặp các vấn đề cụ thể là *"chịu cứng"* không giải quyết được. Ví dụ như có thể học cả một cua về giải tích hàm rất trừu tượng và thi đạt điểm tối đa nhưng không lấy được một ví dụ cụ thể xem không gian hàm nào là Fréchet, có thể học xong cả một cua về *"nhóm Lie và đại số Lie"* nhưng không thể tính được xem đại số Lie aff(2) của các biến đổi affine của mặt phẳng là có mấy chiều. Thậm chí có người còn viết được cả bài báo khoa học *(chung với thầy)* đăng tạp chí quốc tế rồi, mà không trả lời được là hàm hình bậc thang thì có lấy được tích phân không (?!)

Đến cả những người học ngành toán, thậm chí học đến tiến sĩ rồi, mà trong đó vẫn có người không hiểu bản chất của tích phân là cái gì, thì tất nhiên đòi hỏi một người không theo ngành toán dùng được tích phân là đòi hỏi *"quá cao"*.

Khi mà không nắm được ý nghĩa của việc lấy tích phân, thì việc tính tính phân các phân thức như là cái máy, nhớ một đống các công thức tính tích phân sẽ hoàn toàn là phí thời gian vô ích *(thi xong chữ thầy sẽ trả thầy)* vì chẳng dùng được để làm gì, chẳng biết phải dùng như thế nào. Đấy chính là một điều rất không may mà phần lớn mọi người gặp phải: Học về phép tính tính phân như là một thứ *"thánh bảo vậy thì nó phải vậy"*, rất giáo điều, mà không hiểu ý nghĩa của nó là gì, tại sao người ta lại cần dùng đến nó, nó liên quan đến đời sống và thế giới tự nhiên ra sao, v.v.

Einstein có nói nhiều câu rất hay, trong đó có câu: *"Chúa không quan tâm đến các khó khăn toán học của con người, bởi vì Chúa tính tích phân một cách thực nghiệm"*. Theo nghĩa nào đó, trong cuộc sống hàng ngày, nhiều khi chúng ta cũng *"tính tích phân theo cách của Chúa"*, không phải là dùng công thức toán học được viết ra một cách chi li hình thức, mà là bằng quan sát, ước lượng trực giác, v.v. Ví dụ như, khi chúng ta ước lượng diện tích của một cái nhà, thể tích của một thùng rượu, thời gian để làm việc gì đó, v.v., là chúng ta cũng *"tính tích phân"*, chỉ có điều nó *"không giống"* với khái niệm tích phân mà ta được học trong sách giáo khoa phổ thông thôi. Tích phân chẳng qua là tổng của nhiều thành phần lại với nhau, với số thành phần có thể là vô hạn *(chia nhỏ ra thành tổng của các thành phần "nhỏ li ti")*, và là công cụ để tính toán hay ước lượng độ lớn của vạn vật: Thể tích, diện tích, độ dài, vận tốc, trọng lượng, thời gian, tiền bạc, v.v. Bản thân cái ký hiệu của phép lấy tích phân chính là chữ S kéo dài ra, mà S ở đây có nghĩa là summa (tổng). Hiểu như vậy, có thể sẽ cảm thấy tích phân *"bớt vô dụng"* đi chăng ?!

Nguồn: http://zung.zetamu.net/2014/02/why_integral_is_useless/

Sau khi đọc bài viết trên các bạn cảm thấy điều gì? Mọi người học tích phân để làm gì? Có phải chỉ để thi không? Tất nhiên là không phải rồi phải không nào!

Trong các chủ đề sau đây mình sẽ giới thiệu cho các bạn các ứng dụng của tích phân trong thực tế mà có thể hiểu và sử dụng trong phạm vi chương trình THPT, nào cùng bắt đầu nhé.

A. ỨNG DỤNG TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

I. LÝ THUYẾT CẦN NẮM.

Trước khi vào lý thuyết của phần ứng dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng, ta sẽ chứng minh tính chất được dùng trong phần này.

Tính chất. Nếu trên đoạn [a;b], hàm số $f(x)$ không đổi dấu thì: $\int_a^b |f(x)|dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right| (*)$

Chứng minh. Hàm số $f(x)$ không đổi dấu trên đoạn $[a;b]$, nghĩa là $f(x)$ luôn dương hoặc luôn âm $\forall x \in [a;b]$.

- *Trường hợp 1.* $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a;b]$

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) \Rightarrow F'(x) = f(x) \geq 0 \forall x \in [a;b] \Rightarrow F(x)$ luôn đồng biến trên $[a;b] \Rightarrow F(b) \geq F(a) \Rightarrow F(b) - F(a) \geq 0$.

Ta có $\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) (1)$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \left|F(x)\Big|_a^b\right| = |F(b) - F(a)| = F(b) - F(a) (2).$$

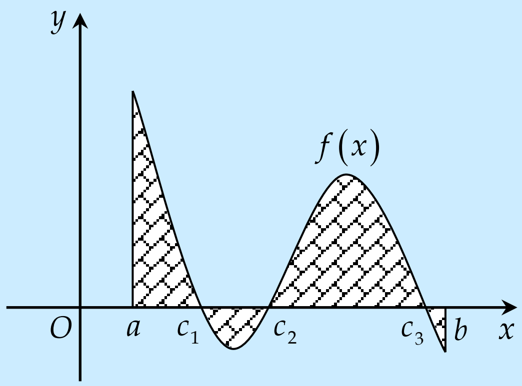
Từ $(1),(2) \Rightarrow \int_a^b |f(x)|dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$

- *Trường hợp 2.* $f(x) < 0 \quad \forall x \in [a;b]$

Chứng minh tương tự, suy ra $\int_a^b |f(x)|dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$.

Qua hai trường hợp, ta suy ra được điều phải chứng minh.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được xác định: $S = \int_a^b |f(x)|dx$



- Ta có $(H):\begin{cases} y=f(x)\\ y=0\\ x=a\\ x=b\end{cases}$ và $\boxed{S=\int_a^b |f(x)|dx}$.

Phương pháp giải.

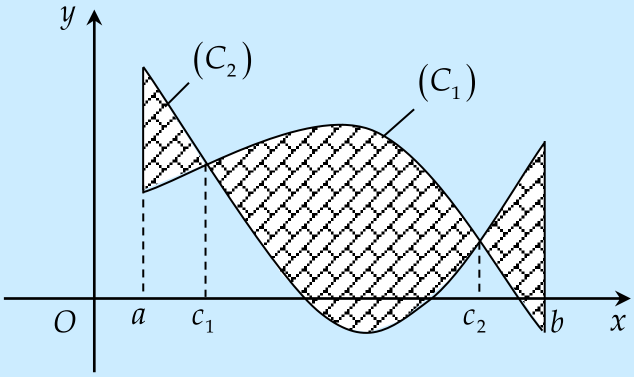
Cách 1. Tính $S=\int_a^b |f(x)|dx$ theo phương pháp đã trình bày ở phần tích phân hàm trị tuyệt đối.

Cách 2. Áp dụng tính chất $(*)$ đã được chứng minh ở trên.

- Giải phương trình $f(x)=0$ (1) trên đoạn $[a;b]$.
- Nếu (1) vô nghiệm thì $S=\int_a^b |f(x)|dx=\left|\int_a^b f(x)dx\right|$.
- Nếu (1) có nghiệm thuộc $[a;b]$, giả sử có duy nhất 1 nghiệm là α thì:

$$S=\int_a^b |f(x)|dx=\int_a^\alpha |f(x)|dx+\int_\alpha^b |f(x)|dx=\left|\int_a^\alpha f(x)dx\right|+\left|\int_\alpha^b f(x)dx\right|$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x), y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được xác định: $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$



Ta có $(H):\begin{cases} (C_1): y=f(x)\\ (C_2): y=g(x)\\ x=a\\ x=b\end{cases}$; $\boxed{S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx}$

Phương pháp giải

Cách 1. Tính $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$ theo phương pháp đã trình bày ở phần tích phân hàm trị tuyệt đối.

Cách 2. Áp dụng tính chất $(*)$ đã được chứng minh ở trên.

- Giải phương trình $f(x)=g(x)$ (1) trên đoạn $[a;b]$.

- Nếu (1) vô nghiệm thì $S=\int\limits_a^b \left|f(x)-g(x)\right|dx=\left|\int\limits_a^b \left(f(x)-g(x)\right)dx\right|$.
- Nếu (1) có nghiệm thuộc $[a;b]$, giả sử có duy nhất 1 nghiệm là α thì:

$$S=\int\limits_a^b \left|f(x)-g(x)\right|dx=\left|\int\limits_a^\alpha \left(f(x)-g(x)\right)dx\right|+\left|\int\limits_\alpha^b \left(f(x)-g(x)\right)dx\right|$$

Chú ý.

- Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=g(y), x=h(y)$ và hai đường thẳng $y=c, y=d$ được xác định: $S=\int\limits_c^d \left|g(y)-h(y)\right|dy$.
- Diện tích hình phẳng *S* giới hạn bởi prabol $y=ax^2+bx+c$ và trục hoành với $b^2-4ac>0$ là $S^2=\dfrac{\left(b^2-4ac\right)^3}{36a^4}=\dfrac{\Delta^3}{36a^4}$

Gọi $x_1<x_2$ là hai nghiệm của phương trình $ax^2+bx+c=0$ ta có

$$S=\int_{x_1}^{x_2}\left|\left(ax^2+bx+c\right)\right|dx=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(ax^2+bx+c\right)dx\right|=\left|\frac{a}{3}\left(x_2^3-x_1^3\right)+\frac{b}{2}\left(x_2^2-x_1^2\right)+c\left(x_2-x_1\right)\right|$$

$$=\frac{1}{6}\left|x_2-x_1\right|\cdot\left|2a\left[\left(x_1+x_2\right)^2-x_1x_2\right]+3b\left(x_1+x_2\right)+6c\right|$$

$$=\frac{1}{6}\left|x_2-x_1\right|\cdot\left|2a\left[\left(x_1+x_2\right)^2-x_1x_2\right]+3b\left(x_1+x_2\right)+6c\right|$$

$$=\frac{1}{6}\left|x_2-x_1\right|\cdot\left|2a\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{c}{a}\right)-\frac{3b^2}{a}+6c\right|$$

$$=\frac{1}{6}\left|x_2-x_1\right|\cdot\left|4c-\frac{b^2}{a}\right|\Rightarrow S^2=\frac{1}{36a^2}\left[\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2\right]\left(b^2-4ac\right)^2=\frac{\left(b^2-4ac\right)^3}{36a^4}$$

Hoặc dùng công thức đã biết có $S=\dfrac{2}{3}bh=\dfrac{2}{3}\left|x_2-x_1\right|\cdot\left|c-\dfrac{b^2}{4a}\right|=\dfrac{\sqrt{\left(b^2-4ac\right)^3}}{6|a|}$

Suy ra diện tích *S* của hình phẳng giới hạn bởi $(P): y=ax^2+bx+c$ và đường thẳng $d: mx+n$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt là $S^2=\dfrac{\Delta^3}{36a^4}$ $\left(\Delta=(b-m)^2-4a(c-n)\right)$

II. CÁC BÀI TOÁN MINH HỌA.

ĐỀ BÀI.

Câu 1. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^2+4$, đường thẳng $x=3$, trục tung và trục hoành là

A. $\frac{22}{3}$ **B.** $\frac{32}{3}$ **C.** $\frac{25}{3}$ **D.** $\frac{23}{3}$

Câu 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=x^3-4x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-3; x=4$ là

A. $\frac{202}{3}$ **B.** $\frac{203}{4}$ **C.** $\frac{203}{4}$ **D.** $\frac{201}{4}$

Câu 3. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=2x^3-3x^2+1$ và $y=x^3-4x^2+2x+1$ là

A. $\frac{37}{13}$ **B.** $\frac{37}{12}$ **C.** 3 **D.** 4

Câu 4. Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=\left|x^2-1\right|$, $y=|x|+5$. Diện tích của (H) bằng?

A. $\frac{71}{3}$ **B.** $\frac{73}{3}$ **C.** $\frac{70}{3}$ **D.** $\frac{74}{3}$

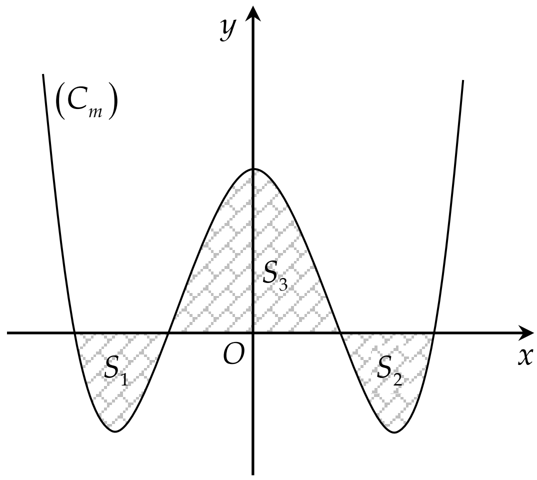
Câu 5. Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=\left|x^2-4x+3\right|$, $y=x+3$. Diện tích của (H) bằng?

A. $\frac{108}{5}$ **B.** $\frac{109}{5}$ **C.** $\frac{109}{6}$ **D.** $\frac{119}{6}$

Câu 6. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=x^2$; $y=\frac{1}{27}x^2$; $y=\frac{27}{x}$ bằng?

A. $27\ln 2$ **B.** $27\ln 3$ **C.** $28\ln 3$ **D.** $29\ln 3$

Câu 7. Cho hàm số $y=x^4-3x^2+m$ có đồ thị (C_m) với m là tham số thực. Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt như hình vẽ . Gọi S_1, S_2 và S_3 là diện tích các miền gạch chéo được cho trên hình vẽ. Tìm m để $S_1+S_2=S_3$.



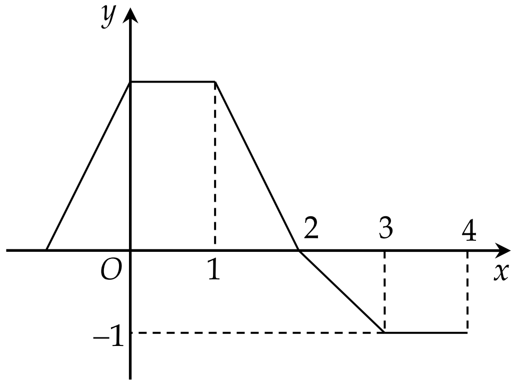
A. $m=-\frac{5}{2}$. **B.** $m=-\frac{5}{4}$.

C. $m=\frac{5}{2}$. **D.** $m=\frac{5}{4}$.

Câu 8 . Cho hàm số $y=\frac{x^4}{2}-2m^2x^2+2$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị của hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu, đồng thời đường thẳng cùng phương với trục hoành qua điểm cực đại tạo với đồ thị một hình phẳng có diện tích bằng $\frac{64}{15}$ là?

A. $\varnothing$ **B.** $\{\pm 1\}$ **C.** $\left\{\pm\frac{\sqrt{2}}{2};\pm 1\right\}$ **D.** $\left\{\pm\frac{1}{2};\pm 1\right\}$

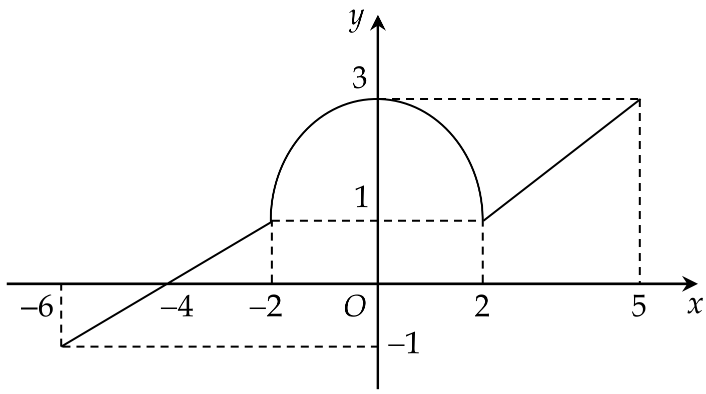
Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-1;4]$ như hình vẽ bên. Tính tích phân $I=\int_{-1}^{4} f(x)dx$?



A. $I=\frac{5}{2}$. **B.** $I=\frac{11}{2}$.

C. $I=5$. **D.** $I=3$.

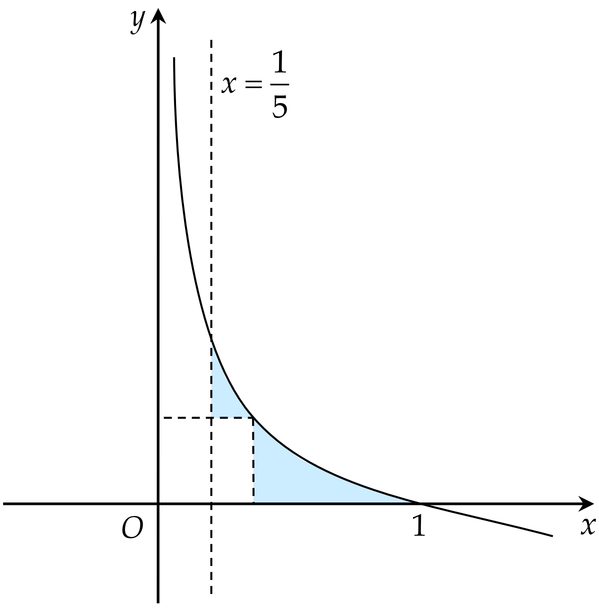
Câu 10. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[-6;5]$, có đồ thị gồm hai đoạn thẳng và nửa đường tròn như hình vẽ. Tính giá trị của tích phân $I=\int_{-6}^{5}[f(x)+2]dx$.



A. $I=2\pi+35$. **B.** $I=2\pi+34$.

C. $I=2\pi+33$. **D.** $I=2\pi+32$

Câu 11. Cho đồ thị hàm số $f(x)=-\ln x$ như hình vẽ. Hình chữ nhật nội tiếp dưới hình cong. để diện tích hình chữ nhật lớn nhất thì diện tích phần gạch xấp xỉ là?

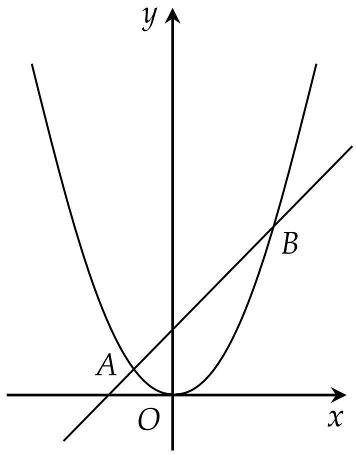


A. 1,43. **B.** 0,31 C. 2,8. **D.** 0,39.

Câu 12. Cho m là tham số thực, $m \in [1;3]$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - 3mx^2 - 2m^3$ và $y = -\frac{1}{3}x^3 + mx^2 - 5m^2x$. Gọi a,b lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của S. Tính tổng $a + b$??

A. $\frac{41}{6}$. **B.** 1. C. $\frac{21}{4}$. **D.** 2.

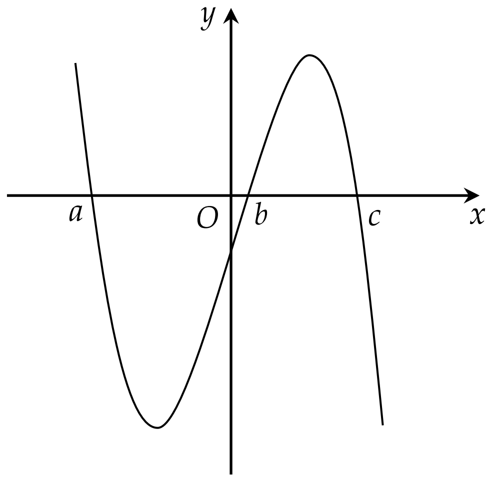
Câu 13. Cho Parabol $(P): y = x^2$ và hai điểm A, B thuộc (P) sao cho $AB = 2$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB đạt giá trị lớn nhất bằng



A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{4}$.

C. $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{3}{2}$

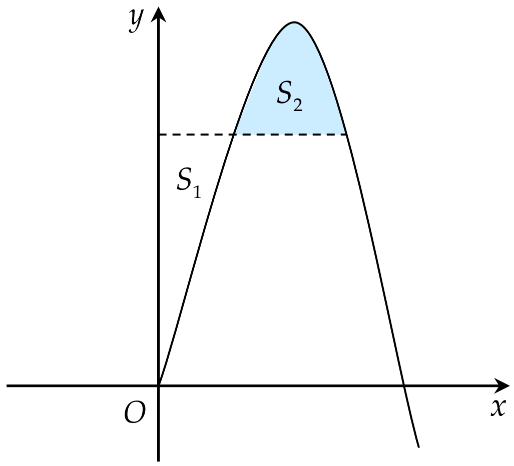
Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên R, đồ thị của $f'(x)$ như hình vẽ bên và hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số , trục hoành có diện tích bằng 1. Mệnh đề nào sau đây là đúng ?



A. $f(c) - f(b) > \frac{1}{2} > f(a) - f(b)$. **B.** $f(c) - f(b) > f(a) - f(b) > \frac{1}{2}$.

C. $f(c) - f(b) < \frac{1}{2} < f(a) - f(b)$. **D.** $\frac{1}{2} < f(c) - f(b) < f(a) - f(b)$.

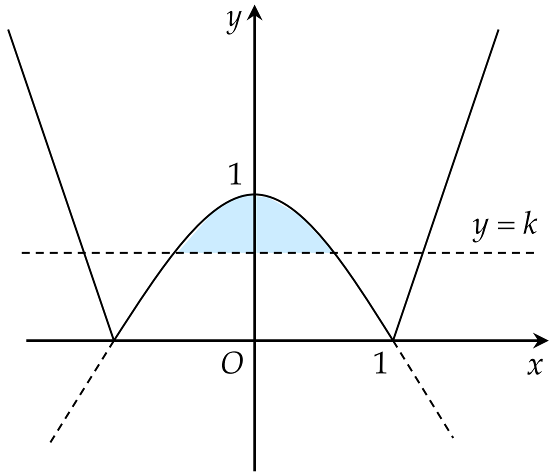
Câu 15. Cho đường cong (C): $y = 8x - 27x^3$ và đường thẳng $y = m$ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt nằm trong góc phần tư thứ nhất của hệ trục tọa độ Oxy và chia thành 2 miền phẳng có diện tích $S_1 = S_2$ như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng ?



A. $0 < m < \frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{2} < m < 1$.

C. $1 < m < \frac{3}{2}$. **D.** $\frac{3}{2} < m < 2$.

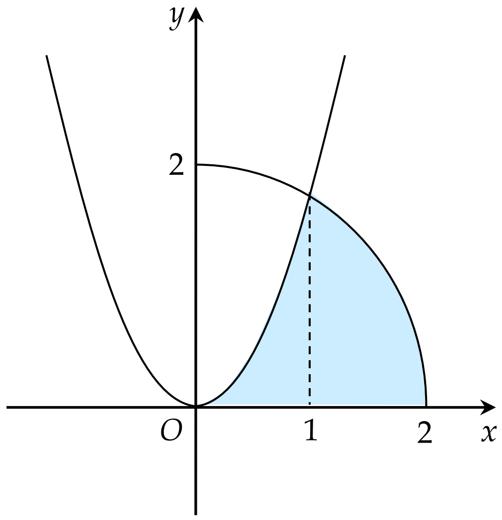
Câu 16. Cho hình phẳng H được giưới hạn bởi các đường $y = \left|x^2 - 1\right|$, $y = k\left(0 < k < 1\right)$. Tìm k để diện tích của hình phẳng H gấp đôi diện tích của miền phẳng gạch sọc trong hình vẽ bên ?



A. $\sqrt[3]{4}$. **B.** $\sqrt[3]{2} - 1$.

C. $\frac{1}{2}$. **D.** $\sqrt[3]{4} - 1$.

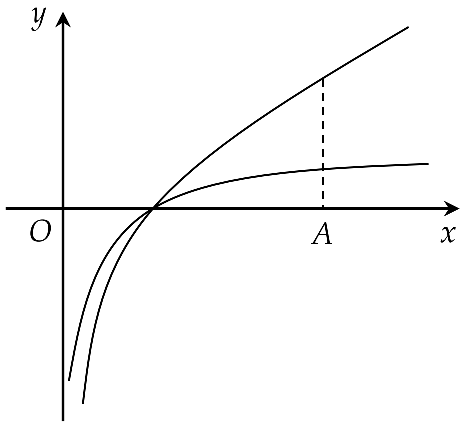
Câu 17. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \sqrt{3}x^2$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{4 - x^2}$ (với $0 \le x \le 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng?



A. $\frac{4\pi + \sqrt{3}}{12}$ **B.** $\frac{4\pi - \sqrt{3}}{6}$.

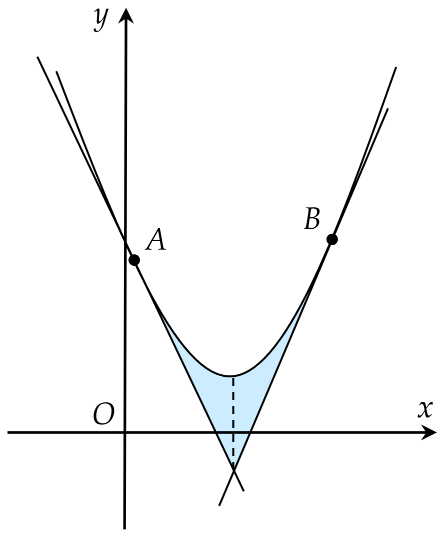
C. $\frac{4\pi + 2\sqrt{3} - 3}{6}$. **D.** $\frac{5\sqrt{3} - 2\pi}{3}$.

Câu 18. Cho 2 số thực dương a, b khác 1 và đồ thị của các hàm số $y = \log_a x, y = \log_b x$ như hình vẽ bên. Gọi d là đường thẳng song song vưới trục Oy và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x = k\left(k > 1\right)$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = \log_a x$, d và trục hoành; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = \log_b x$, d và trục hoành. Biết $S_1 = 4S_2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $b = a^4$. **B.** $a = b^4$. **C.** $b = a^4 \ln 2$. **D.** $a = b^4 \ln 2$.

Câu 19. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2 - 4x + 5$ và các tiếp tuyến của (P) tại các điểm $A(1;2), B(4;5)$?



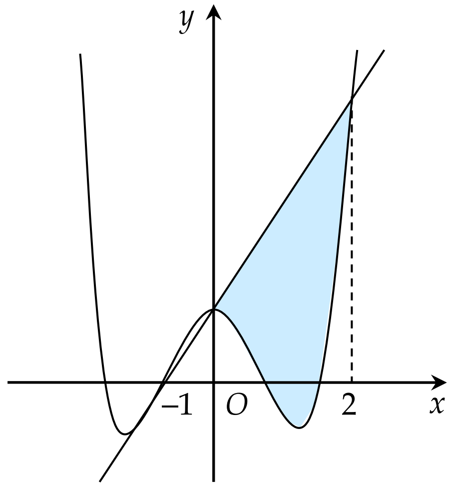
A. $\frac{9}{4}$.

B. $\frac{9}{8}$.

C. $\frac{5}{2}$.

D. $\frac{9}{2}$.

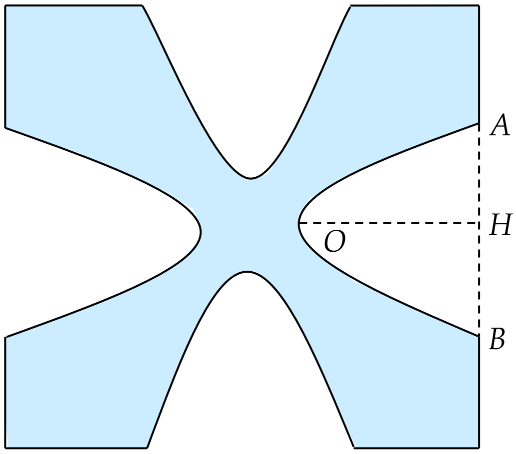
Câu 20. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị (C). Biết rằng (C) đi qua điểm $A(-1;0)$, tiếp tuyến d tại A của (C) cắt (C) tại hai điểm khác có hoành độ tương ứng là $x = 0, x = 2$ bằng $\frac{28}{5}$



A. $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{1}{4}$.

C. $\frac{2}{9}$. **D.** $\frac{1}{5}$.

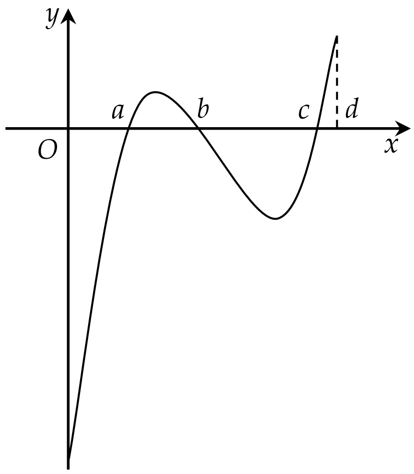
Câu 21. Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh 10cm bằng cách khoét bỏ đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình vẽ bên. Biết $AB = 5cm, OH = 4cm$. Tính diện tích bề mặt hoa văn đó?



A. $\frac{140}{3}cm^2$. **B.** $\frac{40}{3}cm^2$.

C. $\frac{160}{3}cm^2$. **C.** $\frac{160}{3}cm^2$.

Câu 22. Cho các số thực a,b,c,d thỏa mãn $0 < a < b < c < d$ và hàm số. Đồ thị của hàm số như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên đoạn . Mệnh đề nào dưới đây đúng ?



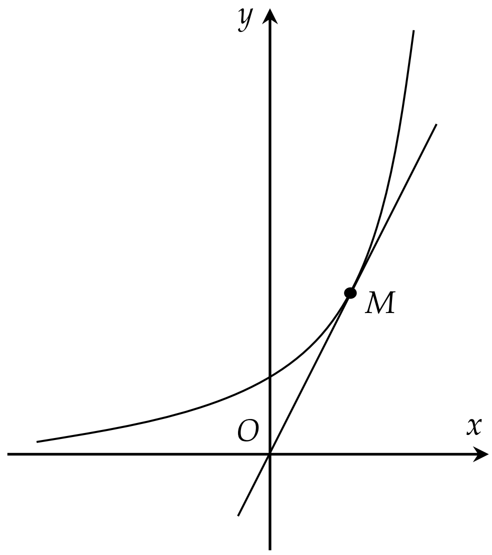
A. $M + m = f(0) + f(c)$.

B. $M + m = f(d) + f(c)$.

C. $M + m = f(b) + f(a)$.

D. $M + m = f(0) + f(a)$.

Câu 23. Diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi đường cong $(C): y = e^x$, tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(1;e)$ và trục Oy. Diện tích của (H) là ?



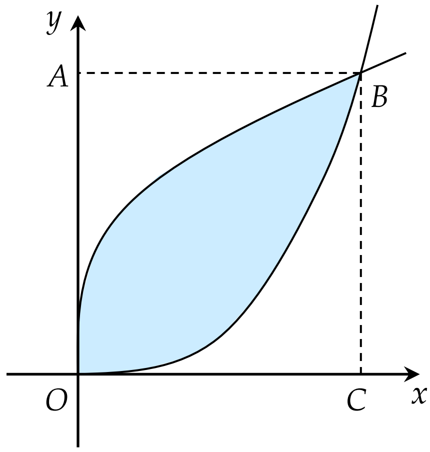
A. $\frac{e+2}{2}$.

B. $\frac{e-1}{2}$.

C. $\frac{e+1}{2}$.

D. $\frac{e-2}{2}$.

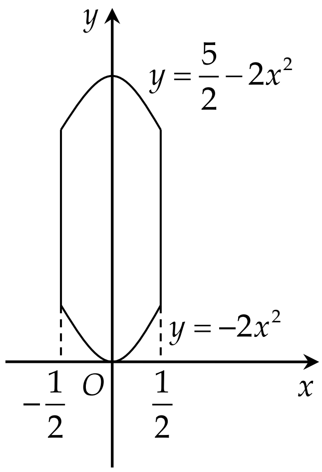
Câu 24. Cho một viên gạch men có dạng hình vuông OABC như hình vẽ. Sau khi tọa độ hóa, ta có $O(0;0)$, $A(0;1)$, $B(1;1)$, $C(1;0)$ và hai đường cong trong hình lần lượt là đồ thị hàm số $y=x^3$ và $y=\sqrt[3]{x}$. Tính tỷ số diện tích của phần tô đậm so với diện tích phần còn lại của hình vuông.



A. $b=-2.$ **B.** $b=-\dfrac{1}{2}$

C. $b=-1$ **D.** $\dfrac{-3}{2}.$

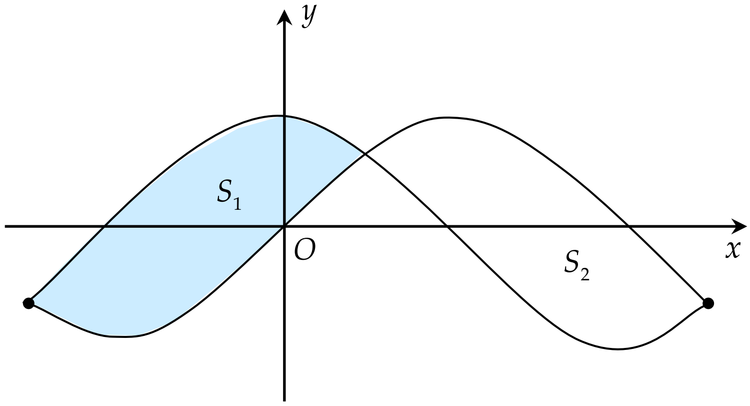
Câu 25. Sơ đồ ở bên phải phác thảo của một khung cửa sổ. Diện tích S của cửa sổ được tính bởi công thức nào sau đây?



A. $S=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{5}{2}-4x^2\right)dx$. **B.** $S=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left|\frac{5}{2}-2x^2\right|dx$.

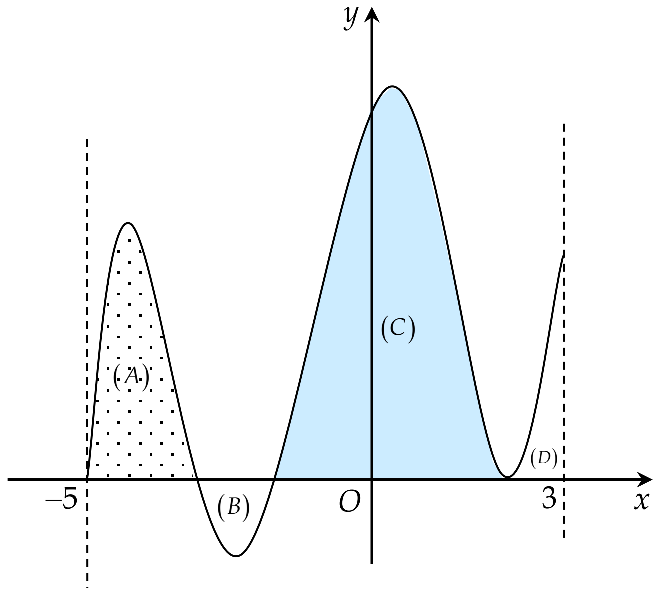
C. $S=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}2x^2\,dx$. **D.** $S=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(1-4x^2\right)dx$

Câu 26. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=\sin x, y=\cos x$ như hình vẽ dưới và S_1, S_2 là diện tích của các phần bên trái và bên phải. Tính $S^2{}_1+S^2{}_2$?



A. $10+2\sqrt{2}.$ **B.** 8 . C. $11+2\sqrt{2}.$ **D.** 16 .

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-5;3]$ và có đồ thị như hình vẽ dưới. Biết diện tích các hình phẳng $(A),(B),(C),(D)$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và trục hoành lần lượt bằng 6;3;12;2. Tính giá trị của biểu thức tích phân $\int_{-3}^{1}\left(2f(2x+1)+1\right)dx$?



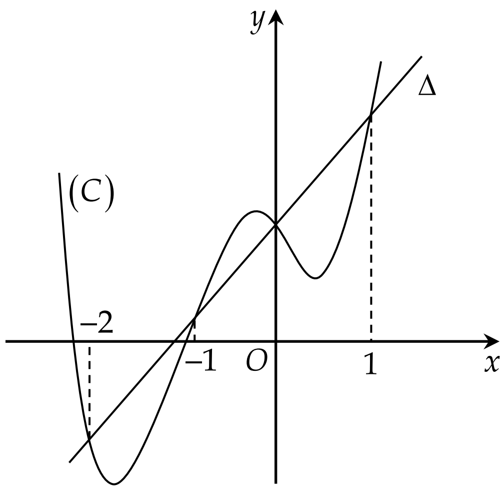
A. 27.

B. 25.

C. 17.

D. 21.

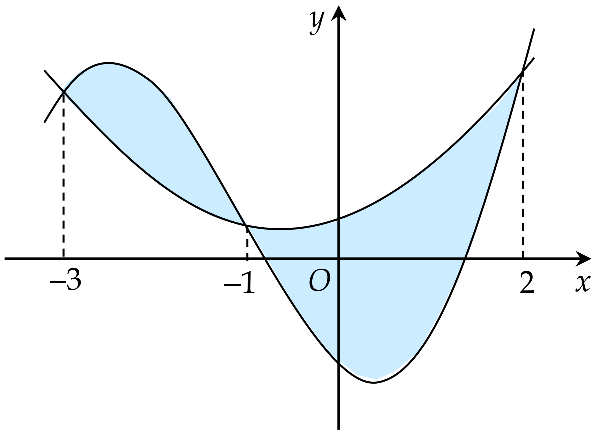
Câu 28. Cho đường cong bậc 4 có dạng $(C): y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ và đường thẳng $\Delta: y = mx + n$ có đồ thị như hình vẽ. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và Δ?



A. $\frac{289}{30}$. **B.** $\frac{69}{10}$.

C. $\frac{281}{30}$. **D.** $\frac{49}{30}$.

Câu 29. Cho đồ thị 2 hàm số như hình vẽ $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 1$ và $g(x) = dx^2 + ex = \frac{1}{2}$ $(a, b, c, d, e \in \mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -3; -1; 2 (tham khảo hình vẽ).



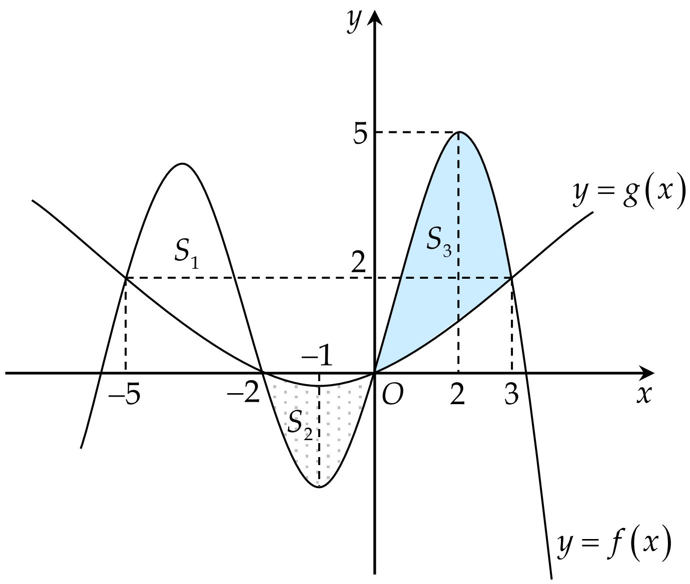
A. $\frac{125}{12}$ **B.** $\frac{253}{12}$

C. $\frac{253}{48}$ **D.** $\frac{125}{48}$

Câu 30. Cho parabol $(P): g(x) = -\frac{1}{2}ax^2 + (2a^2 + b)x$ và hàm số $f(x) = cx^3 - 2bx^2 - \frac{1}{2}x + d$ có đồ thị (C). Biết rằng (P) cắt (C) tại 3 điểm có hoành độ $x_1 = -1; x_2 = 0; x_3 = 2$. Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và (C) đạt giá trị nhỏ nhất bằng?

A. $\frac{259}{256}$ **B.** $\frac{257}{256}$ **C.** $\frac{255}{256}$ **D.** $\frac{261}{256}$

Câu 31. Cho hàm số xác định và liên tục trên đoạn $\left[-5;3\right]$. Biết rằng diện tích hình phẳng S_1, S_2, S_3 giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$ và đường cong $g\left(x\right)=ax^2+bx+c$ lần lượt là m,n,p. Tính $\int_{-5}^{3} f\left(x\right)dx$?



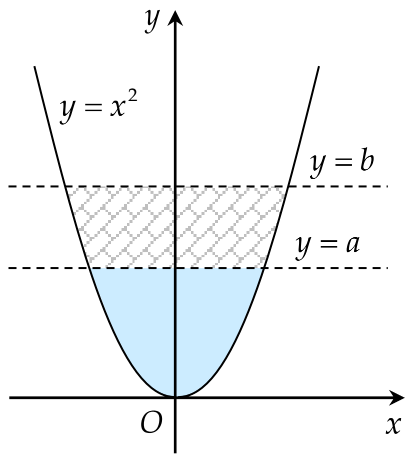
A. $-m+n-p-\dfrac{208}{45}$.

B. $m-n+p+\dfrac{208}{45}$.

C. $m-n+p-\dfrac{208}{45}$.

D. $-m+n-p+\dfrac{208}{45}$.

Câu 32. Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho parabol $\left(P\right): y = x^2$ và hai đường thẳng $y = a$, $y = b$ $\left(0 < a < b\right)$ (hình vẽ). Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $\left(P\right)$ và đường thẳng $y = a$ (phần tô đen); $\left(S_2\right)$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $\left(P\right)$ và đường thẳng $y = b$ (phần gạch chéo). Với điều kiện nào sau đây của a và b thì $S_1 = S_2$?



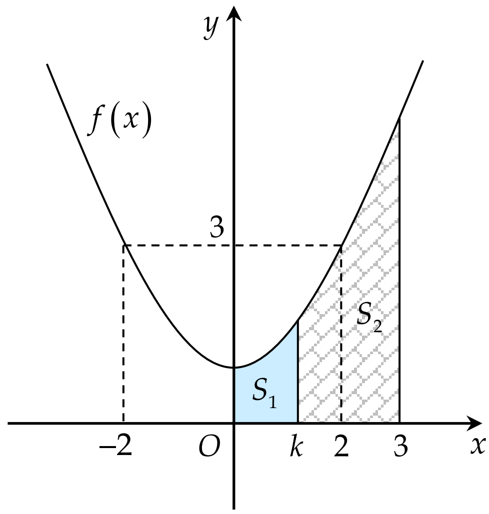
A. $b = \sqrt[3]{4}a$

B. $b = \sqrt[3]{2}a$

C. $b = \sqrt[3]{3}a$

D. $b = \sqrt[3]{6}a$

Câu 33. Hàm số $y = f\left(x\right)$ có đồ thị $\left(C\right)$ là đường parabol bậc hai như hình vẽ. Hình phẳng giới hạn bởi $\left(C\right)$, trục Ox, đường $x = 3$ có diện tích S. Đường thẳng $x = k$ với $k \in \left(0;3\right)$ chia S ra thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2. Nếu $S_1 = 2S_2$ thì phát biểu nào sau đây đúng ?



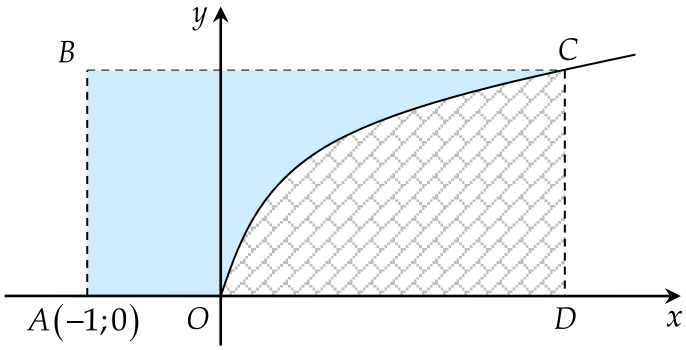
A. $k \in \left(2,2;2,3\right)$

B. $k \in \left(2,3;2,4\right)$

C. $k \in \left(2,4;2,5\right)$

D. $k \in \left(2,5;2,6\right)$

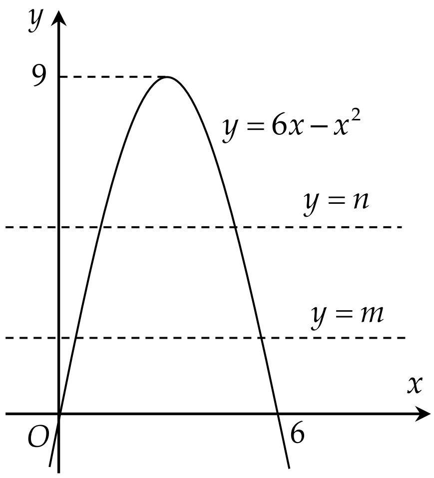
Câu 34. Trong mặt phẳng tọa độ, cho hình chữ nhật (H) có một cạnh nằm trên trục hoành, và có hai đỉnh trên một đường chéo là $A(-1;0)$ và $C(a;\sqrt{a})$, với $a>0$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau, tìm a?



A. $a=9$ C. $a=0,5$

B. $a=4$ **D.** $a=3$

Câu 35. Gọi (H) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=6x-x^2$ và trục hoành. Các đường thẳng $y=m, y=n(0<m<n<9)$ chia (H) thành 3 phần có diện tích bằng nhau như hình vẽ bên. Tính $T=(9-m)^3+(9-n)^3$?



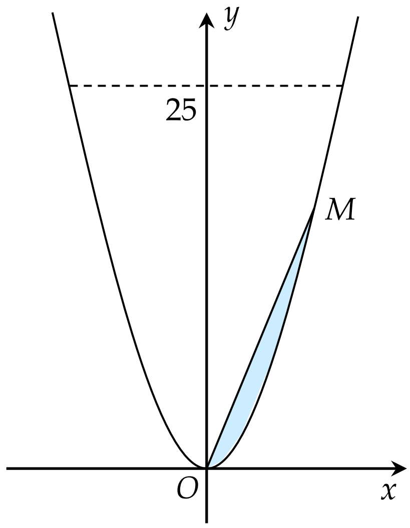
A. 405.

B. 407.

C. 409.

D. 403.

Câu 36. Ông B có một khu vườn giới hạn bởi đường parabol và một đường thẳng. Nếu đặt trong hệ tọa độ như hình vẽ bên thì parabol có phương trình $y=x^2$ và đường thẳng là $y=25$. Ông B dự định dùng một mảnh vườn nhỏ được chia từ khu vườn bởi đường thẳng đi qua O và điểm M trên parabol để trồng hoa. Hãy giúp ông B xác định điểm M bằng cách tính độ dài OM để diện tích mảnh vườn nhỏ bằng $\frac{9}{2}$?



A. $OM=2\sqrt{5}$ **B.** $OM=3\sqrt{10}$

C. 15 **D.** $OM=10$

CHINH PHỤC OLYMPIC TOÁN

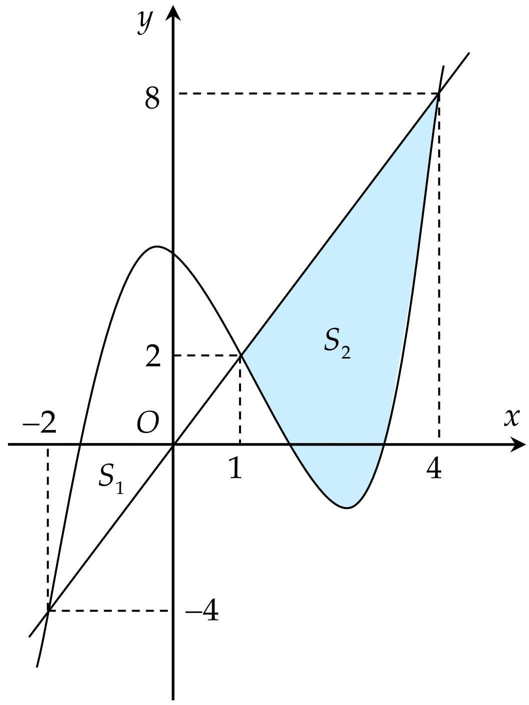
Câu 37. Cho đồ thị hàm $f'(x)$ như hình vẽ (biết $S_2 > S_1$). Biết $h(x) = f(x) - x^2$. Kết quả nào dưới đây đúng ?

A. $h(0) > h(-2) > h(4)$

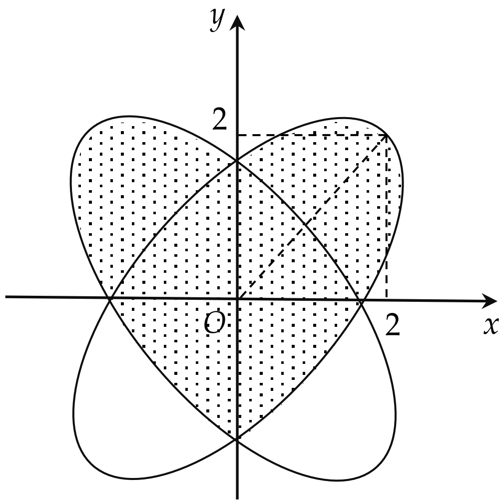
B. $h(-2) > h(0) = h(4)$

C. $h(4) > h(0) > h(-2)$

D. $h(-2) > h(0) > h(4)$



Câu 38. Cho đồ thị hình 2 elip đối xứng nhau qua Ox và Oy như hình vẽ. Biết rằng điểm $A(2;2)$ thỏa mãn OA là một nửa độ dài trục lớn khi ta xoay elip về elip chính tắc và khoảng cách từ tâm đến các giao điểm bằng 1,8. Tỉ lệ diện tích hình trái tim được tạo ra bên phải và diện tích 1 hình cánh ngoài (2 elip giao nhau tạo ra 4 hình cánh) gần nhất với giá trị ?



A. 4,48 **B.** 3,6

C. 4,2 **D.** 4,6

Câu 39. Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ với $a < b$. Kí hiệu S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2f(x)$, $y = 2g(x)$, $x = a$ và $x = b$; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x) - 2$, $y = g(x) - 2$, $x = a$ và $x = b$. Mệnh đề nào sau đây là đúng ?

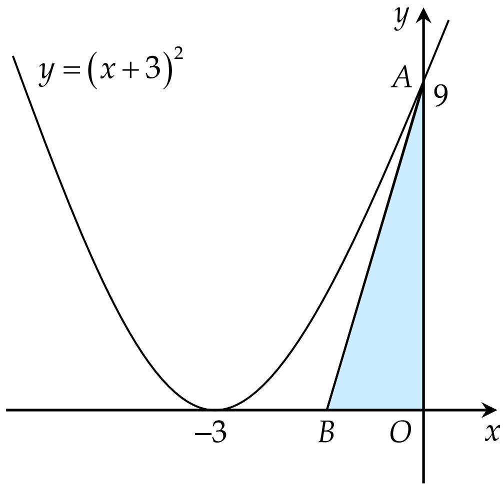
A. $S_1 = S_2$.

B. $S_1 = 2S_2$.

C. $S_2 = 2S_1 - 2$.

D. $S_2 = 2S_1 + 2$.

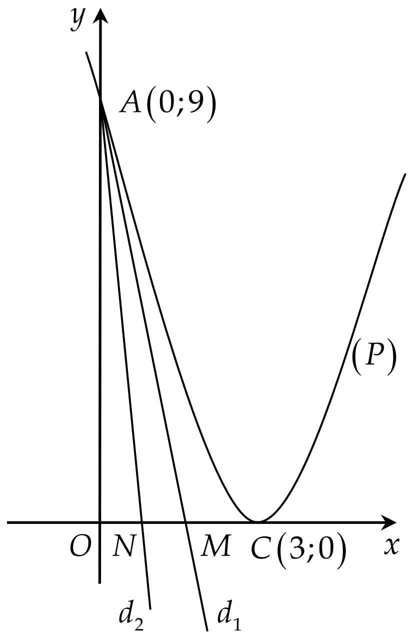
Câu 40. Xét hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=(x+3)^2$, trục hoành và đường thẳng $x=0$. Gọi $A(0;9)$, $B(b;0)$ $(-3<b<0)$. Tính giá trị của tham số b để đoạn thẳng AB chia (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau.



A. $b=-2$. **B.** $b=-\frac{1}{2}$

C. $b=-1$ **D.** $\frac{-3}{2}$.

Câu 41. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=(x-3)^2$, trục tung và trục hoành. Gọi k_1, k_2 $(k_1>k_2)$ là hệ số góc của hai đường thẳng cùng đi qua điểm $A(0;9)$ và chia (H) làm ba phần có diện tích bằng nhau. Tính k_1-k_2.



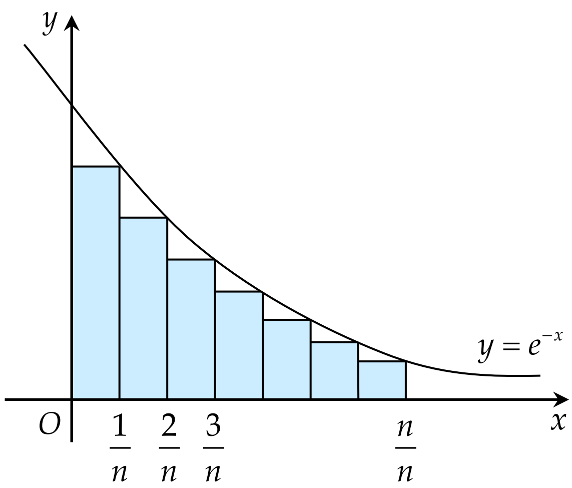
A. $\frac{13}{2}$

B. 7

C. $\frac{25}{4}$

D. $\frac{27}{4}$.

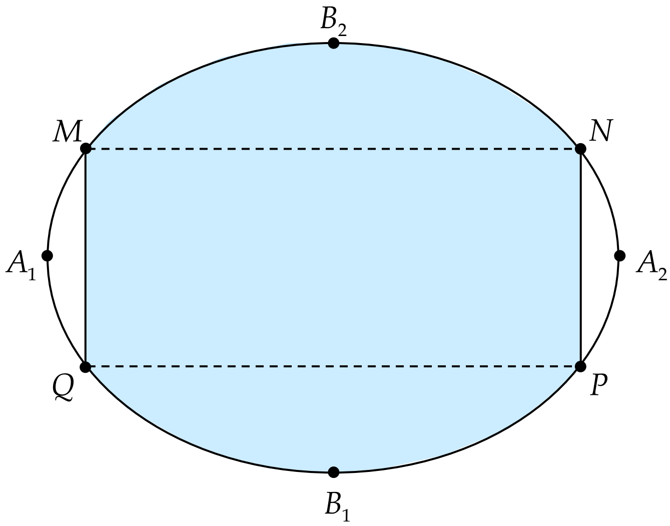
Câu 42. Một hình phẳng được giới hạn bởi $y=f(x)=e^{-x}, y=0, x=0$ và $x=1$. Ta chia đoạn $[0;1]$ thành n phần bằng nhau tạo thành một hình bậc thang có tổng diện tích S_n. Tính $\lim S_n=\int_0^1 f(x)dx$



A. $1-e^{-1}$ **B.** e^{-1}

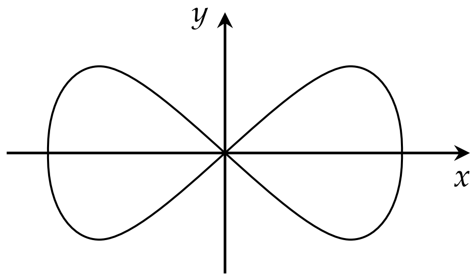
C. $\frac{2}{e^{-1}}-2$ **D.** e

Câu 43. Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Biết chi phí sơn phần tô đậm là 200.000 đồng/m^2 và phần còn lại là 100.000 đồng/m^2. Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2=8$ m, $B_1B_2=6$ m và tứ giác MNPQ là hình chữ nhật có $MQ=3$ m?



A. 7.322.000 **B.** 7.213.000 **C.** 5.526.000 **D.** 5.782.000

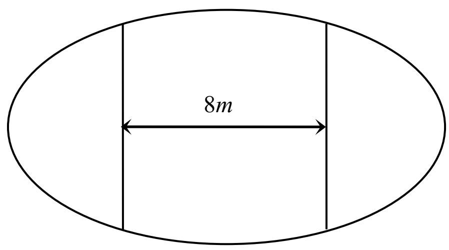
Câu 44. Trong Công viên Toán học có những mảnh đất mang hình dáng khác nhau. Mỗi mảnh được trồng một loài hoa và nó được tạo thành bởi một trong những đường cong đẹp trong toán học. Ở đó có một mảnh đất mang tên Bernoulli, nó được tạo thành từ đường Lemmiscate có phương trình



Trong hệ tọa độ Oxy là $16y^2 = x^2\left(25 - x^2\right)$ như hình vẽ bên. Tính diện tích S của mảnh đất Bernoulli biết rằng mỗi đơn vị trong hệ tọa độ Oxy tương ứng với chiều dài 1 mét.

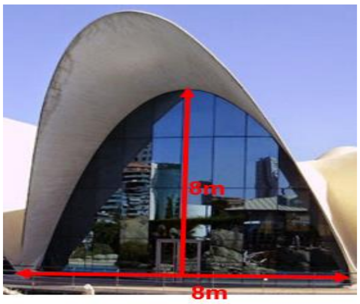
A. $S = \frac{125}{6}\left(m^2\right)$ **B.** $S = \frac{125}{4}\left(m^2\right)$ **C.** $S = \frac{250}{3}\left(m^2\right)$ **D.** $S = \frac{125}{3}\left(m^2\right)$

Câu 45. Ông An có một mảnh vườn hình Elip có độ dài trục lớn bằng 16m và độ dài trục bé bằng 10m. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng 8m và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng/1m^2. Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn.)



A. 7.862.000 **B.** 7.653.000 **C.** 7.128.000 **D.** 7.128.000

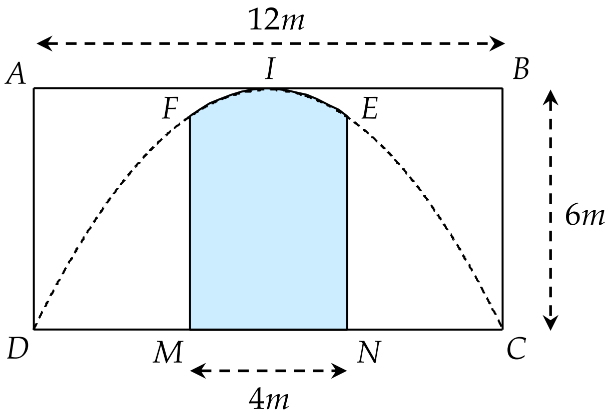
Câu 46. Vòm cửa lớn của một trung tâm văn hoá có dạng hình Parabol. Người ta dự định lắp cửa kính cường lực cho vòm cửa này. Hãy tính diện tích mặt kính cần lắp vào biết rằng vòm cửa cao *8m* và rộng *8m (như hình vẽ)*



A. $\frac{28}{3}\left(m^2\right)$ **B.** $\frac{26}{3}\left(m^2\right)$

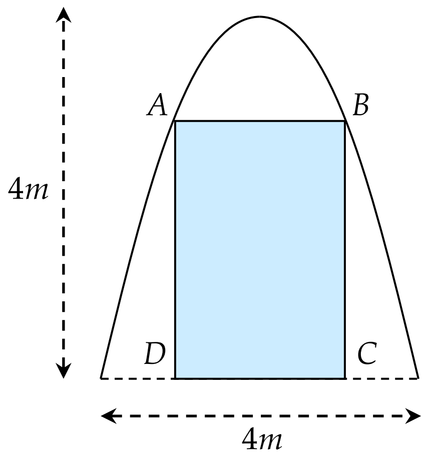
C. $\frac{128}{3}\left(m^2\right)$ **D.** $\frac{131}{3}\left(m^2\right)$

Câu 47. Một công ty quảng cáo X muốn làm một bức tranh trang trí hình $MNEIF$ ở chính giữa của một bức tường hình chữ nhật $ABCD$ có chiều cao $BC = 6$ m, chiều dài $CD = 12$ m (*hình vẽ bên*). Cho biết $MNEF$ là hình chữ nhật có $MN = 4$ m; cung EIF có hình dạng là một phần của cung parabol có đỉnh *I* là trung điểm của cạnh *AB* và đi qua hai điểm *C, D*. Kinh phí làm bứctranh là 900.000 đồng/m^2. Hỏi công ty *X* cần bao nhiêu tiền để làm bức tranh đó ?



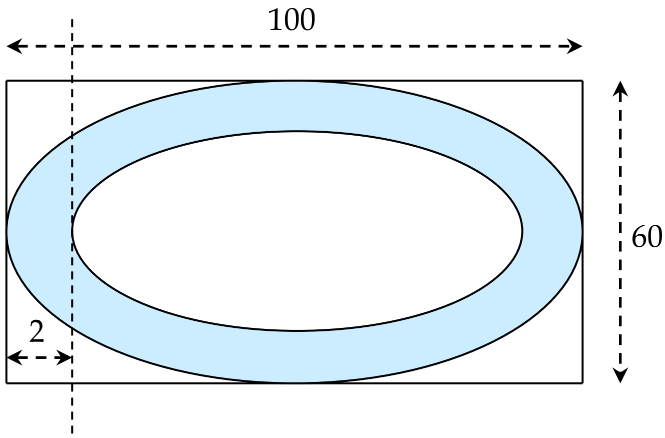
A. $\frac{28}{3}\left(m^2\right)$ **B.** $\frac{28}{3}\left(m^2\right)$ **C.** $\frac{128}{3}\left(m^2\right)$ **D.** $\frac{131}{3}\left(m^2\right)$

Câu 48. Trong đợt hội trại "Khi tôi 18" được tổ chức tại trường THPT X, Đoàn trường có thực hiện một dự án ảnh trưng bày trên một pano có dạng parabol như hình vẽ. Biết rằng Đoàn trường sẽ yêu cầu các lớp gửi hình dự thi và dán lê n khu vực hình chữ nhật $ABCD$, phần còn lại sẽ được trang trí hoa văn cho phù hợp. Chi phí dán hoa văn là 200.000 đồng cho một m^2 bảng. Hỏi chi phí thấp nhất cho việc hoàn tất hoa văn trên pano sẽ là bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn)?



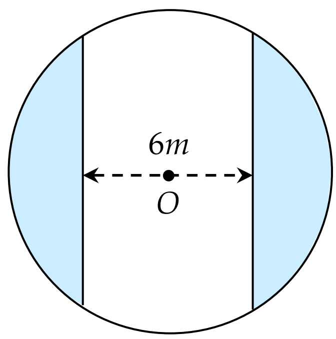
A. 900.000 **B.** 1.232.000 **C.** 902.000 **D.** 1.230.000

Câu 49. Một sân chơi cho trẻ em hình chữ nhật có chiều dài 100m và chiều rộng là 60m người ta làm một con đường nằm trong sân (Như hình vẽ). Biết rằng viền ngoài và viền trong của con đường là hai đường elip, Elip của đường viền ngoài có trục lớn và trục bé lần lượt song song với các cạnh hình chữ nhật và chiều rộng của mặt đường là 2m. Kinh phí cho mỗi m^2 làm đường 600.000 đồng. Tính tổng số tiền làm con đường đó. (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).



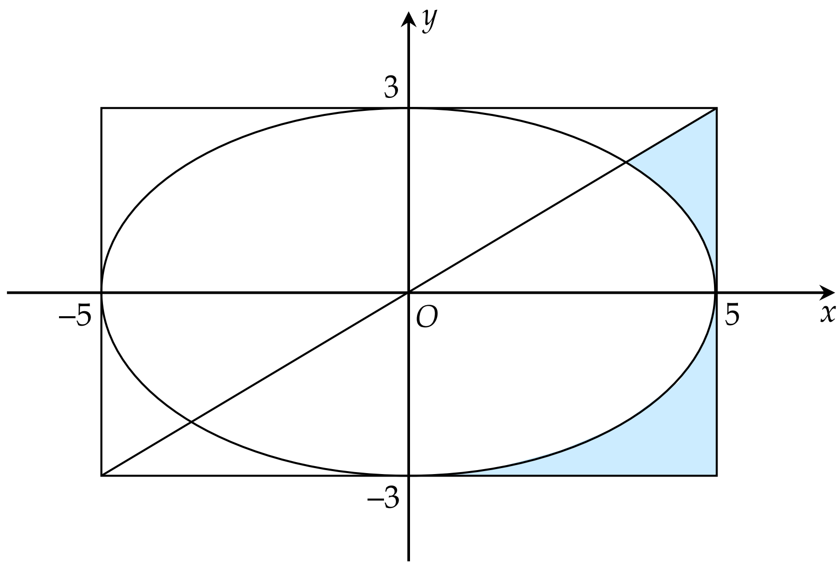
A. 293904000. **B.** 283904000. 293804000. **D.** 283604000.

Câu 50. Một mảnh vườn hình tròn tâm O bán kính 6m. Người ta cần trồng cây trên dải đất rộng 6m nhận O làm tâm đối xứng, biết kinh phí trồng cây là 70000 đồng / m^2. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cây trên dải đất đó (số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị)

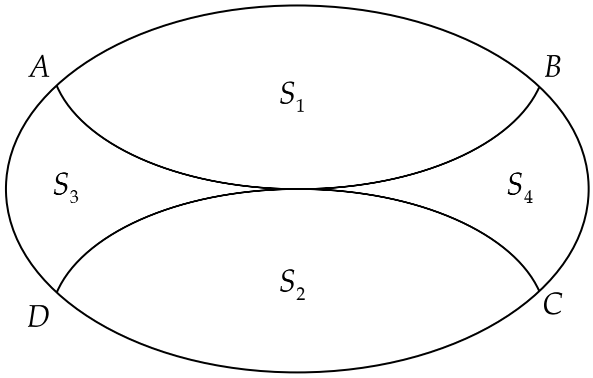


A. 8412322 **B.** 8142232
C. 4821232 **D.** 4821322

Câu 51. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho elip chính tắc có độ dài trục lớn bằng 10 và độ dài trục nhỏ bằng 6 và hình chữ nhật ngoại tiếp elip đã cho. Diện tích phần hình phẳng được gạch chéo (tham khảo hình vẽ bên) bằng?

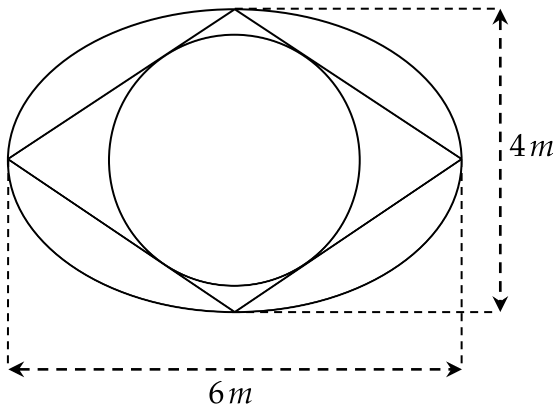


Câu 52. Một bồn hoa hình elip tâm O có độ dài trục lớn bằng 6m, độ dài trục bé bằng 4m. Người ta chia bồn hoa thành 4 phần S_1, S_2, S_3, S_4 bởi hai Parabol có cùng đỉnh O và đối xứng qua O như hình vẽ bên dưới.



A. 1.975.978 **B.** 1.970.978 **C.** 1.957.978 **D.** 1.976.978

Câu 53. Trường THPT chuyên Nguyễn Trãi dự định xây hồ nước cho học sinh. Khuôn viên hồ nước là một hình elip, trong đó phần hình thoi là để chứa nước, phần còn lại là để ngồi (kích thước như hình vẽ). Trong phần hình thoi, người ta lại tiếp tục đặt đài phun nước hình tròn tiếp xúc với hình thoi. Tính tỉ số diện tích đài phun nước so với diện tích bệ ngồi.



A. $1,19$ **B.** $1,27$ **C.** $1,33$ **D.** $1,43$

Câu 54. Tính diện tích "tam giác cong" tạo bởi đồ thị của 3 hàm $f(x)=x^2-2x$; $g(x)=x^2-6x+6$; $h(x)=-x^2+2x-2$

A. $\frac{11}{24}$ **B.** $\frac{17}{24}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{1}{6}$

Câu 55. Cho hai đường cong $\begin{cases} y^2=x^3 \\ y^2=(2-x)^3 \end{cases}$. Gọi S_1 là diện tích tạo bởi hai đường cong này; S_2 là diện tích đa giác lồi tạo bởi các giao điểm của 2 đường cong với nhau và với trục hoành. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$

A. $\frac{4}{5}$ **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** $\frac{5}{6}$ **D.** $\frac{17}{20}$

Câu 56. Tính diện tích giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)=\frac{1}{3}\left|(x+3)(x+1)(x-3)\right|$ và đường thẳng $(d):7x-12y+112=0$.

A. $\frac{901}{18}$ **B.** $\frac{903}{18}$ **C.** $\frac{905}{18}$ **D.** $\frac{907}{18}$

Câu 57. Gọi S_a là diện tích được giới hạn bởi 2 đồ thị hàm số $f(x)=|x^2-1|$ và đồ thị hàm số $g(x)=\begin{cases}5+ax\text{ khi }x<0\\5-ax\text{ khi }x>0\end{cases}$, với $a>0$. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_5}$

A. $\frac{33}{13}$ **B.** $\frac{13}{33}$ **C.** $\frac{36}{11}$ **D.** $\frac{11}{36}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^2+4$, đường thẳng $x=3$, trục tung và trục hoành là

A. $\frac{22}{3}$ **B.** $\frac{32}{3}$ **C.** $\frac{25}{3}$ **D.** $\frac{23}{3}$

Lời giải

Theo công thức ta có $S=\int_0^3\left|-x^2+4\right|dx$

Xét phương trình $-x^2+4=0$ trên đoạn $[0;3]$ có nghiệm $x=2$.

Suy ra $S=\int_0^3\left|-x^2+4\right|dx=\int_0^2\left|-x^2+4\right|dx+\int_2^3\left|-x^2+4\right|dx=\int_0^2\left(-x^2+4\right)dx+\int_2^3\left(4-x^2\right)dx=\frac{23}{3}$.

Hoặc $S=\int_0^3\left|-x^2+4\right|dx=\left|\int_0^2\left(-x^2+4\right)dx\right|+\left|\int_2^3\left(-x^2+4\right)dx\right|=\frac{23}{3}$.

Chọn ý **D.**

Câu 2

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=x^3-4x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-3; x=4$ là

A. $\frac{202}{3}$ **B.** $\frac{203}{4}$ **C.** $\frac{203}{4}$ **D.** $\frac{201}{4}$

Lời giải

Xét phương trình $x^3-4x=0$ trên đoạn $[-3;4]$ có nghiệm $x=-2;\ x=0;\ x=2$.

Suy ra $S=\int_{-3}^{-2}\left|x^3-4x\right|dx+\int_{-2}^{0}\left|x^3-4x\right|dx+\int_0^2\left|x^3-4x\right|dx+\int_2^4\left|x^3-4x\right|dx=\frac{201}{4}$

Nhận xét. Dùng bảng xét dấu để bỏ trị tuyệt đối, sau đó tính tích phân cơ bản nếu làm tự luận. Đối với trắc nghiệm, các em có thể sử dụng máy tính cầm tay để bấm kết quả.

Câu 3

Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=2x^3-3x^2+1$ và $y=x^3-4x^2+2x+1$ là

A. $\frac{37}{13}$ **B.** $\frac{37}{12}$ **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm :

$$2x^3-3x^2+1=x^3-4x^2+2x+1 \Leftrightarrow \left(2x^3-3x^2+1\right)-\left(x^3-4x^2+2x+1\right)=x^3+x^2-2x=0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Nên $S=\int_{-2}^{1}\left|x^3+x^2-2x\right|dx=\left|\int_{-2}^{0}\left(x^3+x^2-2x\right)dx\right|+\left|\int_{0}^{1}\left(x^3+x^2-2x\right)dx\right|$

$$=\left|\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{-2}^{0}\right|+\left|\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{0}^{1}\right|=\frac{37}{12}.$$

Nhận xét. Áp dụng nếu trên đoạn $[a;b]$, hàm số $f(x)$ không đổi dấu thì

$$\int_a^b \left|f(x)\right|dx=\left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

Câu 4

Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=\left|x^2-1\right|$, $y=|x|+5$. Diện tích của (H) bằng?

A. $\frac{71}{3}$ **B.** $\frac{73}{3}$ **C.** $\frac{70}{3}$ **D.** $\frac{74}{3}$

Lời giải

Xét phương trình $\left|x^2-1\right|=|x|+5$ có nghiệm $x=-3,\ x=3$

Suy ra $S=\int_{-3}^{3}\left|\left(\left|x^2-1\right|-\left(|x|+5\right)\right)\right|dx=2\int_0^3\left|\left|x^2-1\right|-(x+5)\right|dx$ (vì hàm số $\left|x^2-1\right|-\left(|x|+5\right)$ là hàm số chẵn nên đồ thị đối xứng qua trục tung).

Bảng xét dấu x^2-1 trên đoạn $[0;3]$

x	0		1		3
x^2-1		-	0	+	

Vậy $S=2\left(\int_0^1\left|-x^2-x-4\right|dx+\int_1^3\left|x^2-x-6\right|dx\right)=2\left[\int_0^1\left(x^2+x+4\right)dx+\int_1^3\left(-x^2+x+6\right)dx\right]=\frac{73}{3}$.

Hoặc $S=2\left(\int_0^1\left|-x^2-x-4\right|dx+\int_1^3\left|x^2-x-6\right|dx\right)=2\left[\left|\int_0^1\left(-x^2-x-4\right)dx\right|+\left|\int_1^3\left(x^2-x-6\right)dx\right|\right]=\frac{73}{3}$.

Câu 5

Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=\left|x^2-4x+3\right|$, $y=x+3$. Diện tích của (H) bằng?

A. $\frac{108}{5}$ **B.** $\frac{109}{5}$ **C.** $\frac{109}{6}$ **D.** $\frac{119}{6}$

Lời giải

Xét phương trình $\left|x^2-4x+3\right|=x+3$ có nghiệm $x=0,\ x=5$

$$\Rightarrow S=\int_0^5\left|\left[\left|x^2-4x+3\right|-(x+3)\right]\right|dx=\int_0^5\left|\left|x^2-4x+3\right|-x-3\right|dx$$

Ta có $x^2-4x+3\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le 1\\x\ge 3\end{array}\right.$.

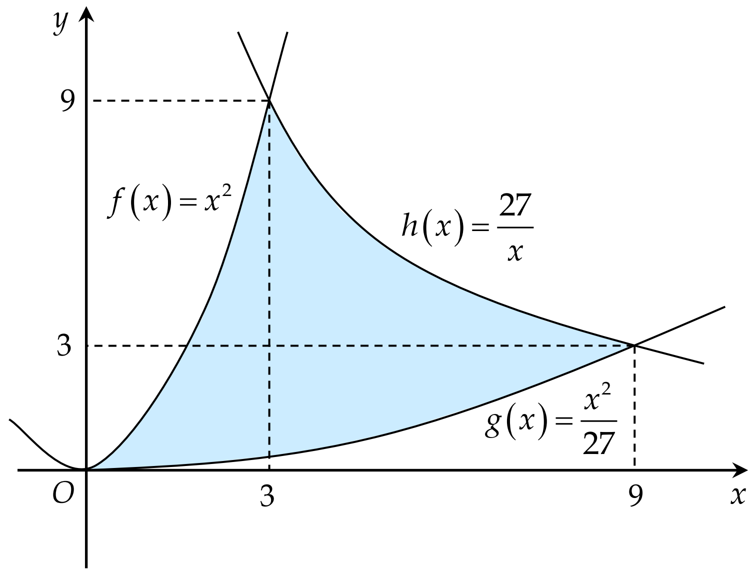
Suy ra $S=\int_0^5\left|\left|x^2-4x+3\right|-x-3\right|dx=\int_0^1\left(\left|x^2-5x\right|\right)dx+\int_1^3\left(\left|-x^2+3x-6\right|\right)dx+\int_3^5\left(\left|x^2-5x\right|\right)dx=\frac{109}{6}$.

Câu 6

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=x^2$; $y=\frac{1}{27}x^2$; $y=\frac{27}{x}$ bằng?

A. $27\ln 2$ **B.** $27\ln 3$ **C.** $28\ln 3$ **D.** $29\ln 3$

Lời giải



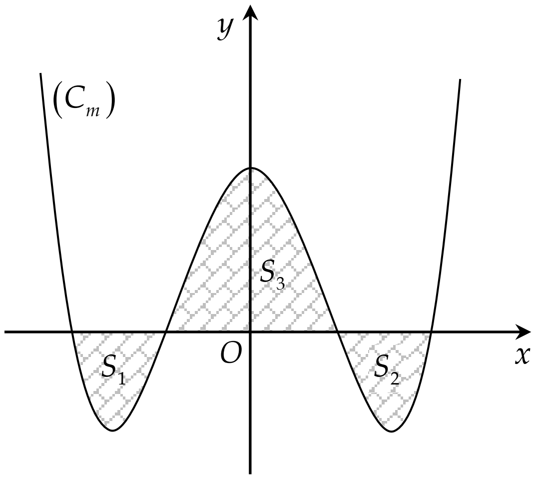
Xét các phương trình hoành độ giao điểm

$$x^2-\frac{x^2}{27}=0\Rightarrow x=0;\quad x^2-\frac{27}{x}=0\Rightarrow x=3;\quad \frac{x^2}{27}-\frac{27}{x}=0\Rightarrow x=9$$

$$\Rightarrow S=\int_0^3\left(x^2-\frac{x^2}{27}\right)dx+\int_3^9\left(\frac{27}{x}-\frac{x^2}{27}\right)dx=27\ln 3.$$

Câu 7

Cho hàm số $y=x^4-3x^2+m$ có đồ thị (C_m) với m là tham số thực. Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt như hình vẽ . Gọi S_1, S_2 và S_3 là diện tích các miền gạch chéo được cho trên hình vẽ. Tìm m để $S_1+S_2=S_3$.



A. $m=-\frac{5}{2}$. **B.** $m=-\frac{5}{4}$.

C. $m=\frac{5}{2}$. **D.** $m=\frac{5}{4}$.

Lời giải

Đặt $f(x;m)=x^4-3x^2+m$

Giả sử $a,b\ \ (a<b)$ là nghiệm dương của phương trình $x^4-3x^2+m=0$.

Khi đó ta có: $b^4-3b^2+m=0$ (1)

Vì $x^4-3x^2+m=0$ là hàm trùng phương nên có tính chất đối xứng:

$$\Rightarrow S_1=S_2 \Rightarrow S_1+S_2=S_3 \Leftrightarrow 2S_2=S_3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}S_3=S_2.$$

$$\Rightarrow \int_0^a |f(x,m)|dx=\int_a^b |f(x,m)|dx \Leftrightarrow \int_0^a f(x,m)dx=-\int_a^b f(x,m)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^a f(x,m)dx+\int_a^b f(x,m)dx=0 \Leftrightarrow \int_0^b f(x,m)dx=0$$

Ta có $\int_0^b (x^4-3x^2+m)dx=0 \Rightarrow \frac{b^5}{5}-b^3+mb=0 \Rightarrow \frac{b^4}{5}-b^2+m=0$ (2) $(\text{do } b>0)$

Từ (1) và (2), trừ vế theo vế ta được $\frac{4}{5}b^4-2b^2=0 \Rightarrow b^2=\frac{5}{2}$ (do $b>0$).

Thay trở ngược vào (1) ta được $m=\frac{5}{4}$.

Câu 8

Cho hàm số $y=\frac{x^4}{2}-2m^2x^2+2$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị của hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu, đồng thời đường thẳng cùng phương với trục hoành qua điểm cực đại tạo với đồ thị một hình phẳng có diện tích bằng $\frac{64}{15}$ là?

A. $\varnothing$ **B.** $\{\pm 1\}$ **C.** $\left\{\pm\frac{\sqrt{2}}{2};\pm 1\right\}$ **D.** $\left\{\pm\frac{1}{2};\pm 1\right\}$

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Có $y' = 2x^3 - 4m^2x = 2x(x^2 - 2m^2)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt{2}m \\ x = -\sqrt{2}m \end{array}\right.$

Đồ thị của hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow m \neq 0$.

Vì $a = \dfrac{1}{2} > 0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ suy ra điểm cực đại của đồ thị hàm số là $A(0;2)$

Đường thẳng cùng phương với trục hoành qua điểm cực đại có phương trình là $d: y = 2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và d là:

$$\frac{x^4}{2} - 2m^2x^2 + 2 = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 0 \\ x^2 = 4m^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2|m| \\ x = -2|m| \end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là: (chú ý rằng hàm số đã cho là hàm chẵn)

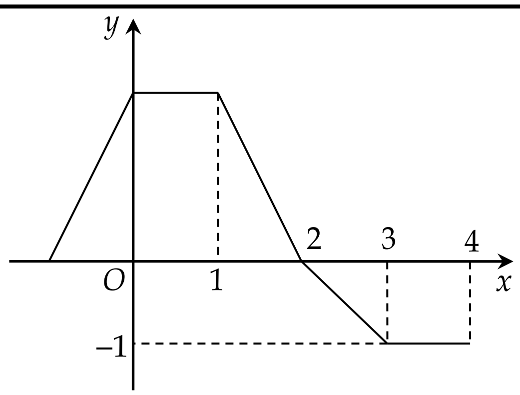
$$S = \int_{-2|m|}^{2|m|} \left| \frac{x^4}{2} - 2m^2x^2 \right| dx = 2\int_0^{2|m|} \left| \frac{x^4}{2} - 2m^2x^2 \right| dx$$

$$= 2\left| \int_0^{2|m|} \left(\frac{x^4}{2} - 2m^2x^2 \right) dx \right| = 2\left| \left(\frac{x^5}{10} - \frac{2}{3}m^2x^3 \right) \Bigg|_0^{2|m|} \right| = \frac{64}{15}|m|^5$$

Ta có $S = \dfrac{64}{15} \Leftrightarrow |m| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -1 \end{array}\right.$.

Câu 9

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-1;4]$ như hình vẽ bên. Tính tích phân $I = \int_{-1}^{4} f(x)dx$?



A. $I = \dfrac{5}{2}$. **B.** $I = \dfrac{11}{2}$.

C. $I = 5$. **D.** $I = 3$.

Lời giải

Gọi $A(-1;0), B(0;2), C(1;2), D(2;0), E(3;-1)$, $F(4;-1), H(1;0), K(3;0), L(4;0)$.

Khi đó $I = \int_{-1}^{4} f(x) = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{3} f(x)dx + \int_{3}^{4} f(x)dx$

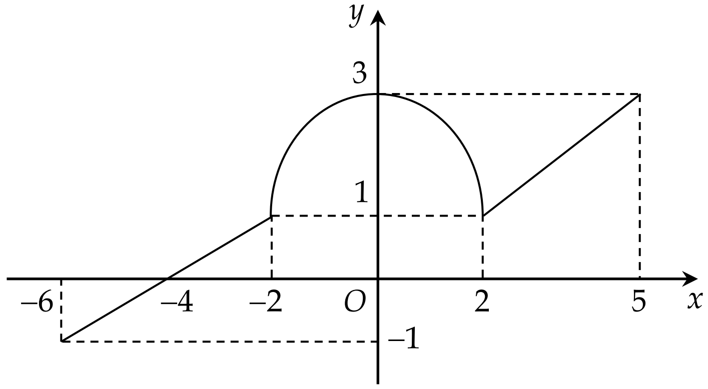
$$= \int_{-1}^{0} |f(x)|dx + \int_{0}^{1} |f(x)|dx + \int_{1}^{2} |f(x)|dx - \int_{2}^{3} |f(x)|dx - \int_{3}^{4} |f(x)|dx$$

Do $f(x) \geq 0, \forall x \in [-1;2]$ và $f(x) \leq 0, \forall x \in [2;4]$

$$= S_{ABO} + S_{OBCH} + S_{HCD} - S_{DKE} - S_{EFLK} = \frac{1}{2}2.1 + 2.1 + \frac{1}{2}.2.1 - \frac{1}{2}.1.1 - 1.1 = \frac{5}{2}.$$

Câu 10

Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[-6;5]$, có đồ thị gồm hai đoạn thẳng và nửa đường tròn như hình vẽ. Tính giá trị của tích phân $I = \int_{-6}^{5} [f(x)+2]dx$.



A. $I = 2\pi + 35$. **B.** $I = 2\pi + 34$.

C. $I = 2\pi + 33$. **D.** $I = 2\pi + 32$

Lời giải

Ta có $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 2 & \text{khi } -6 \le x \le -2 \\ 1 + \sqrt{4 - x^2} & \text{khi } -2 \le x \le 2 \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} & \text{khi } 2 \le x \le 5 \end{cases} \Rightarrow I = \int_{-6}^{5}[f(x)+2]dx = \int_{-6}^{5} f(x)dx + 2\int_{-6}^{5} dx$

$$= \int_{-6}^{-2}\left(\frac{1}{2}x + 2\right)dx + \int_{-2}^{2}\left(1 + \sqrt{4-x^2}\right)dx + \int_{2}^{5}\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\right)dx + 22$$

$$= \left(\frac{1}{4}x^2 + 2x\right)\Big|_{-6}^{-2} + J + \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{x}{3}\right)\Big|_{2}^{5} + 22 = J + 28.$$

Tính $J = \int_{-2}^{2}\left(1 + \sqrt{4-x^2}\right)dx$

Đặt $x = 2\sin t \Rightarrow dx = 2\cos tdt$.

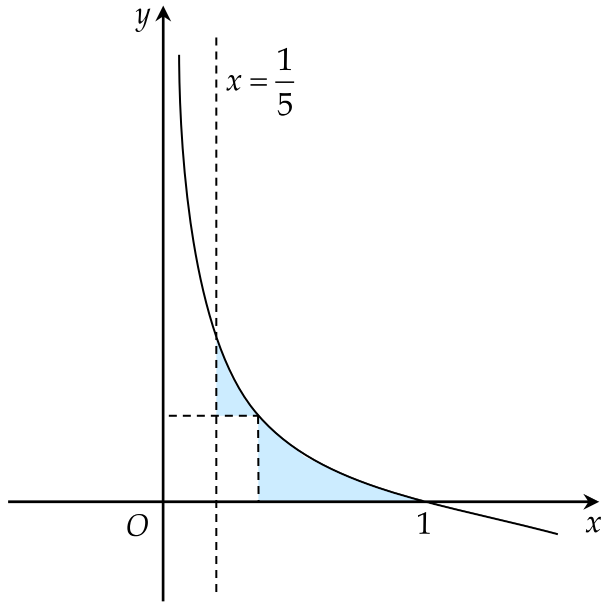
Đổi cận Khi $x = 2$ thì $t = -\frac{\pi}{2}$; khi $x = 2$ thì $t = \frac{\pi}{2}$.

$$\Rightarrow J = \int_{-2}^{2}\left(1 + \sqrt{4-x^2}\right)dx = 4 + 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 tdt = 4 + 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)dt = 4 + 2\pi.$$

Vậy $I = 32 + 2\pi$.

Câu 11

Cho đồ thị hàm số $f(x) = -\ln x$ như hình vẽ. Hình chữ nhật nội tiếp dưới hình cong. để diện tích hình chữ nhật lớn nhất thì diện tích phần gạch xấp xỉ là?



A. 1,43. **B.** 0,31 C. 2,8. **D.** 0,39.

Lời giải

Phân tích. *Đây là một bài toán khá là khó cần phải sử dụng đến một số tính chất của bất đẳng thức cơ bản. Trước tiên theo hướng tư duy bình thường ta sẽ gọi điểm M theo 3 ẩn*

Diện tích hình chữ nhật là $S = -x.\ln(x)$

Ta có $S' = -\ln(x) - 1; S' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e} \Rightarrow S\max = \frac{1}{e}$

Diện tích hình chữ nhật nằm phía bên phải đường thẳng $y = \frac{1}{5}$ là $\frac{1}{e} - \frac{1}{5}$

Diện tích hình tạo bởi $f(x), y = \frac{1}{5}$ và Ox là $\int_{\frac{1}{5}}^{1} |-\ln(x)| dx = 0,48$

Diện tích phần gạch xấp xỉ 0,31.

Chọn ý **B.**

Câu 12

Cho m là tham số thực, $m \in [1;3]$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - 3mx^2 - 2m^3$ và $y = -\frac{1}{3}x^3 + mx^2 - 5m^2x$. Gọi a,b lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của S. Tính tổng $a + b$??

A. $\frac{41}{6}$. **B.** 1. C. $\frac{21}{4}$. **D.** 2.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $y = \frac{2}{3}x^3 - 3mx^2 - 2m^3 = -\frac{1}{3}x^3 + mx^2 - 5m^2x$

CHINH PHỤC OLYMPIC TOÁN

$$\Leftrightarrow x^3-4mx^2+5m^2x-2m^3=0 \Leftrightarrow (x-m)^2(x-2m) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x=2m \end{array}\right.$$

Ta có $\int_m^{2m}\left|(x-m)^2(x-2m)\right|dx=-\int_m^{2m}(x-m)^2(x-2m)dx$

$$=-\int_m^{2m}(x-m)^3dx+\int_m^{2m}(x-m)^2dx=\left(-\frac{1}{4}(x-m)^4+\frac{m}{3}(x-m)^3\right)\Bigg|_m^{2m}=\frac{1}{12}m^4\in\left[\frac{1}{12};\frac{81}{12}\right]$$

$$\Rightarrow a+b=\frac{1}{12}+\frac{81}{12}$$

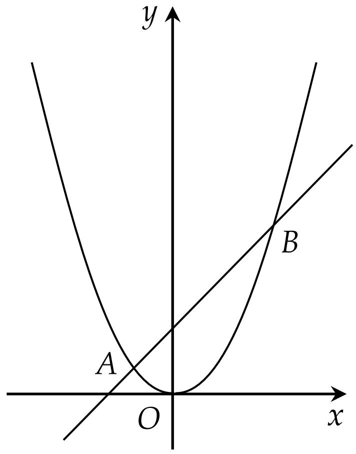
Chọn ý **A.**

Câu 13

Cho Parabol $(P): y=x^2$ và hai điểm A, B thuộc (P) sao cho $AB=2$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{4}$.

C. $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{3}{2}$.



Lời giải

Cách 1. Gọi $A(a;a^2)$, $B(b;b^2)$ với $a<b$.

Ta có $AB=2\Leftrightarrow (b-a)^2+(b^2-a^2)^2=4$

Phương trình đường thẳng $AB: \frac{x-a}{b-a}=\frac{y-a^2}{b^2-a^2}\Leftrightarrow\frac{x-a}{1}=\frac{y-a^2}{b+a}$

$$\Leftrightarrow y=(a+b)(x-a)+a^2\Leftrightarrow y=(a+b)x-ab$$

$$\Rightarrow S=\int_a^b\left((a+b)x-ab-x^2\right)dx=\int_a^b(x-a)(b-x)dx$$

Đặt $t=x-a\Rightarrow S=\int_0^{b-a}t(b-a-t)dt=\int_0^{b-a}\left((b-a)t-t^2\right)dt=\frac{(b-a)t^2}{2}\Bigg|_0^{b-a}-\frac{t^3}{3}\Bigg|_0^{b-a}=\frac{(b-a)^3}{6}$

Ta có $(b-a)^2+(b^2-a^2)^2=4\Leftrightarrow(b-a)^2\left(1+(b+a)^2\right)=4\Leftrightarrow(b-a)^2=\frac{4}{1+(a+b)^2}\le 4$

$$\Rightarrow b-a\le 2\Rightarrow S=\frac{(b-a)^3}{6}\le\frac{2^3}{6}=\frac{4}{3}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chi khi $\begin{cases}a+b=0\\ b-a=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=1\\ a=-1\end{cases}\Leftrightarrow A(-1;1);\ B(1;1)$.

Vậy giá trị lớn nhất của AB bằng $\frac{4}{3}$.

Cách 2. Sử dụng công thức diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P): y = ax^2 + bx + c$ và $(d): y = mx + n$. Đầu tiên ta lập phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d)

$$ax^2 + bx + c = mx + n \Leftrightarrow ax^2 + (b-m)x + c - n = 0.$$

Khi đó diện tích hình phẳng là: $S^2 = \dfrac{\Delta^3}{36a^4}$, với $\Delta = (b-m)^2 - 4a(c-n)$.

Áp dụng

Tương tự, ta có $(AB): y = (a+b)x - ab$, $a < b$.

Phương trình hoành độ giao điểm

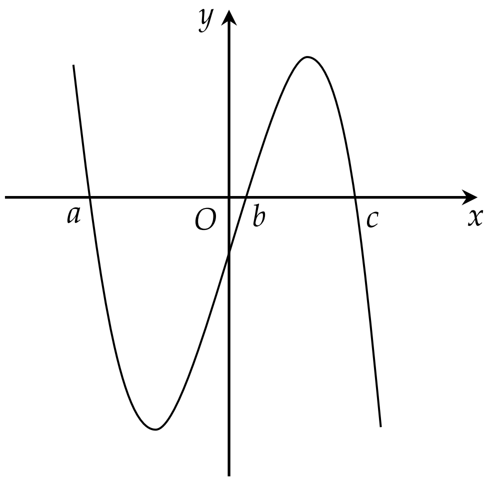
$$x^2 = (a+b)x - ab \Leftrightarrow x^2 - (a+b)x + ab = 0, \text{ có } \Delta = (b-a)^2.$$

$$\Rightarrow S^2 = \frac{\Delta^3}{36} = \frac{(b-a)^6}{36} \Rightarrow S = \frac{(b-a)^3}{6}$$

Và đến đây đánh giá như cách 1.

Câu 14

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên R, đồ thị của $f'(x)$ như hình vẽ bên và hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số , trục hoành có diện tích bằng 1. Mệnh đề nào sau đây là đúng ?



A. $f(c) - f(b) > \dfrac{1}{2} > f(a) - f(b)$. **B.** $f(c) - f(b) > f(a) - f(b) > \dfrac{1}{2}$.

C. $f(c) - f(b) < \dfrac{1}{2} < f(a) - f(b)$. **D.** $\dfrac{1}{2} < f(c) - f(b) < f(a) - f(b)$.

Lời giải

Ta có $S_1 = \int_a^b |f'(x)| dx = -\int_a^b f'(x) dx = -f(x)\Big|_a^b = f(a) - f(b)$

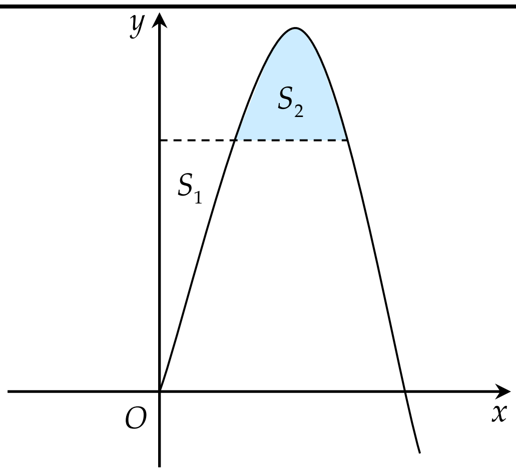
$$S_2 = \int_b^c |f'(x)| dx = -\int_b^c f'(x) dx = f(x)\Big|_b^c = f(c) - f(b)$$

Mà $\begin{cases} S_1 + S_2 = 1 \\ S_1 > S_2 \end{cases} \Rightarrow S_1 > \dfrac{1}{2} > S_2 \Rightarrow f(a) - f(b) > \dfrac{1}{2} > f(c) - f(b)$

Chọn ý **C.**

Câu 15

Cho đường cong $(C): y = 8x - 27x^3$ và đường thẳng $y = m$ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt nằm trong góc phần tư thứ nhất của hệ trục tọa độ Oxy và chia thành 2 miền phẳng có diện tích $S_1 = S_2$ như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng ?



A. $0 < m < \frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{2} < m < 1$.

C. $1 < m < \frac{3}{2}$. **D.** $\frac{3}{2} < m < 2$.

Lời giải

Giả sử (C) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $0 < a < b$

Ta có $\begin{cases} 8a - 27a^3 = m \\ 8b - 27b^3 = m \end{cases}$. Nguyên hàm của $f(x)$ là $F(x) = 4x^2 + \frac{27x^4}{4} - mx + C$

Lại có $\begin{cases} S_1 = \int_0^a |f(x)| dx = -\int_0^a f(x) dx = F(0) - F(a) \\ S_2 = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \end{cases}$

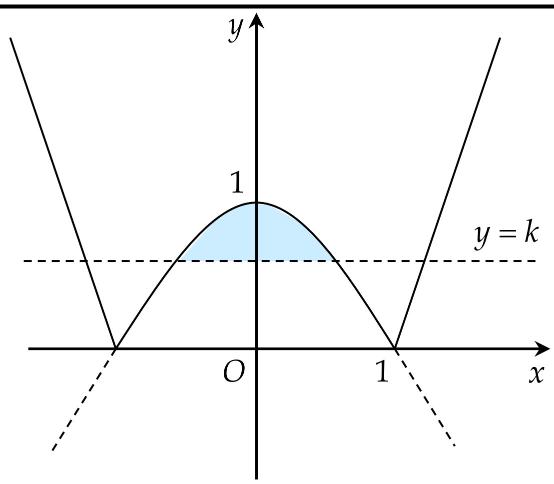
Ta có $S_1 = S_2 \Rightarrow F(0) - F(a) = F(b) - F(a) \Leftrightarrow F(b) = F(0)$

Vì vậy $F(x) = 4b^2 + \frac{27b^4}{4} - mb = 0$. Do đó $\begin{cases} 4b^2 + \frac{27b^4}{4} - mb = 0 \\ 0,8b - 27b^3 = m \end{cases} \Rightarrow b = \frac{4}{9} \Rightarrow m = \frac{32}{27}$

Chọn ý **C.**

Câu 16

Cho hình phẳng H được giưới hạn bởi các đường $y = |x^2 - 1|, y = k (0 < k < 1)$. Tìm k để diện tích của hình phẳng H gấp đôi diện tích của miền phẳng gạch sọc trong hình vẽ bên ?



A. $\sqrt[3]{4}$. **B.** $\sqrt[3]{2} - 1$.

C. $\frac{1}{2}$. **D.** $\sqrt[3]{4} - 1$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm là $\left|x^2-1\right|=k \Leftrightarrow x^2-1=\pm k \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{1\pm k}$

Ta có S_1 là diện tích phần chấm đen, ta có

$$S_1=2\int_0^{\sqrt{1-k}}\left|\left|x^2-1\right|-k\right|dx=2\int_0^{\sqrt{1-k}}\left(\left(1-x^2\right)-k\right)dx=\frac{4}{3}\sqrt{(1-k)^3}$$

S_2 là diện tích phần trắng, ta có $S_2=2\int_{\sqrt{1-k}}^{\sqrt{1+k}}\left|\left|x^2-1\right|-k\right|dx=2\int_{\sqrt{1-k}}^{\sqrt{1+k}}\left(k-\left|x^2-1\right|\right)dx$

$$=2\int_{\sqrt{1-k}}^{1}\left(k-\left(1-x^2\right)\right)dx+2\int_1^{\sqrt{1+k}}\left(k-\left(x^2-1\right)\right)dx$$

$$=\frac{2}{3}\left(2\sqrt{(1-k)^3}+3k-2\right)+\frac{2}{3}\left(2\sqrt{(1+k)^3}-3k-2\right)$$

Theo giả thiết $S_2+S_1=2S_1 \Leftrightarrow S_2=S_1$ nên

$$\frac{4}{3}\sqrt{(1-k)^3}=\frac{2}{3}\left(2\sqrt{(1-k)^3}+3k-2\right)+\frac{2}{3}\left(2\sqrt{(1+k)^3}-3k-2\right)$$

Phân tích ta được $k=\sqrt[3]{4}-1$

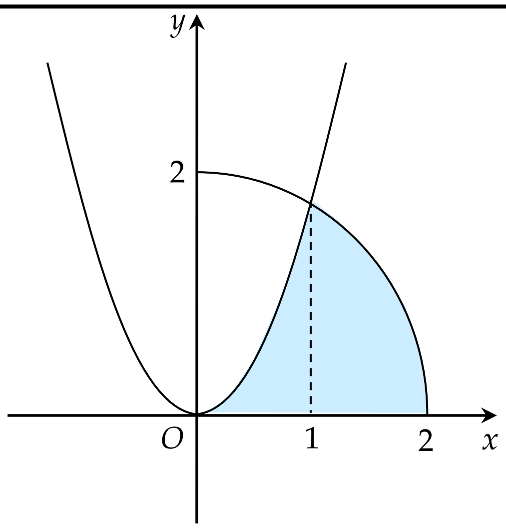
Chọn ý **D.**

Lưu ý. *Ta có thể dùng casio để giải nhanh bài toán này*

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\int_0^{\sqrt{1-k}}\left|\left|x-1^2\right|-k\right|dx}{\int_{\sqrt{1-k}}^{\sqrt{1+k}}\left|\left|x^2-1\right|-k\right|dx}\text{ CALC với từng đáp án ra ý D.}$$

Câu 17

Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=\sqrt{3}x^2$, cung tròn có phương trình $y=\sqrt{4-x^2}$ (với $0\le x\le 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng?



A. $\dfrac{4\pi+\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\dfrac{4\pi-\sqrt{3}}{6}$.

C. $\dfrac{4\pi+2\sqrt{3}-3}{6}$. **D.** $\dfrac{5\sqrt{3}-2\pi}{3}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $y=\sqrt{3}x^2$ và cung tròn $y=\sqrt{4-x^2}$ (với $0\le x\le 2$) là $\sqrt{4-x^2}=\sqrt{3}x^2 \Leftrightarrow 4-x^2=3x^4 \Leftrightarrow x=1$ (vì $0\le x\le 2$).

Cách 1. Diện tích của (H) là

$$S=\int_0^1\sqrt{3}x^2dx+\int_1^2\sqrt{4-x^2}dx=\frac{\sqrt{3}}{3}x^3\Big|_0^1+I=\frac{\sqrt{3}}{3}+I\text{ với }I=\int_1^2\sqrt{4-x^2}dx.$$

Đặt $x = 2\sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = 2\cos t.dt$.

Đổi cận $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$, $x = 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.

$$\Rightarrow I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t}.2\cos t.dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2 t.dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2\left(1+\cos 2t\right).dt = \left(2x+\sin 2t\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

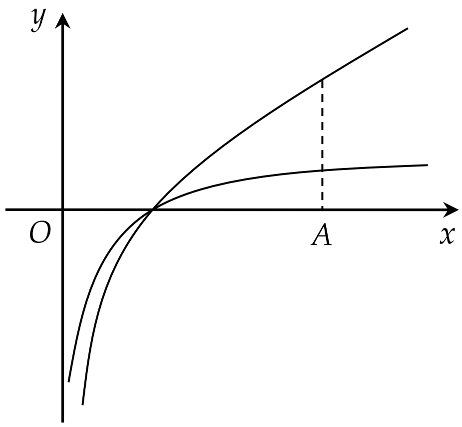
Vậy $S = \frac{\sqrt{3}}{3} + I = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\pi - \sqrt{3}}{6}$.

Cách 2. Diện tích của (H) bằng diện tích một phần tư hình tròn bán kính 2 trừ diện tích hình phẳng giới hạn bởi cung tròn, parabol và trục Oy.

Tức là $S = \pi - \int_0^1 \left(\sqrt{4-x^2} - \sqrt{3}x^2\right)dx$.

Câu 18

Cho 2 số thực dương a, b khác 1 và đồ thị của các hàm số $y = \log_a x, y = \log_b x$ như hình vẽ bên. Gọi d là đường thẳng song song vưới trục Oy và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x = k\left(k > 1\right)$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = \log_a x$, d và trục hoành; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = \log_b x$, d và trục hoành. Biết $S_1 = 4S_2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $b = a^4$. **B.** $a = b^4$. **C.** $b = a^4 \ln 2$. **D.** $a = b^4 \ln 2$.

Lời giải

Ta có

$$S_1 = \int_1^k \log_a x dx = \int_1^k \frac{\ln x}{\ln a} dx = \frac{1}{\ln a}\left(x\ln x\Big|_1^k - \int_1^k x\frac{1}{x}dx\right) = \frac{\ln k - (k-1)}{\ln a}$$

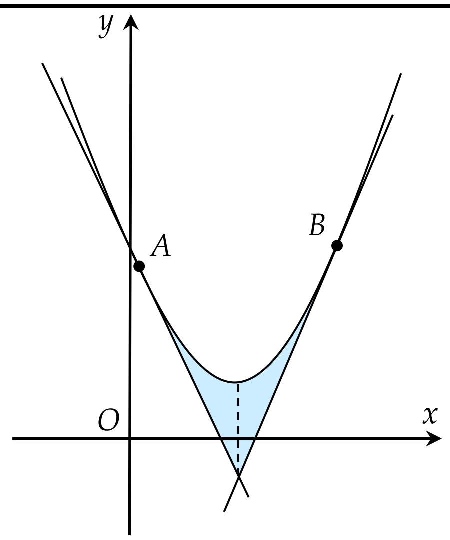
$$S_2 = \int_1^k \log_b x dx = \frac{\ln k - (k-1)}{\ln b}$$

Từ giả thiết suy ra $S_1 = 4S_2 \Leftrightarrow \frac{1}{\ln a} = \frac{4}{\ln b} \Leftrightarrow \ln b = \ln a^4 \Leftrightarrow b = a^4$

Chọn ý **A.**

Câu 19

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2 - 4x + 5$ và các tiếp tuyến của (P) tại các điểm $A(1;2), B(4;5)$?



A. $\frac{9}{4}$.

B. $\frac{9}{8}$.

C. $\frac{5}{2}$.

D. $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Ta có phương trình tiếp tuyến tại A là $y = -2x + 4$

Ta có phương trình tiếp tuyến tại là $y = 4x - 11$

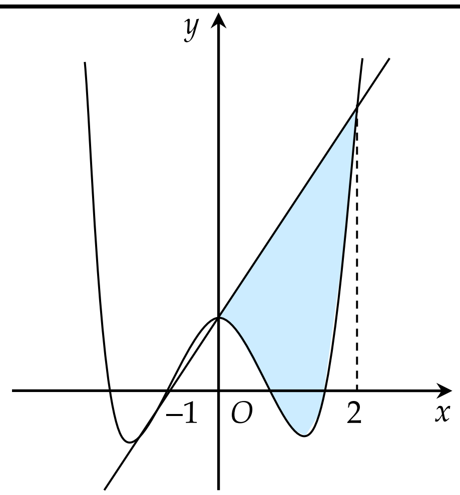
Phương trình hoành độ giao điểmcủa 2 tiếp tuyến là $y = -2x + 4 = 4x - 11 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$.

Trong đó $S = S_1 + S_2; S_1: \begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ y = -2x + 4 \\ x = 1, x = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \int_1^{\frac{5}{2}} \left| x - 4x^2 + 5 - (-2x + 4) \right| dx = \frac{9}{8}$.

Chọn ý **A.**

Câu 20

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị (C). Biết rằng (C) đi qua điểm $A(-1;0)$, tiếp tuyến d tại A của (C) cắt (C) tại hai điểm khác có hoành độ tương ứng là $x = 0, x = 2$ bằng $\frac{28}{5}$



A. $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{1}{4}$.

C. $\frac{2}{9}$. **D.** $\frac{1}{5}$.

Lời giải

Ta có $a > 0$ và do $A \in (C) \Rightarrow y(-1) = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 0 \Leftrightarrow c = -a - b$

Khi đó $y = ax^4 + bx^2 - a - b$ và $y' = 4ax^3 + 2bx$ và tiếp tuyến tại $A(-1;0)$ là đường thẳng có phương trình $y = -(4a+2b)(x+1)$

Phương trình hoành độ giao điểm $ax^4 + bx^2 - a - b = -(4a+2b)(x+1)$.

Theo giả thiết phương trình này có 3 nghiệm $x=-1; x=0; x=2$ nên

$$\begin{cases} -a-b=-(4a+2b) \\ 16a+4b-a-b=-3(4a+2b) \end{cases} \Leftrightarrow b=-3a$$

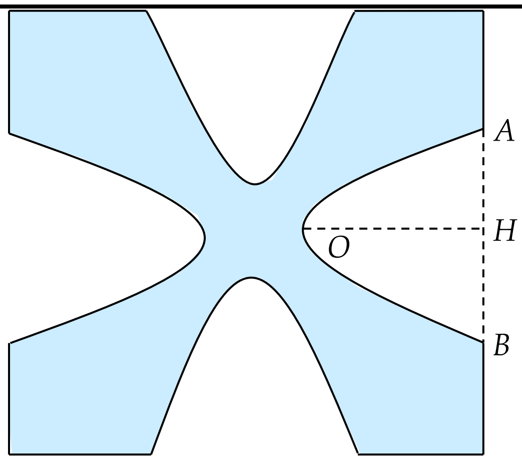
Ta có $S = \int_0^2 \left|2a(x+1) - ax^4 + 3ax^2 - 2a\right| dx = \int_0^2 \left(2a(x+1) - ax^4 + 3ax^2 - 2a\right) dx = \frac{28}{5}$

$$\Leftrightarrow \left(a(x+1)^2 - \frac{ax^5}{5} + ax^3 - 2ax \right)\Bigg|_0^2 = \frac{28}{5} \Leftrightarrow 9a - \frac{32a}{5} + 8a - 4a - a = \frac{28}{5} \Leftrightarrow a=1 \Rightarrow b=-3; c=2.$$

Vậy diện tích hình phẳng cần tính là $\int_{-1}^0 \left|2(x+1) - x^4 + 3x^2 - 2\right| dx = \frac{1}{5}$

Câu 21

Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh 10cm bằng cách khoét bỏ đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình vẽ bên. Biết $AB = 5cm, OH = 4cm$. Tính diện tích bề mặt hoa văn đó?



A. $\frac{140}{3}cm^2$. **B.** $\frac{40}{3}cm^2$.

C. $\frac{160}{3}cm^2$. **C.** $\frac{160}{3}cm^2$.

Lời giải

Hình vuông có diện tích $S = 100cm^2$.

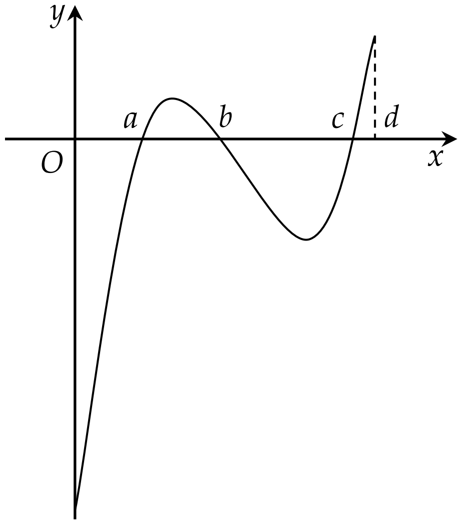
Diện tích của 4 hình parapol $S_1 = 4\left(\frac{2}{3}bh\right) = 4\left(\frac{2}{3}.5.4\right) = \frac{160}{3}cm^2$.

Diện tích hoa văn trang trí là $S_2 = S - S_1 = 100 - \frac{160}{3} = \frac{140}{3}cm^2$.

Chọn ý **A.**

Câu 22

Cho các số thực a,b,c,d thỏa mãn $0 < a < b < c < d$ và hàm số. Đồ thị của hàm số như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên đoạn . Mệnh đề nào dưới đây đúng ?



A. $M+m=f(0)+f(c)$.

B. $M+m=f(d)+f(c)$.

C. $M+m=f(b)+f(a)$.

D. $M+m=f(0)+f(a)$.

Lời giải

Lập bảng biến thiên của hàm số trên ta chỉ ra được rằng

$$M=\max\{f(0),f(b),f(d)\};m=\min\{f(a),f(c)\}.$$

Ta có

- $S_1=\int_0^a |f'(x)|dx=-\int_0^a f'(x)dx=f(0)-f(a)$.
- $S_2=\int_a^b |f'(x)|dx=-\int_a^b f'(x)dx=f(b)-f(a)$.
- $S_3=\int_b^c |f'(x)|dx=-\int_b^c f'(x)dx=f(b)-f(c)$.
- $S_4=\int_c^d |f'(x)|dx=\int_c^d f'(x)dx=f(d)-f(c)$.

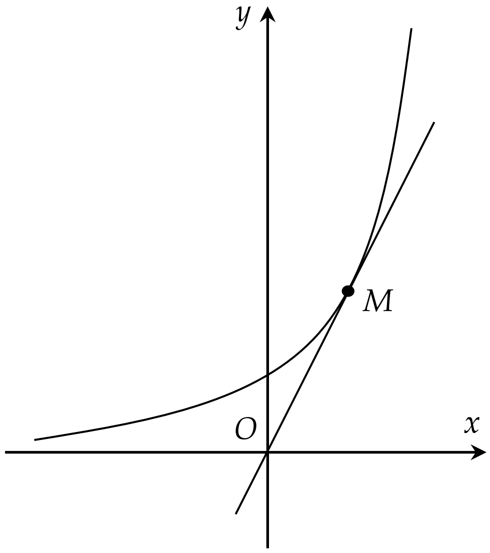
Ta thấy $\begin{cases} S_1>S_2>0 \\ S_3>S_4>0 \\ S_3>S_2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(0)-f(a)>f(b)-f(a)>0 \\ f(b)-f(c)>f(d)-f(c)>0 \\ f(b)-f(c)>f(b)-f(a)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(0)>f(b)>f(a)>f(c) \\ f(b)>f(d) \end{cases}$

Vậy $m=f(c);M=f(0)$

Chọn ý **A.**

Câu 23

Diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi đường cong $(C): y = e^x$, tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(1;e)$ và trục Oy. Diện tích của (H) là ?



A. $\frac{e+2}{2}$.

B. $\frac{e-1}{2}$.

C. $\frac{e+1}{2}$.

D. $\frac{e-2}{2}$.

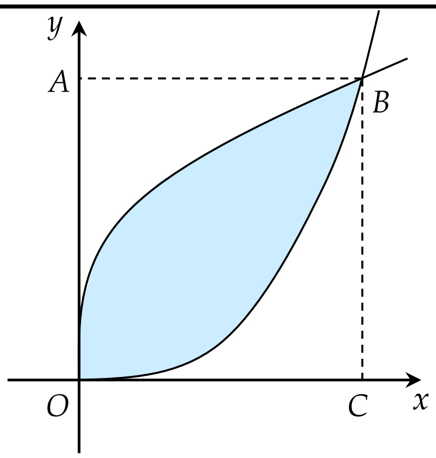
Lời giải

Tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(1;e)$ là $y = e(x-1) + e = ex \Rightarrow S = \int_0^1 \left|e^x - ex\right| dx = \frac{e-2}{2}$

Chọn ý **D.**

Câu 24

Cho một viên gạch men có dạng hình vuông OABC như hình vẽ. Sau khi tọa độ hóa, ta có $O(0;0)$, $A(0;1)$, $B(1;1)$, $C(1;0)$ và hai đường cong trong hình lần lượt là đồ thị hàm số $y = x^3$ và $y = \sqrt[3]{x}$. Tính tỷ số diện tích của phần tô đậm so với diện tích phần còn lại của hình vuông.



A. $b = -2$. **B.** $b = -\frac{1}{2}$

C. $b = -1$ **D.** $\frac{-3}{2}$.

Lời giải

Diện tích hình vuông có cạnh bằng 1 là $S_1 = 1^2 = 1\ m^2$.

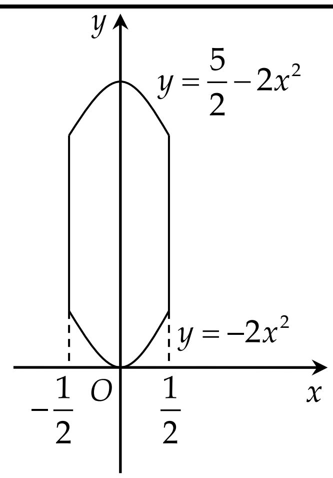
Diện tích phần tô đậm : $S_2 = \int_0^1 \left|\sqrt[3]{x} - x^3\right| dx = \frac{1}{2} m^2$.

Do đó diện tích phần còn lại : $\Delta S = S_1 - S_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} m^2 \Rightarrow \frac{S_2}{\Delta S} = 1$.

TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC

Câu 25

Sơ đồ ở bên phải phác thảo của một khung cửa sổ. Diện tích S của cửa sổ được tính bởi công thức nào sau đây?



A. $S=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{5}{2}-4x^2\right)dx$. **B.** $S=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left|\frac{5}{2}-2x^2\right|dx$.

C. $S=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}2x^2\,dx$. **D.** $S=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(1-4x^2\right)dx$

Lời giải

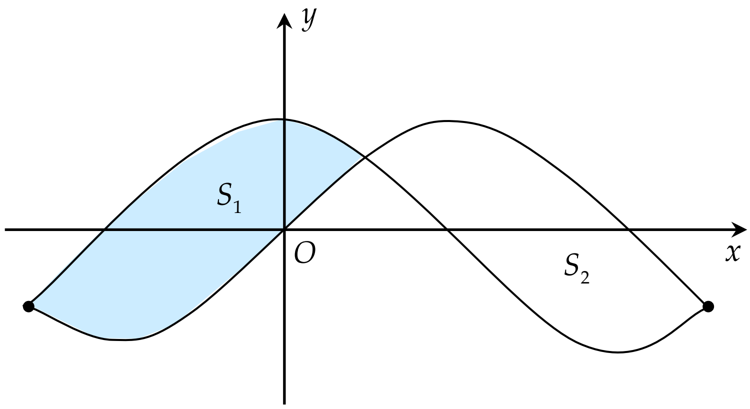
Dựa vào đồ thị ta thấy trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ thì đồ thị hàm số $y_1=\frac{5}{2}-2x^2$ nằm phía trên đồ thị hàm số $y_2=2x^2$.

Do đó $S=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(y_1-y_2)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{5}{2}-2x^2-2x^2\right)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{5}{2}-4x^2\right)dx.$

Chọn ý **A.**

Câu 26

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=\sin x, y=\cos x$ như hình vẽ dưới và S_1,S_2 là diện tích của các phần bên trái và bên phải. Tính ${S^2}_1+{S^2}_2$?



A. $10+2\sqrt{2}$. **B.** 8. C. $11+2\sqrt{2}$. **D.** 16.

Lời giải

Ta có $\sin x=\cos x\Leftrightarrow \tan x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ nên các giao điểm trên hình vẽ đã cho có hoành độ lần lượt là $x=-\frac{3\pi}{4};x=\frac{\pi}{4};x=\frac{5\pi}{4}$

Vậy $S_1 = \int\limits_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left|\sin x - \cos x\right| dx = 2\sqrt{2}, S_2 = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left|\sin x - \cos x\right| dx = 2\sqrt{2}$. Do đó ${S^2}_1 + {S^2}_2 = 16$

Chọn ý **D.**

Câu 27

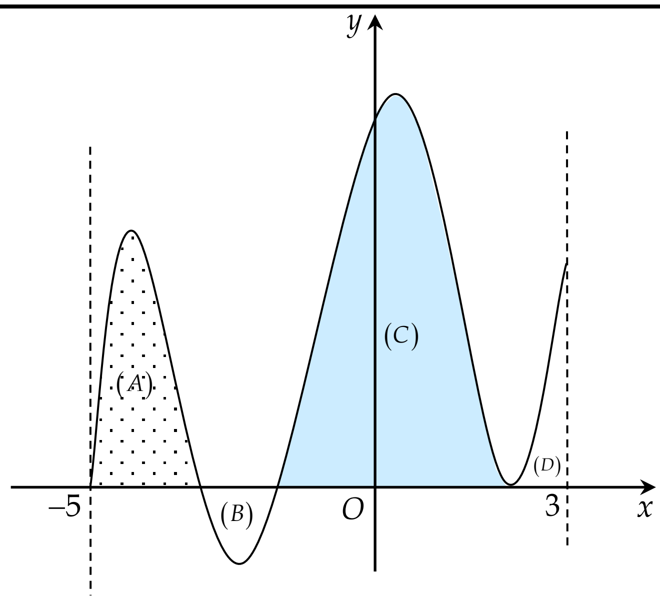
Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-5;3]$ và có đồ thị như hình vẽ dưới. Biết diện tích các hình phẳng $(A),(B),(C),(D)$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và trục hoành lần lượt bằng 6;3;12;2. Tính giá trị của biểu thức tích phân $\int_{-3}^{1}\left(2f(2x+1)+1\right)dx$?

A. 27.

B. 25 .

C. 17 .

D. 21 .



Lời giải

Đặt $t = 2x+1 \Rightarrow dt = 2dx$ nên $x = -3 \Rightarrow t = -5; x = 1 \Rightarrow t = 3$

$$\Rightarrow I = \int\limits_{-3}^{1}\left(2f(2x+1)+1\right)dx = \int\limits_{-5}^{3}\left(2f(t)+1\right)\frac{dt}{2} = \int\limits_{-5}^{3} f(t)dt + \int\limits_{-5}^{3}\frac{1}{2}dt = \int\limits_{-5}^{3} f(t)dt + 4$$

Ta cần tính $\int\limits_{-5}^{3} f(t)dt$. Mà trên đoạn $[-5;3]$ thì đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành lần lượt tại các điểm có hoành độ $x=-5; x=a; x=b; x=c$

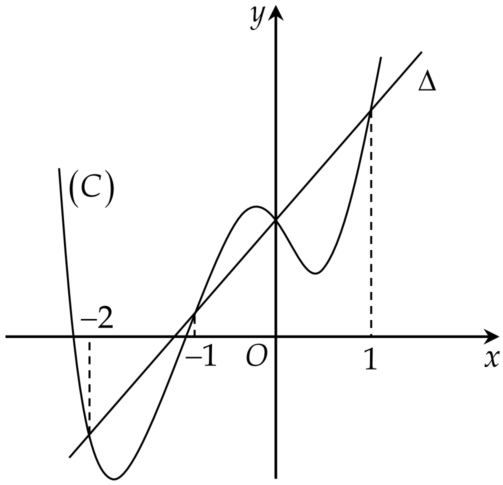
Ta có $\int\limits_{-5}^{3} f(t)dt = \int\limits_{-5}^{a} f(t)dt + \int\limits_{a}^{b} f(t)dt + \int\limits_{b}^{c} f(t)dt + \int\limits_{c}^{3} f(t)dt = S_A - S_B + S_C + S_D = 6 - 3 + 12 + 2 = 17$

Vậy $I = 21$.

Chọn ý **D.**

Câu 28

Cho đường cong bậc 4 có dạng $(C): y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ và đường thẳng $\Delta: y = mx + n$ có đồ thị như hình vẽ. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và Δ ?



A. $\frac{289}{30}$. **B.** $\frac{69}{10}$.

C. $\frac{281}{30}$. **D.** $\frac{49}{30}$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = mx + n \Leftrightarrow g(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + (c-m)x + d - n = 0$$

Vì phương trình có 4 nghiệm $x = -2; x = -1; x = 0; x = 1$ nên $g(x) = 1(x+2)(x+1)(x-1)$

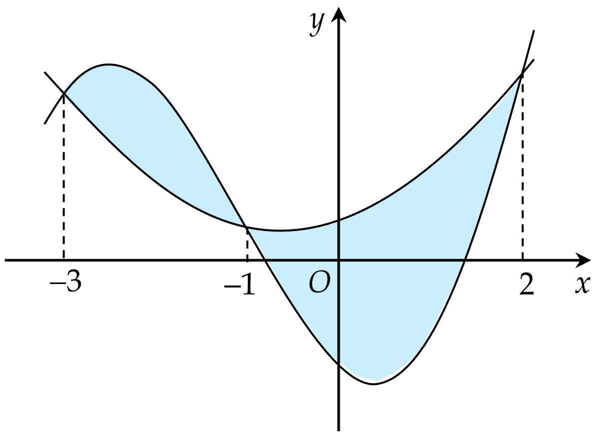
$$S = \int_{-2}^{1} |g(x)| dx = \int^{1} -2|(x+2)(x+1)x(x-1)| dx = \frac{49}{30}$$

Chọn ý **D.**

Nhận xét. *Đây là một bài tương tự với một câu trong đề thi THPT Quốc Gia 2018, và nó đã làm rất nhiều bạn điêu đứng ☺. Sau đây chúng ta sẽ một lần nữa làm lại nó!*

Câu 29

Cho đồ thị 2 hàm số như hình vẽ $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 1$ và $g(x) = dx^2 + ex = \frac{1}{2}$ $(a, b, c, d, e \in \mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -3; -1; 2 (tham khảo hình vẽ).



A. $\frac{125}{12}$ **B.** $\frac{253}{12}$

C. $\frac{253}{48}$ **D.** $\frac{125}{48}$

Lời giải

Cách 1. Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là

$$ax^3 + bx^2 + cx - 1 = dx^2 + ex + \frac{1}{2} \Leftrightarrow ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - \frac{3}{2} = 0 \ (1).$$

Đặt $m = b - d$, $n = c - e$, phương trình (1) có dạng $\Leftrightarrow ax^3 + mx^2 + nx - \frac{3}{2} = 0 \ (2)$.

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -3; -1; 2 nên phương trình (2) có ba nghiệm $x=-3$; $x=-1$; $x=2$. Do đó, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -27a+9m-3n=\dfrac{3}{2} \\ -a+m-n=\dfrac{3}{2} \\ 8a+4m+2n=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{4} \\ m=\dfrac{1}{2} \\ n=-\dfrac{5}{4} \end{cases}.$$

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là

$$S=\int_{-3}^{-2}\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{4}x-\frac{3}{2}\right)dx-\int_{-2}^{1}\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{4}x-\frac{3}{2}\right)dx=\frac{253}{48}.$$

Cách 2: Từ giả thiết ta có:

$f(x)-g(x)=k(x+3)(x+1)(x-2)\Rightarrow f(0)-g(0)=k(0+3)(0+1)(0-2)\Rightarrow k=\dfrac{1}{4}$.

Vậy $f(x)-g(x)=\dfrac{1}{4}(x+3)(x+1)(x-2)$.

Khi đó: $S=\displaystyle\int_{-3}^{-2}\left|\frac{1}{4}(x+3)(x+1)(x-2)\right|dx+\int_{-2}^{1}\left|\frac{1}{4}(x+3)(x+1)(x-2)\right|dx$. Bấm máy ra đáp án **C.**

Câu 30

Cho parabol $(P):g(x)=-\dfrac{1}{2}ax^2+(2a^2+b)x$ và hàm số $f(x)=cx^3-2bx^2-\dfrac{1}{2}x+d$ có đồ thị (C). Biết rằng (P) cắt (C) tại 3 điểm có hoành độ $x_1=-1;x_2=0;x_3=2$. Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và (C) đạt giá trị nhỏ nhất bằng?

A. $\dfrac{259}{256}$ **B.** $\dfrac{257}{256}$ **C.** $\dfrac{255}{256}$ **D.** $\dfrac{261}{256}$

Lời giải

Ta có $f(x)-g(x)=cx^3+\left(-2b+\dfrac{1}{2}a\right)x^2-\left(\dfrac{1}{2}+2a^2+b\right)x+d$

Dựa vào 3 hoành độ giao điểm ta suy ra $f(x)-g(x)=kx(x+1)(x-2)=kx^3-kx^2-2kx$

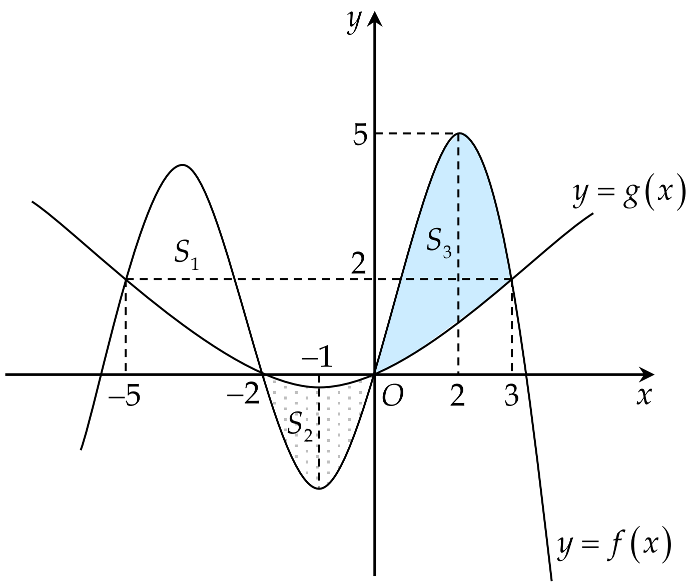
So sánh với biểu thức trên ta có

$$\begin{cases} -2b+\dfrac{1}{2}a=-k \\ \dfrac{1}{2}+2a^2+b=2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{1}{4}a+\dfrac{k}{2} \\ \dfrac{1}{2}+2a^2+\dfrac{1}{4}a+\dfrac{k}{2}=2k \end{cases} \Rightarrow k=\frac{4}{3}a^2+\frac{1}{6}a+\frac{1}{3}\ge\frac{21}{64}$$

Khi đó diện tích $S=\int_{-1}^{2}|f(x)-g(x)|dx=|k|\int_{-1}^{2}|x(x+1)(x-2)|dx=\dfrac{37}{12}|k|\ge\dfrac{259}{256}$

Câu 31

Cho hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[-5;3]$. Biết rằng diện tích hình phẳng S_1, S_2, S_3 giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường cong $g(x)=ax^2+bx+c$ lần lượt là m,n,p. Tính $\int_{-5}^{3} f(x)dx$?



A. $-m+n-p-\dfrac{208}{45}$.

B. $m-n+p+\dfrac{208}{45}$.

C. $m-n+p-\dfrac{208}{45}$.

D. $-m+n-p+\dfrac{208}{45}$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} g(-2)=g(0)=0 \\ g(-5)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a-2b+c=0 \\ c=0 \\ 25a-5b+c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{2}{15} \\ b=\dfrac{4}{15} \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow g(x)=\dfrac{2}{15}x^2+\dfrac{4}{15}x$

Theo giả thiết có

- $m=\int\limits_{-5}^{-2}\left(f(x)-g(x)\right)dx \Rightarrow \int\limits_{-5}^{-2} f(x)dx = m+\int\limits_{-5}^{-2} g(x)dx$
- $n=\int\limits_{-2}^{0}\left(g(x)-f(x)\right)dx \Rightarrow \int\limits_{-2}^{0} f(x)dx = \int\limits_{-2}^{0} g(x)dx-n$
- $p=\int\limits_{0}^{3}\left(f(x)-g(x)\right)dx \Rightarrow \int\limits_{0}^{3} f(x)dx = \int\limits_{0}^{3} g(x)dx+n$

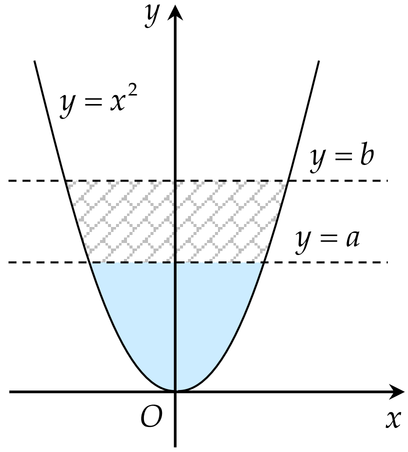
$$\Rightarrow \int\limits_{-5}^{3} f(x)dx = \int\limits_{-5}^{-2} f(x)dx+\int\limits_{-2}^{0} f(x)dx+\int\limits_{0}^{3} f(x)dx = m-n+p+\int\limits_{-5}^{-2} g(x)dx+\int\limits_{-2}^{0} g(x)dx+\int\limits_{0}^{3} g(x)dx$$

$$=m-n+p+\int\limits_{-5}^{3} g(x)dx = m-n+p+\int\limits_{-5}^{3}\left(\frac{2}{15}x^2+\frac{4}{15}x\right)dx = m-n+p+\frac{208}{45}.$$

Chọn ý **B.**

Câu 32

Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = x^2$ và hai đường thẳng $y = a$, $y = b$ $(0 < a < b)$ (hình vẽ). Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng $y = a$ (phần tô đen); (S_2) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng $y = b$ (phần gạch chéo). Với điều kiện nào sau đây của a và b thì $S_1 = S_2$?



A. $b = \sqrt[3]{4}a$

B. $b = \sqrt[3]{2}a$

C. $b = \sqrt[3]{3}a$

D. $b = \sqrt[3]{6}a$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $(P): y = x^2$ với đường thẳng $y = b$ là

$$x^2 = b \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{b}.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $(P): y = x^2$ với đường thẳng $y = a$ là

$$x^2 = a \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a}.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $y = b$ là

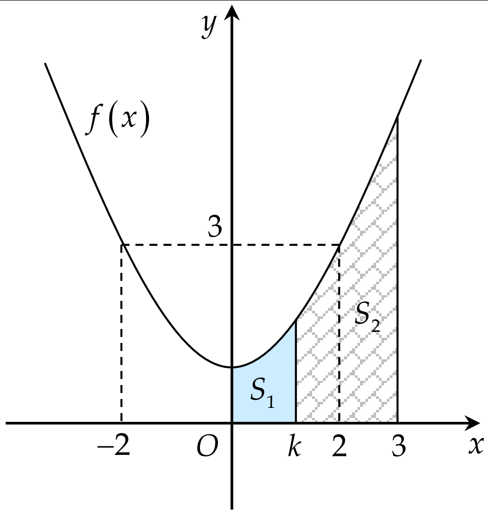
$$S = 2\int_0^{\sqrt{b}} \left(b - x^2\right) dx = 2\left(bx - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{b}} = 2\left(b\sqrt{b} - \frac{b\sqrt{b}}{3}\right) = \frac{4b\sqrt{b}}{3}.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $y = a$ (phần tô màu đen) là $S_1 = 2\int_0^{\sqrt{a}} \left(a - x^2\right) dx = 2\left(ax - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{a}} = 2\left(a\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{3}\right) = \frac{4a\sqrt{a}}{3}$.

Do đó $S = 2S_1 \Leftrightarrow \frac{4b\sqrt{b}}{3} = 2.\frac{4a\sqrt{a}}{3} \Leftrightarrow \left(\sqrt{b}\right)^3 = 2\left(\sqrt{a}\right)^3 \Leftrightarrow \sqrt{b} = \sqrt[3]{2}\sqrt{a} \Leftrightarrow b = \sqrt[3]{4}a$.

Câu 33

Hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C) là đường parabol bậc hai như hình vẽ. Hình phẳng giới hạn bởi (C), trục Ox, đường $x=3$ có diện tích S. Đường thẳng $x=k$ với $k\in(0;3)$ chia S ra thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2. Nếu $S_1=2S_2$ thì phát biểu nào sau đây đúng ?



A. $k\in(2,2;2,3)$

B. $k\in(2,3;2,4)$

C. $k\in(2,4;2,5)$

D. $k\in(2,5;2,6)$

Lời giải

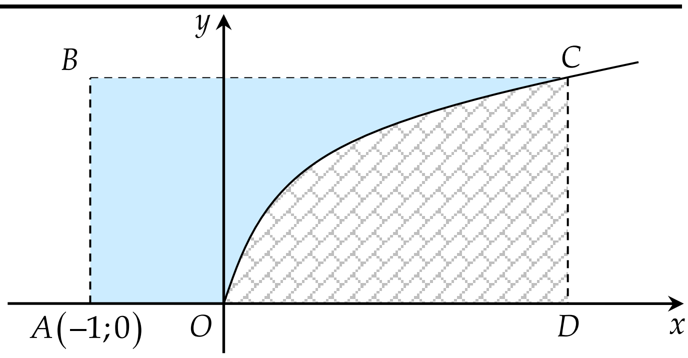
Ta có $(C): y=f(x)=ax^2+bx+c\ (c\neq 0)$ qua $(0;1),(2;3),(-2;3)$ nên $(C): y=\dfrac{1}{2}x^2+1$

Khi đó $S_1=2S_2 \Leftrightarrow \int_0^k\left(\dfrac{1}{2}x^2+1\right)dx=2\int_k^3\left(\dfrac{1}{2}x^2+1\right)dx \Leftrightarrow \left.\left(\dfrac{x^3}{6}+x\right)\right|_0^k=2\left.\left(\dfrac{x^3}{6}+x\right)\right|_k^3$

$$\Leftrightarrow \frac{k^3}{6}+k=15-2\left(\frac{k^3}{6}+k\right)\Leftrightarrow \frac{1}{2}k^3+3k-15=0\Leftrightarrow k\approx 2,47$$

Câu 34

Trong mặt phẳng tọa độ, cho hình chữ nhật (H) có một cạnh nằm trên trục hoành, và có hai đỉnh trên một đường chéo là $A(-1;0)$ và $C(a;\sqrt{a})$, với $a>0$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau, tìm a?



A. $a=9$ C. $a=0,5$

B. $a=4$ **D.** $a=3$

Lời giải

Gọi $ABCD$ là hình chữ nhật với AB nằm trên trục Ox, $A(-1;0)$ và $C(a;\sqrt{a})$

Nhận thấy đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 0 và đi qua $C(a;\sqrt{a})$. Do đó nó chia hình chữ nhật $ABCD$ ra làm 2 phần là có diện tích lần lượt là S_1,S_2. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$ và trục Ox, $x=0,x=a$ và S_2 là diện tích phần còn lại. Ta lần lượt tính S_1,S_2.

Tính diện tích $S_1=\int\limits_0^a \sqrt{x}dx$.

Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow t^2=x\Rightarrow 2tdt=dx$; Khi $x=0\Rightarrow t=0; x=a\Rightarrow t=\sqrt{a}$.

Do đó $S_1=\int\limits_0^{\sqrt{a}} 2t^2dt=\left.\left(\frac{2t^3}{3}\right)\right|_0^{\sqrt{a}}=\frac{2a\sqrt{a}}{3}$.

Hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=a+1; AD=\sqrt{a}$ nên

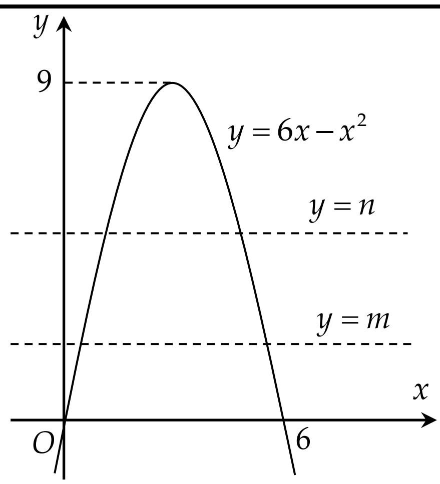
$$S_2=S_{ABCD}-S_1=\sqrt{a}(a+1)-\frac{2a\sqrt{a}}{3}=\frac{1}{3}a\sqrt{a}+\sqrt{a}$$

Do đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau nên

$$S_1=S_2\Leftrightarrow\frac{2a\sqrt{a}}{3}=\frac{1}{3}a\sqrt{a}+\sqrt{a}\Leftrightarrow a\sqrt{a}=3\sqrt{a}\Leftrightarrow a=3 \text{ (Do } a>0\text{)}.$$

Câu 35

Gọi (H) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=6x-x^2$ và trục hoành. Các đường thẳng $y=m, y=n\,(0<m<n<9)$ chia (H) thành 3 phần có diện tích bằng nhau như hình vẽ bên. Tính $T=(9-m)^3+(9-n)^3$?



A. 405.

B. 407.

C. 409.

D. 403.

Lời giải

Gọi S là diện tích của hình phẳng (H), ta có $S=\int_0^6\left|6x-x^2\right|dx=36$

Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=n, y=6x-x^2$ và $y=m, y=6x-x^2$.

Theo giả thiết ta có $S_1=\frac{S}{3}=12, S_2=\frac{2S}{3}=24$

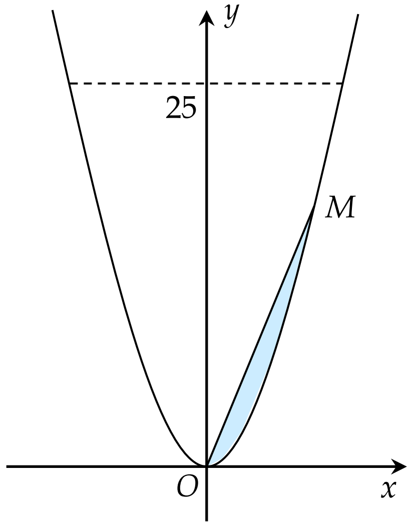
Theo công thức ta có $\begin{cases} S_1^2=\frac{\Delta^3{}_1}{36a^4}=\frac{(36-4n)^3}{36}=144 \\ S_2^2=\frac{\Delta^3{}_2}{36a^4}=\frac{(36-4m)^3}{36}=576 \end{cases}$

$$\Rightarrow T=(9-m)^3+(9-n)^3=\frac{36.144+36.576}{4^3}=405$$

Chọn ý **A.**

Câu 36

Ông B có một khu vườn giới hạn bởi đường parabol và một đường thẳng. Nếu đặt trong hệ tọa độ như hình vẽ bên thì parabol có phương trình $y = x^2$ và đường thẳng là $y = 25$. Ông B dự định dùng một mảnh vườn nhỏ được chia từ khu vườn bởi đường thẳng đi qua O và điểm M trên parabol để trồng hoa. Hãy giúp ông B xác định điểm M bằng cách tính độ dài OM để diện tích mảnh vườn nhỏ bằng $\frac{9}{2}$?



A. $OM = 2\sqrt{5}$ **B.** $OM = 3\sqrt{10}$

C. 15 **D.** $OM = 10$

Lời giải

Phân tích : *Bài dưới đây ta sẽ áp dụng công thức tính diện tích phần tạo bởi parapol và đường thẳng cắt parabol*

Phương trình đường thẳng $OM : y = kx$

Hoành độ giao điểm đường thẳng OM và parbol là $x^2 = kx \Leftrightarrow x^2 - kx = 0$

Áp dụng công thức $S^2 = \frac{\Delta^3}{36a^4} = \left(\frac{9}{2}\right)^2 \Leftrightarrow k = \pm 3 \Rightarrow M(\pm 3; 9) \Rightarrow OM = 3\sqrt{10}$

Chọn ý **B.**

Câu 37

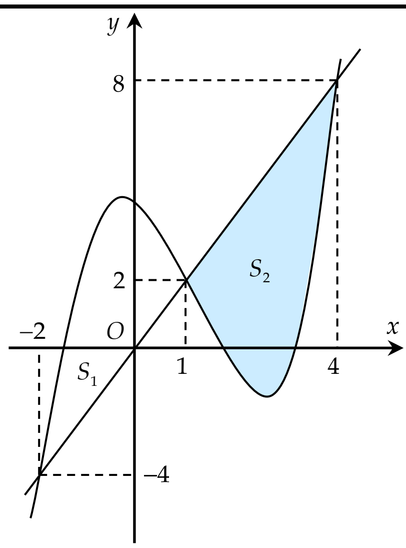
Cho đồ thị hàm $f'(x)$ như hình vẽ (biết rằng $S_2 > S_1$). Biết $h(x) = f(x) - x^2$. Kết quả nào dưới đây đúng ?

A. $h(0) > h(-2) > h(4)$

B. $h(-2) > h(0) = h(4)$

C. $h(4) > h(0) > h(-2)$

D. $h(-2) > h(0) > h(4)$



Lời giải

Ta có $h'(x) = f'(x) - 2x \Rightarrow \int_0^1 |f'(x) - 2x| dx < \int_{-2}^1 |f'(x) - 2x| dx < \int_1^4 |f'(x) - 2x| dx$

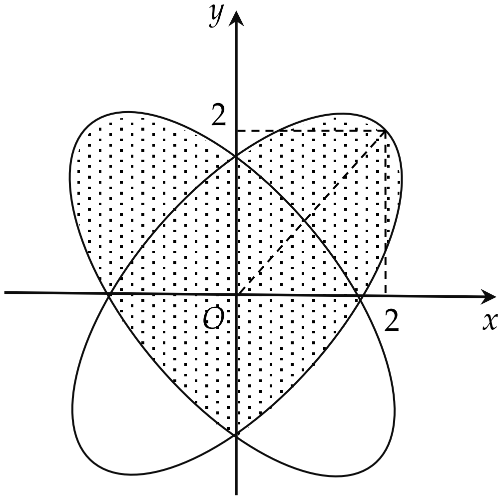
$$\Rightarrow h(1) - h(0) < h(1) - h(-2) < h(1) - h(4)$$

Do đó $h(0) > h(-2) > h(4)$

Chọn ý **A.**

Câu 38

Cho đồ thị hình 2 elip đối xứng nhau qua Ox và Oy như hình vẽ. Biết rằng điểm $A(2;2)$ thỏa mãn OA là một nửa độ dài trục lớn khi ta xoay elip về elip chính tắc và khoảng cách từ tâm đến các giao điểm bằng 1,8. Tỉ lệ diện tích hình trái tim được tạo ra bên phải và diện tích 1 hình cánh ngoài (2 elip giao nhau tạo ra 4 hình cánh) gần nhất với giá trị ?



A. 4,48 **B.** 3,6

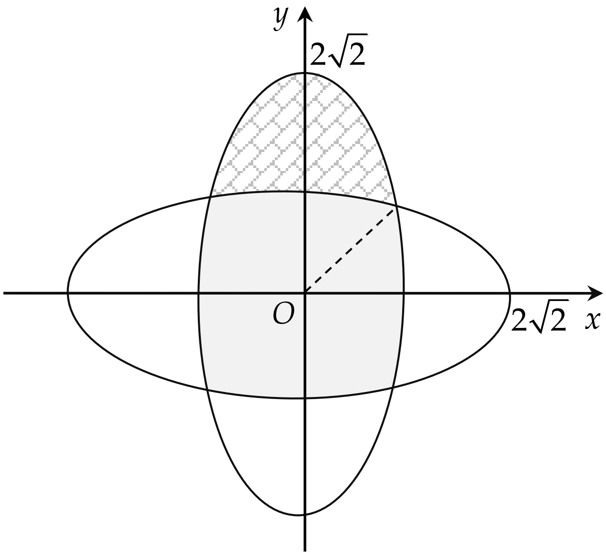
C. 4,2 **D.** 4,6

Lời giải

Phân tích. *Sự kết hợp đặc biệt của 2 hình elip tạo nên hình trái tim vừa là cảm hứng cho nghệ thuật vừa là cảm hứng cho toán học mặc dù tác giả của bài toán này vẫn còn đang ế. Trong bài toán này ta sẽ sử dụng phương pháp đổi trục và việc tính diện tích hình phẳng cũng khá dễ dàng.*

Chuyển hệ trục Oxy như hình dưới , phương trình elip nằm ngang là :

$$(E_1): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (1)$$



Theo giả thiết ta có $M\left(\frac{9\sqrt{2}}{10};\frac{9\sqrt{2}}{10}\right)$. Thay vào phương trình (1) được $b = \frac{\sqrt{648}}{\sqrt{319}}$

Phương trình elip nằm dọc $\frac{x^2}{\frac{648}{319}} + \frac{y^2}{8} = 1$

Diện tích phần gạch sọc là $S_1 = \int\limits_{-\frac{9\sqrt{2}}{10}}^{\frac{9\sqrt{2}}{10}} \left|\sqrt{\frac{648}{319} - \frac{81x^2}{319}} - \sqrt{\frac{648}{81} - \frac{319x^2}{81}}\right| dx \approx 2,6$

Ta hãy để ý diện tích hình trái tim chính bằng diện tích của 1 elip

Diện tích hình trái tim xấp xỉ là $S_2 = \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} 2\sqrt{\frac{648}{319} - \frac{81x^2}{319}}\, dx \approx 12,7$

Suy ra tỉ lệ thể tích xấp xỉ 4,48 lần

Chọn ý **A.**

Câu 39

Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ với $a<b$. Kí hiệu S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2f(x)$, $y=2g(x)$, $x=a$ và $x=b$; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)-2$, $y=g(x)-2$, $x=a$ và $x=b$. Mệnh đề nào sau đây là đúng ?

A. $S_1=S_2$.

B. $S_1=2S_2$.

C. $S_2=2S_1-2$.

D. $S_2=2S_1+2$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} S_1=\int\limits_a^b |2f(x)-2g(x)|dx = 2\int\limits_a^b |f(x)-g(x)|dx \\ S_2=\int\limits_a^b |[f(x)-2]-[g(x)-2]|dx=\int\limits_a^b |f(x)-g(x)|dx \end{cases} \Rightarrow S_1=2S_2.$

Chọn ý **B.**

Câu 40

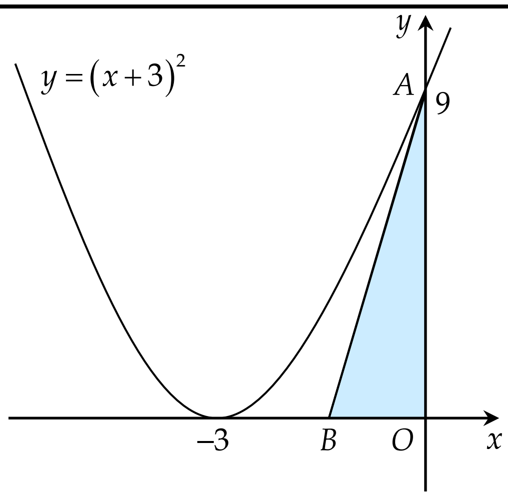
Xét hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=(x+3)^2$, trục hoành và đường thẳng $x=0$. Gọi $A(0;9)$, $B(b;0)$ $(-3<b<0)$. Tính giá trị của tham số b để đoạn thẳng AB chia (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau.

A. $b=-2$.

B. $b=-\frac{1}{2}$

C. $b=-1$

D. $\frac{-3}{2}$.



Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $(x+3)^2=0 \Leftrightarrow x=-3$.

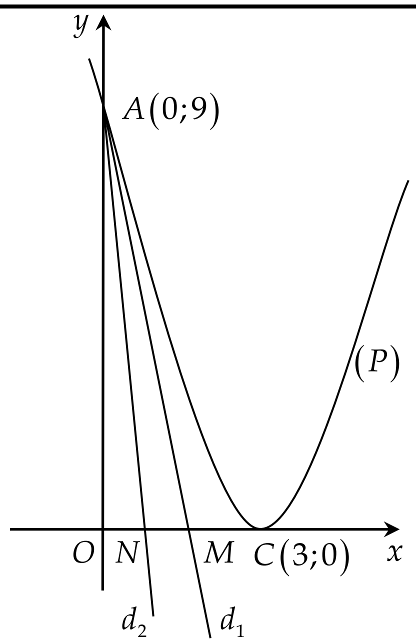
Do đó $S_{(H)}=\int\limits_{-3}^{0}(x+3)^2dx=9$. Diện tích tam giác OAB bằng: $S_{OAB}=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{9}{2}|b|$.

$$\Rightarrow S_{OAB}=\frac{1}{2}S_{(H)} \Leftrightarrow \frac{9}{2}|b|=\frac{9}{2}.\text{ Mà } (-3<b<0) \Rightarrow b=-1$$

Chọn ý **C.**

Câu 41

Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=(x-3)^2$, trục tung và trục hoành. Gọi k_1, k_2 $(k_1>k_2)$ là hệ số góc của hai đường thẳng cùng đi qua điểm $A(0;9)$ và chia (H) làm ba phần có diện tích bằng nhau. Tính k_1-k_2.



A. $\frac{13}{2}$

B. 7

C. $\frac{25}{4}$

D. $\frac{27}{4}$.

Lời giải

Gọi $d_1: y=k_1x+9$, $d_2: y=k_2x+9$ $(k_1>k_2)$.

Gọi $M=d_1\cap Ox \Rightarrow M\left(-\frac{9}{k_1};0\right)$; $N=d_2\cap Ox \Rightarrow N\left(-\frac{9}{k_2};0\right)$ $\left(-\frac{9}{k_2}<-\frac{9}{k_1}\right)$

Giao điểm của $(P): y=(x-3)^2$ với hai trục tọa độ lần lượt là $C(3;0)$, $A(0;9)$.

Theo giả thiết ta có $S_{\Delta AON}=S_{\Delta ANM} \Leftrightarrow OM=2ON \Leftrightarrow -\frac{9}{k_1}=-\frac{18}{k_2} \Leftrightarrow k_2=2k_1$.

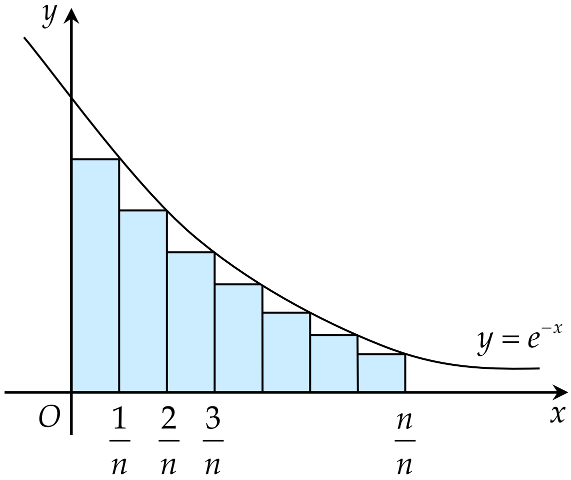
Lại có $S_{(H)}=3S_{\Delta AON} \Leftrightarrow \int_0^3 (x-3)^2\,dx = 3.\frac{1}{2}.OA.ON \Leftrightarrow 9=-\frac{243}{2k_2} \Leftrightarrow k_2=-\frac{27}{2}$.

$$\Rightarrow k_1=-\frac{27}{4} \Rightarrow k_1-k_2=\frac{27}{4}.$$

Chọn ý **D.**

Câu 42

Một hình phẳng được giới hạn bởi $y=f(x)=e^{-x}, y=0, x=0$ và $x=1$. Ta chia đoạn $[0;1]$ thành n phần bằng nhau tạo thành một hình bậc thang có tổng diện tích S_n. Tính $\lim S_n = \int_0^1 f(x)dx$



A. $1-e^{-1}$ **B.** e^{-1}

C. $\frac{2}{e^{-1}}-2$ **D.** e

Lời giải

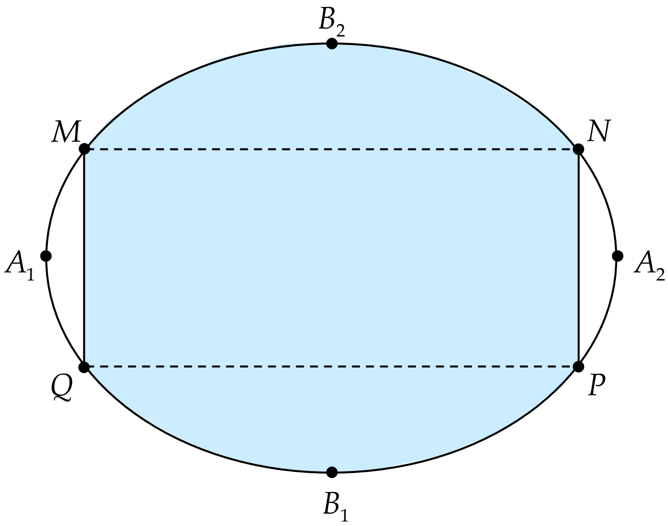
Ta có $S_n = \frac{1}{n}\left[e^{\frac{1}{n}} + e^{-2\frac{1}{n}} + \ldots + e^{-\frac{n}{n}}\right] = \frac{1}{n}e^{-\frac{1}{n}}\frac{1-e^{-1}}{1-e^{-\frac{1}{n}}} = \frac{\frac{1}{n}\left(1-e^{-1}\right)}{e^{\frac{1}{n}}-1}$

Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1-e^{-1}$ và $\int_0^1 e^{-x}dx = 1-e^{-1}$

Chọn ý **A.**

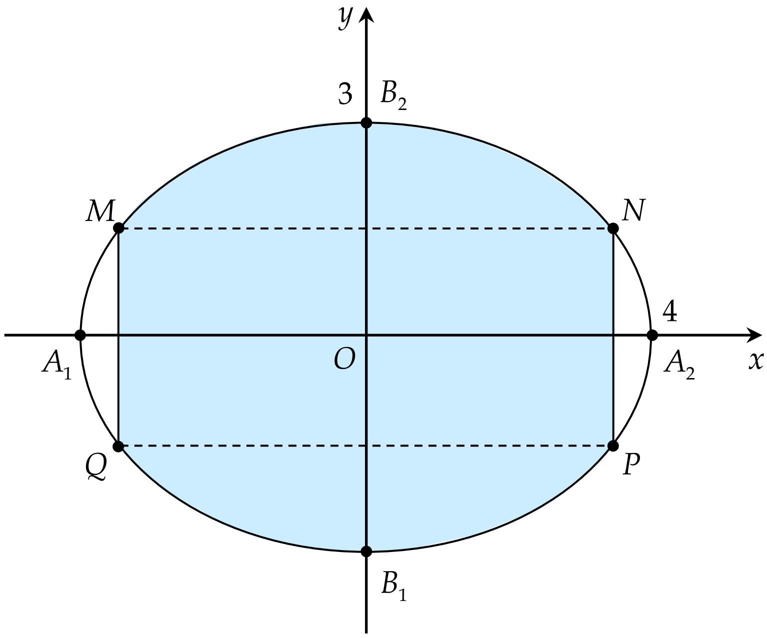
Câu 43

Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Biết chi phí sơn phần tô đậm là 200.000 đồng/m^2 và phần còn lại là 100.000 đồng/m^2. Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2 = 8$ m, $B_1B_2 = 6$ m và tứ giác MNPQ là hình chữ nhật có $MQ = 3$ m?



A. 7.322.000 **B.** 7.213.000 **C.** 5.526.000 **D.** 5.782.000

Lời giải



Giả sử phương trình elip $(E): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} A_1A_2 = 8 \\ B_1B_2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 8 \\ 2b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a = 3 \end{cases} \Rightarrow (E): \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow y = \pm\dfrac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$.

Diện tích của elip (E) là $S_{(E)} = \pi ab = 12\pi \ \left(m^2\right)$.

Ta có $MQ = 3 \Rightarrow \begin{cases} M = d \cap (E) \\ N = d \cap (E) \end{cases}$ với $d: y = \dfrac{3}{2} \Rightarrow M\left(-2\sqrt{3}; \dfrac{3}{2}\right)$ và $N\left(2\sqrt{3}; \dfrac{3}{2}\right)$.

Khi đó, diện tích phần không tô màu là $S = 4\int\limits_{2\sqrt{3}}^{4}\left(\dfrac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}\right)dx = 4\pi - 6\sqrt{3} \ \left(m^2\right)$.

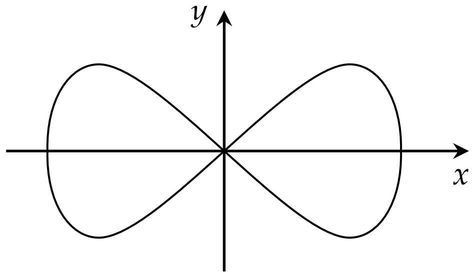
Diện tích phần tô màu là $S' = S_{(E)} - S = 8\pi + 6\sqrt{3}$.

Số tiền để sơn theo yêu cầu bài toán là

$$T = 100.000 \times \left(4\pi - 6\sqrt{3}\right) + 200.000 \times \left(8\pi + 6\sqrt{3}\right) \approx 7.322.000 \text{ đồng.}$$

Câu 44

Trong Công viên Toán học có những mảnh đất mang hình dáng khác nhau. Mỗi mảnh được trồng một loài hoa và nó được tạo thành bởi một trong những đường cong đẹp trong toán học. Ở đó có một mảnh đất mang tên Bernoulli, nó được tạo thành từ đường Lemmiscate có phương trình



trong hệ tọa độ Oxy là $16y^2 = x^2\left(25 - x^2\right)$ như hình vẽ bên. Tính diện tích S của mảnh đất Bernoulli biết rằng mỗi đơn vị trong hệ tọa độ Oxy tương ứng với chiều dài 1 mét.

A. $S = \dfrac{125}{6} \left(m^2\right)$ **B.** $S = \dfrac{125}{4} \left(m^2\right)$ **C.** $S = \dfrac{250}{3} \left(m^2\right)$ **D.** $S = \dfrac{125}{3} \left(m^2\right)$

Lời giải

Vì tính đối xứng trụ nên diện tích của mảnh đất tương ứng với 4 lần diện tích của mảnh đất thuộc góc phần tư thứ nhất của hệ trục tọa độ Oxy.

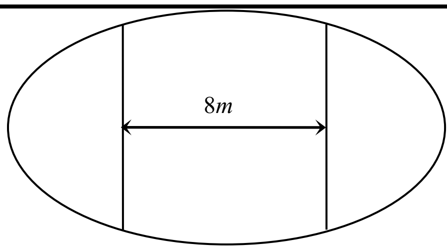
Từ giả thuyết bài toán, ta có $y=\pm\frac{1}{4}x\sqrt{25-x^2}\Rightarrow y=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-5\\x=0\\x=5\end{array}\right.$.

Góc phần tư thứ nhất $y=\frac{1}{4}x\sqrt{25-x^2};x\in[0;5]$

Nên $S_{(I)}=\frac{1}{4}\int_0^5 x\sqrt{25-x^2}dx=\frac{125}{12}\Rightarrow S=\frac{125}{3}(m^3)$.

Câu 45

Ông An có một mảnh vườn hình Elip có độ dài trục lớn bằng 16m và độ dài trục bé bằng 10m. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng 8m và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng/1m^2. Hỏi



ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn.)

A. 7.862.000 **B.** 7.653.000 **C.** 7.128.000 **D.** 7.128.000

Lời giải

Giả sử elip có phương trình $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Từ giả thiết ta có $2a=16\Rightarrow a=8$ và $2b=10\Rightarrow b=5$

Vậy phương trình của elip là $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}=1\Rightarrow\left[\begin{array}{ll}y=-\frac{5}{8}\sqrt{64-y^2} & (E_1)\\ y=\frac{5}{8}\sqrt{64-y^2} & (E_2)\end{array}\right.$

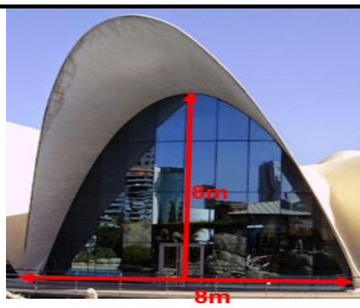
Khi đó diện tích dải vườn được giới hạn bởi các đường (E_1); (E_2); $x=-4$; $x=4$ và diện tích của dải vườn là $S=2\int_{-4}^{4}\frac{5}{8}\sqrt{64-x^2}dx=\frac{5}{2}\int_0^4\sqrt{64-x^2}dx$

Tính tích phân này bằng phép đổi biến $x=8\sin t$, ta được $S=80\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

Khi đó số tiền là $T=80\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right).100000=7652891,82\simeq 7.653.000$.

Câu 46

Vòm cửa lớn của một trung tâm văn hoá có dạng hình Parabol. Người ta dự định lắp cửa kính cường lực cho vòm cửa này. Hãy tính diện tích mặt kính cần lắp vào biết rằng vòm cửa cao *8m* và rộng *8m (như hình vẽ)*

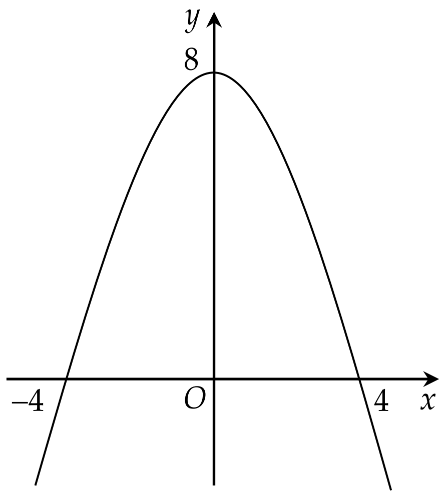


A. $\frac{28}{3}\left(m^2\right)$ **B.** $\frac{26}{3}\left(m^2\right)$

C. $\frac{128}{3}\left(m^2\right)$ **D.** $\frac{131}{3}\left(m^2\right)$

Lời giải

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.



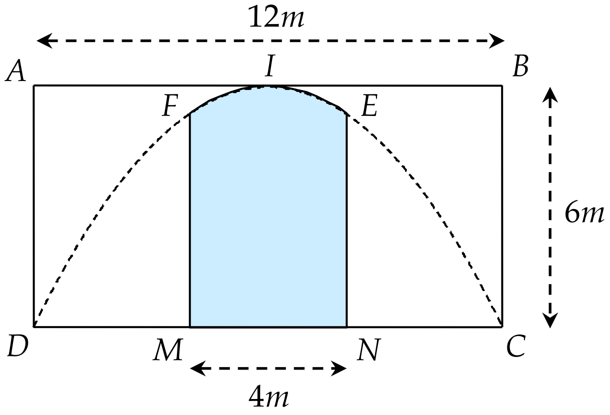
Gọi $\left(P_1\right): y = ax^2 + c$ là Parabol đi qua hai điểm $A(4;0), B(0;8)$

Nên ta có hệ phương trình sau $\begin{cases} 0 = a.16 + c \\ c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ c = 8 \end{cases} \Rightarrow \left(P_1\right): y = -\frac{1}{2}x^2 + 8$

$$\Rightarrow S = \int_{-4}^{4}\left|-\frac{1}{2}x^2 + 8\right| = \frac{128}{3}\left(m^2\right).$$

Câu 47

Một công ty quảng cáo X muốn làm một bức tranh trang trí hình MNEIF ở chính giữa của một bức tường hình chữ nhật ABCD có chiều cao $BC = 6$ m, chiều dài $CD = 12$ m (*hình vẽ bên*). Cho biết MNEF là hình chữ nhật có $MN = 4$ m; cung EIF có hình dạng là một phần của cung parabol có đỉnh I là trung điểm của cạnh AB và đi qua hai điểm C, D. Kinh phí làm bức tranh là 900.000 đồng/m^2. Hỏi công ty X cần bao nhiêu tiền để làm bức tranh đó ?



A. $\frac{28}{3}\left(m^2\right)$ **B.** $\frac{28}{3}\left(m^2\right)$ **C.** $\frac{128}{3}\left(m^2\right)$ **D.** $\frac{131}{3}\left(m^2\right)$

Lời giải

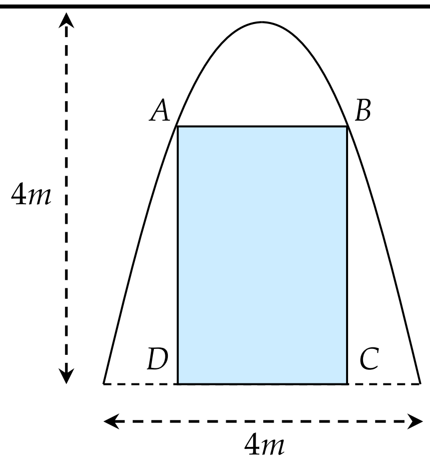
Nếu chọn hệ trục tọa độ có gốc là trung điểm O của MN, trục hoành trùng với đường thẳng MN thì parabol có phương trình là $y = -\frac{1}{6}x^2 + 6$.

Khi đó diện tích của khung tranh là $S = \int_{-2}^{2}\left(-\frac{1}{6}x^2 + 6\right)dx = \frac{208}{9}\ m^2$

Suy ra số tiền là: $\frac{208}{9} \times 900.000 = 20.800.000$ đồng.

Câu 48

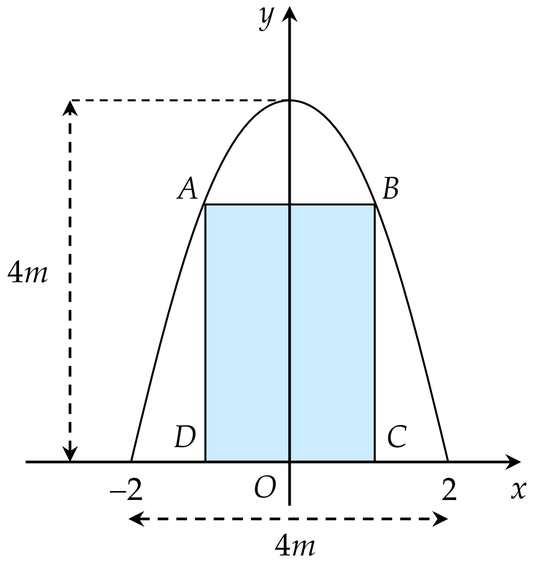
Trong đợt hội trại "Khi tôi 18" được tổ chức tại trường THPT X, Đoàn trường có thực hiện một dự án ảnh trưng bày trên một pano có dạng parabol như hình vẽ. Biết rằng Đoàn trường sẽ yêu cầu các lớp gửi hình dự thi và dán lên khu vực hình chữ nhật ABCD, phần còn lại sẽ được trang trí hoa văn cho phù hợp. Chi phí dán hoa văn là 200.000 đồng cho một m^2 bảng. Hỏi chi phí thấp nhất cho việc hoàn tất hoa văn trên pano sẽ là bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn)?



A. 900.000 **B.** 1.232.000 **C.** 902.000 **D.** 1.230.000

Lời giải

Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ, khi đó phương trình đường parabol có dạng: $y = ax^2 + b$.



Parabol cắt trục tung tại điểm $(0;4)$ và cắt trục hoành tại $(2;0)$ nên $\begin{cases} a=-1 \\ b=4 \end{cases}$

Do đó, phương trình parabol là $y=-x^2+4$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường parabol và trục hoành là

$$S_1=\int_{-2}^{2}\left(-x^2+4\right)dx=\left.\left(-\frac{x^3}{3}+4x\right)\right|_{-2}^{2}=\frac{32}{3}.$$

Gọi $C(t;0)\Rightarrow B\left(t;4-t^2\right)$ với $0<t<2$.

Ta có $CD=2t$ và $BC=4-t^2$. Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là

$$S_2=CD.BC=2t.\left(4-t^2\right)=-2t^3+8t.$$

Diện tích phần trang trí hoa văn là $S=S_1-S_2=\frac{32}{3}-\left(-2t^3+8t\right)=2t^3-8t+\frac{32}{3}$.

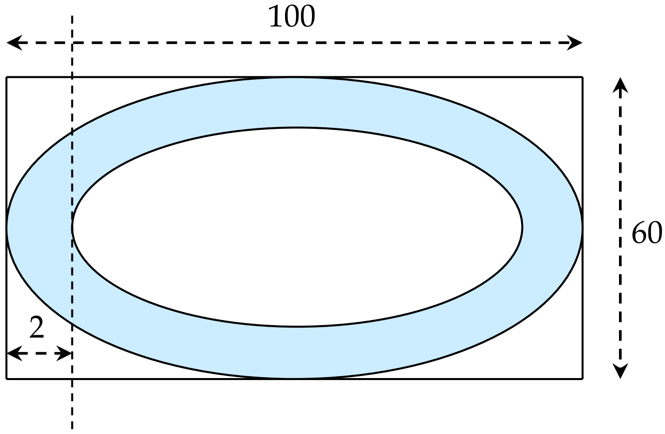
Xét hàm số $f(t)=2t^3-8t+\frac{32}{3}$ với $0<t<2$.

Ta có $f'(t)=6t^2-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=\frac{2}{\sqrt{3}}\in(0;2) \\ t=-\frac{2}{\sqrt{3}}\notin(0;2) \end{array}\right.$.

Lập bảng biến thiên ta thấy diện tích phần trang trí nhỏ nhất là bằng $\frac{96-32\sqrt{3}}{9}m^2$, khi đó chi phí thấp nhất cho việc hoàn tất hoa văn trên pano sẽ là $\frac{96-32\sqrt{3}}{9}.200000\approx 902000$ đồng.

Câu 49

Một sân chơi cho trẻ em hình chữ nhật có chiều dài $100m$ và chiều rộng là $60m$ người ta làm một con đường nằm trong sân (Như hình vẽ). Biết rằng viền ngoài và viền trong của con đường là hai đường elip, Elip của đường viền ngoài có trục lớn và trục bé lần lượt song song với các cạnh hình chữ nhật và chiều rộng của mặt đường là $2m$. Kinh phí cho mỗi m^2 làm đường 600.000 đồng. Tính tổng số tiền làm con đường đó. (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).



A. 293904000. **B.** 283904000. 293804000. **D.** 283604000.

Lời giải

Xét hệ trục tọa độ Oxy đặt gốc tọa độ O vào tâm của hình Elip.

Phương trình Elip của đường viền ngoài của con đường là $(E_1): \frac{x^2}{50^2}+\frac{y^2}{30^2}=1$. Phần đồ thị của (E_1) nằm phía trên trục hoành có phương trình $y=30\sqrt{1-\frac{x^2}{50^2}}=f_1(x)$.

Phương trình Elip của đường viền trong của con đường là $(E_2): \frac{x^2}{48^2}+\frac{y^2}{28^2}=1$. Phần đồ thị của (E_2) nằm phía trên trục hoành có phương trình $y=28\sqrt{1-\frac{x^2}{48^2}}=f_2(x)$.

Gọi S_1 là diện tích của (E_1) và bằng hai lần diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và đồ thị hàm số $y=f_1(x)$. Gọi S_2 là diện tích của (E_2) và bằng hai lần diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và đồ thị hàm số $y=f_2(x)$.

Gọi S là diện tích con đường.

Khi đó: $S=S_1-S_2=2\int\limits_{-50}^{50}30\sqrt{1-\frac{x^2}{50^2}}dx-2\int\limits_{-48}^{48}28\sqrt{1-\frac{x^2}{48^2}}dx$.

Tính tích phân $I=2\int\limits_{-a}^{a}b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx,\left(a,b\in\mathbb{R}^+\right)$.

Đặt $x=a\sin t,\left(-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow dx=a\cos tdt$. Đổi cận $x=-a\Rightarrow t=-\frac{\pi}{2}; x=a\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$.

Khi đó

$$I = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} b\sqrt{1-\sin^2 t}.a\cos t\,dt = 2ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt = ab\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = ab\pi.$$

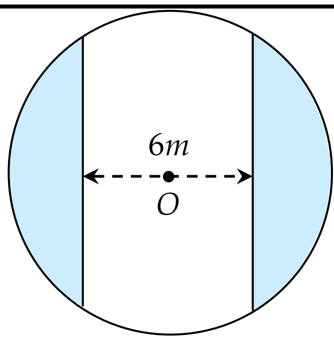
Do đó $S = S_1 - S_2 = 50.30\pi - 48.28\pi = 156\pi$.

Vậy tổng số tiền làm con đường đó là $600000.S = 600000.156\pi \approx 294053000$ (đồng).

Chú ý. *Công thức tính diện tích elip khi biết độ dài trục lớn và trục bé là $S = \pi ab$*

Câu 50

Một mảnh vườn hình tròn tâm O bán kính 6m. Người ta cần trồng cây trên dải đất rộng 6m nhận O làm tâm đối xứng, biết kinh phí trồng cây là 70000 đồng / m^2. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cây trên dải đất đó (số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị)



A. 8412322 **B.** 8142232

C. 4821232 **D.** 4821322

Lời giải

Xét hệ trục tọa độ oxy đặt vào tâm khu vườn , khi đó phương trình đường tròn tâm O là $x^2 + y^2 = 36$.

Khi đó phần nửa cung tròn phía trên trục *Ox* có phương trình $y = \sqrt{36 - x^2} = f(x)$

Khi đó diện tích S của mảnh đất bằng 2 lần diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, đồ thị $y = f(x)$ và hai đường thẳng $x = -3;\ x = 3$ $\Rightarrow S = 2\int_{-3}^{3} \sqrt{36 - x^2}dx$

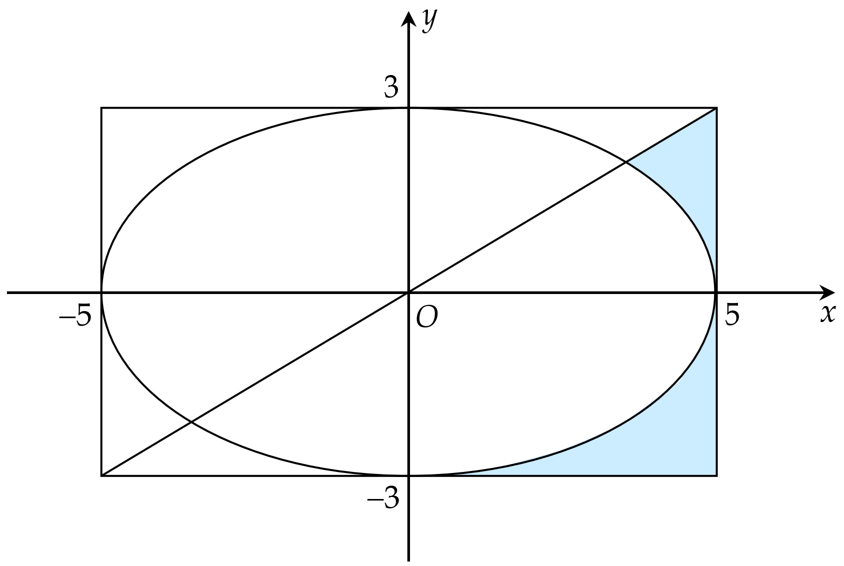
Đặt $x = 6\sin t \Rightarrow dx = 6\cos t dt$. Đổi cận $x = -3 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{6}; x = 3 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow S = 2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 36\cos^2 t dt = 36\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2t + 1)dt = 18(\sin 2t + 2t)\Bigg|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = 18\sqrt{3} + 12\pi$$

Do đó số tiền cần dùng là $70000.S \approx 4821322$ đồng.

Câu 51

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho elip chính tắc có độ dài trục lớn bằng 10 và độ dài trục nhỏ bằng 6 và hình chữ nhật ngoại tiếp elip đã cho. Diện tích phần hình phẳng được gạch chéo (tham khảo hình vẽ bên) bằng?



A. $\frac{45(4-\pi)}{8}$ **B.** $5(\pi-2)$ **C.** $5(4-\pi)$ **D.** $\frac{45(\pi-2)}{8}$

Lời giải

Phương trình elip có độ dài trục lớn bằng 10 và trục bé bằng 6 là $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

Phương trình elip phía trên trục hoành là $y=3\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}$, phương trình phía dưới trục hoành là $y=-3\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}$

Phương trình đường thẳng $y=\frac{3}{5}x$ cắt elip tại các điểm $\left(-\frac{5}{\sqrt{2}};-\frac{3}{\sqrt{2}}\right);\left(\frac{5}{\sqrt{2}};\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

Diện tích phần gạch chéo phía trên trục hoành là

$$S_1=\int_{\frac{5}{\sqrt{2}}}^{5}\left|\frac{3}{5}x-3\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}\right|dx=\int_{\frac{5}{\sqrt{2}}}^{5}\left(\frac{3}{5}x-3\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}\right)dx$$

Diện tích phần gạch chéo phía dưới trục hoành là

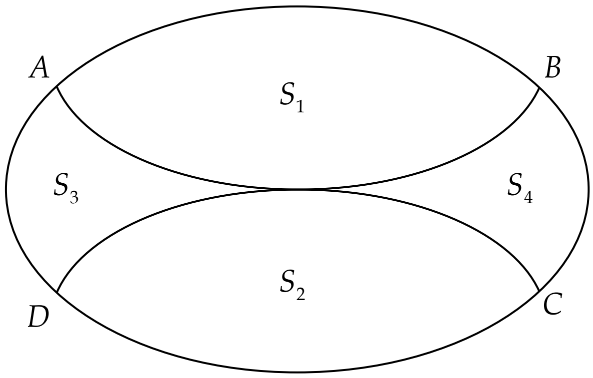
$$S_2=\int_0^5\left|-3\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}-(-3)\right|dx=\int_0^5\left(-3\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}+3\right)dx$$

Vậy diện tích phần gạch chéo là

$$S=S_1+S_2=\int_{\frac{5}{\sqrt{2}}}^{5}\left(\frac{3}{5}x-3\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}\right)dx+\int_0^5\left(-3\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}+3\right)dx=\frac{45(4-\pi)}{8}$$

Câu 52

Một bồn hoa hình elip tâm O có độ dài trục lớn bằng 6m ,độ dài trục bé bằng 4m . Người ta chia bồn hoa thành 4 phần S_1,S_2,S_3,S_4 bởi hai Parabol có cùng đỉnh O và đối xứng qua O như hình vẽ bên dưới.

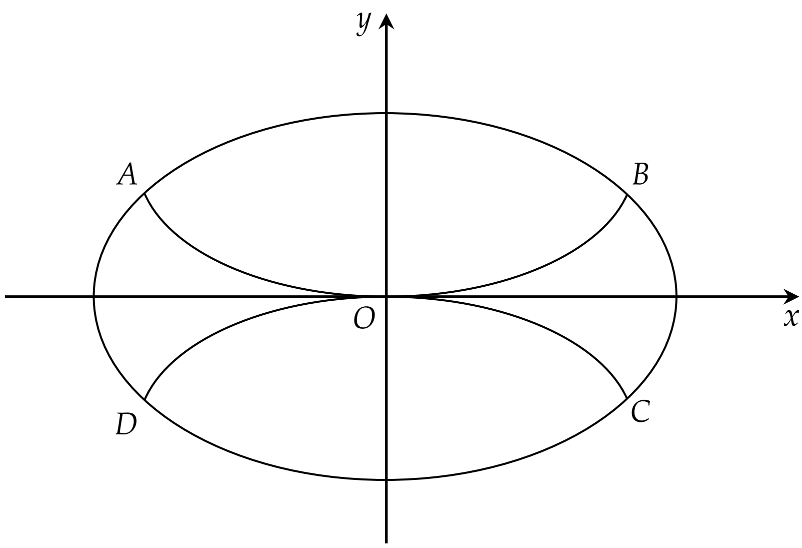


A. 1.975.978 **B.** 1.970.978 **C.** 1.957.978 **D.** 1.976.978

Lời giải

Phương trình elip và độ dài trục lớn là 6m và trục nhỏ là 4m $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

Ta có diện tích của elip là $S_0:\begin{cases} y=2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}} \\ y=-2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}} \\ x=-3;x=3 \end{cases} \Rightarrow S_0=\int_{-3}^{3}\left|2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}-\left(-2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}\right)dx\right|=6\pi$



Ta có $\begin{cases} AB=3\sqrt{3} \\ AD=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A=-\frac{3\sqrt{3}}{2};x_B=\frac{3\sqrt{3}}{2} \\ A_A=y_s=1 \end{cases} \Rightarrow y=\frac{4}{27}x^2$ là parabol đi qua các điểm O,A,B

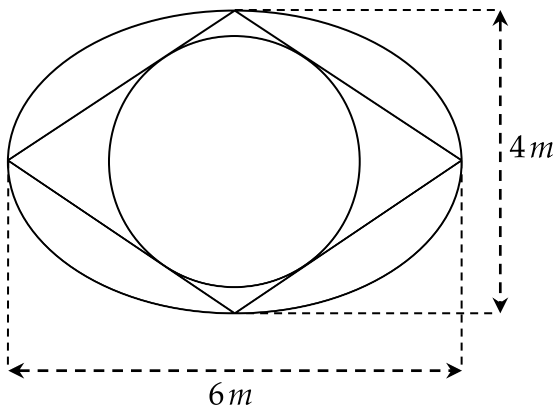
Ta có $S_1:\begin{cases} y=2\sqrt{1-\dfrac{x^2}{9}} \\ y=\dfrac{4}{27}x^2 \\ x=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2};x=\dfrac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ $\Rightarrow S_2=S_1=\int_{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}^{\frac{3\sqrt{3}}{22}}\left|\dfrac{4}{27}x^2-2\sqrt{1-\dfrac{x^2}{9}}\right|dx=\dfrac{4\pi+\sqrt{3}}{2}$

Từ đó suy ra $S_3+S_4=S_0-2S_1=6\pi-\left(4\pi+\sqrt{3}\right)=2\pi-\sqrt{3}$

Vậy kinh phí trồng hoa là $\left(S_1+S_2\right)\times 100.000+\left(S_3+S_4\right)\times 120.000\approx 1.975.978$

Câu 53

Trường THPT chuyên Nguyễn Trãi dự định xây hồ nước cho học sinh. Khuôn viên hồ nước là một hình elip, trong đó phần hình thoi là để chứa nước, phần còn lại là để ngồi (kích thước như hình vẽ). Trong phần hình thoi, người ta lại tiếp tục đặt đài phun nước hình tròn tiếp xúc với hình thoi. Tính tỉ số diện tích đài phun nước so với diện tích bệ ngồi.



A. $1,19$ **B.** $1,27$ **C.** $1,33$ **D.** $1,43$

Lời giải

Gắn vào hệ trục tọa độ, ta có pt elip là $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ $\Rightarrow S_{elip}=2\int_{-3}^{3}\sqrt{4-\dfrac{4}{9}x^2}dx$

Ta có $S_{thoi}=\dfrac{1}{2}.6.4=12$. Gọi bán kính hình tròn nội tiếp là R, cạnh hình thoi là a. Dễ thấy

$$S_{thoi}=2Ra\Rightarrow 2R\sqrt{2^2+3^2}=12\Rightarrow R=\frac{6}{\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow S_{tron}=R^2\pi=\frac{36}{13}\pi\Rightarrow \text{ Tỉ số }=\frac{S_{tron}}{S_{elip}-S_{thoi}}\approx 1,27$$

Chọn ý **B.**

Câu 54

Tính diện tích "tam giác cong" tạo bởi đồ thị của 3 hàm $f(x) = x^2 - 2x$; $g(x) = x^2 - 6x + 6$; $h(x) = -x^2 + 2x - 2$

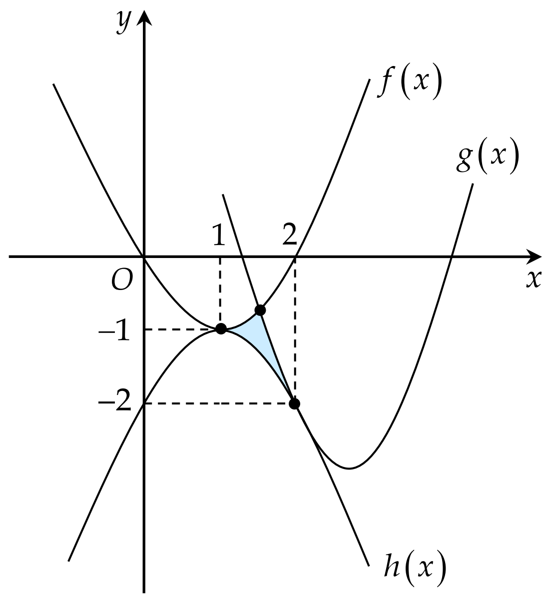
A. $\dfrac{11}{24}$ **B.** $\dfrac{17}{24}$ **C.** $\dfrac{1}{4}$ **D.** $\dfrac{1}{6}$

Lời giải

Xét các pt hoành độ giao điểm

- $f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 2x = x^2 - 6x + 6 \Rightarrow x = 1,5$
- $f(x) = h(x) \Rightarrow x^2 - 2x = -x^2 + 2x - 2 \Rightarrow x = 1$
- $g(x) = h(x) \Rightarrow x^2 - 6x + 6 = -x^2 + 2x - 2 \Rightarrow x = 2$

Từ đó ta có tương quan các đồ thị như hình vẽ



Dựa vào hình, dễ thấy $S = \left|\int_1^2 h(x)dx\right| - \left|\int_1^{1,5} f(x)dx\right| - \left|\int_{1,5}^2 g(x)dx\right| = \dfrac{4}{3} - \dfrac{11}{24} - \dfrac{17}{24} = \dfrac{1}{6}$

Chọn ý **D.**

Câu 55

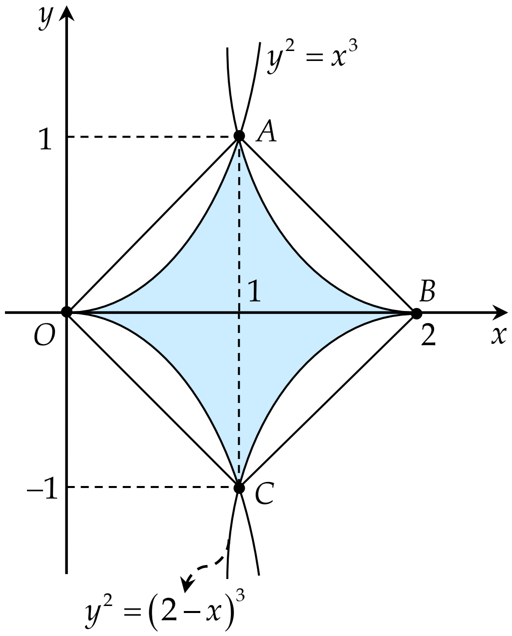
Cho hai đường cong $\begin{cases} y^2 = x^3 \\ y^2 = (2-x)^3 \end{cases}$. Gọi S_1 là diện tích tạo bởi hai đường cong này; S_2 là diện tích đa giác lồi tạo bởi các giao điểm của 2 đường cong với nhau và với trục hoành. Tính tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$

A. $\dfrac{4}{5}$ **B.** $\dfrac{2}{3}$ **C.** $\dfrac{5}{6}$ **D.** $\dfrac{17}{20}$

Lời giải

Tọa độ giao điểm của 2 đường cong trên là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y^2 = x^3 \\ y^2 = (2-x)^3 \end{cases} \Rightarrow x^3 - (2-x)^3 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow A(1;1); B(1;-1)$$



Xét giao điểm của 2 đường cong với trục hoành, $\begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = 0 \\ y = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases} \Rightarrow O(0;0); C(0;2)$

Dễ thấy đa giác OACB là hình vuông $\Rightarrow S_2 = S_{OACB} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$

Nhận thấy đồ thị 2 đường cong đối xứng qua Ox, nên ta chỉ cần tính phần diện tích nằm trên Ox. Ta có $\begin{cases} y^2 = x^3 \\ y^2 = (2-x)^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y^{\frac{2}{3}} \\ x = 2 - y^{\frac{2}{3}} \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} S_1 = \int_0^1 \left[\left(2 - y^{\frac{2}{3}}\right) - y^{\frac{2}{3}}\right] dy = \int_0^1 \left(2 - 2y^{\frac{2}{3}}\right) dy = \frac{4}{5} \Rightarrow S_1 = \frac{8}{5} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{5}$$

Chọn ý **A.**

Câu 56

Tính diện tích giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x) = \frac{1}{3}\left|(x+3)(x+1)(x-3)\right|$ và đường thẳng $(d): 7x - 12y + 112 = 0$.

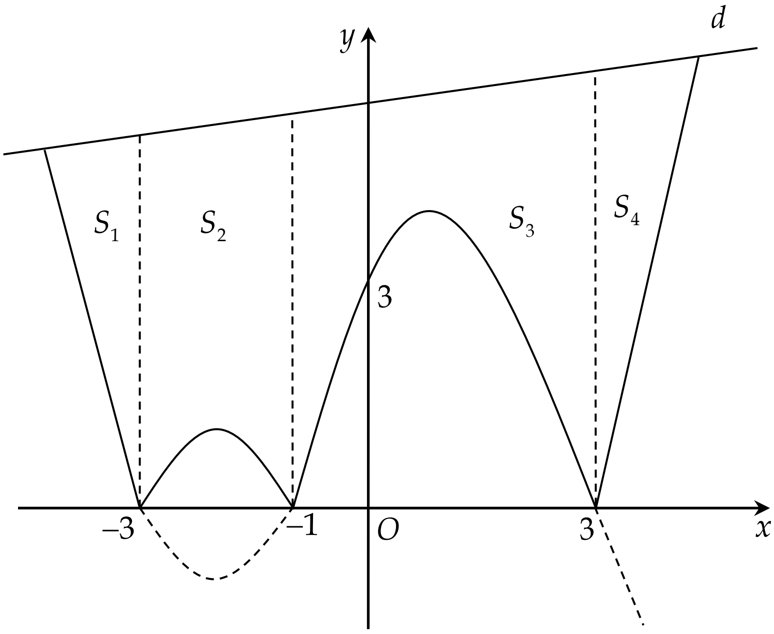
A. $\frac{901}{18}$ **B.** $\frac{903}{18}$ **C.** $\frac{905}{18}$ **D.** $\frac{907}{18}$

Lời giải

Hàm số $f(x)$ có thể viết lại dưới dạng sau đây

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{3}(x+3)(x+1)(x-3)\ \text{khi}\ x\in(-\infty;-3];\ x\in(-1;3)\\ \dfrac{1}{3}(x+3)(x+1)(x-3)\ \text{khi}\ x\in(-3;-1];\ x\in[3;+\infty)\end{cases}$$

Ta có tương quan đồ thị như sau



Trước tiên, ta sẽ đi tìm toạ độ giao điểm của (d) và ĐTHS $f(x)$

- Xét pt $-\dfrac{1}{3}(x+3)(x+1)(x-3)=\dfrac{7}{12}x+\dfrac{28}{3}\Rightarrow 4x^3+4x^2-29x+76=0$

$$\Leftrightarrow (x+4)(4x^2-12x+19)=0\Rightarrow \text{pt có nghiệm duy nhất } x=-4$$

$$\Rightarrow S_1=\int_{-4}^{-3}\left[\frac{7}{12}x+\frac{28}{3}+\frac{1}{3}(x^3+x^2-9x-9)\right]dx=\frac{311}{72}$$

- Xét pt $\dfrac{1}{3}(x+3)(x+1)(x-3)=\dfrac{7}{12}x+\dfrac{28}{3}\Rightarrow 4x^3+4x^2-43x-148=0$

$$\Leftrightarrow (x-4)(4x^2+20x+37)=0\Rightarrow \text{ pt có nghiệm duy nhất } x=4$$

$$\Rightarrow S_4=\int_{3}^{4}\left[\frac{7}{12}x+\frac{28}{3}-\frac{1}{3}(x^3+x^2-9x-9)\right]dx=\frac{445}{72}$$

Mặt khác, có $S_2=\displaystyle\int_{-3}^{-1}\left[\frac{7}{12}x+\frac{28}{3}-\frac{1}{3}(x^3+x^2-9x-9)\right]dx=\frac{127}{9}$

$$S_3=\int_{-1}^{3}\left[\frac{7}{12}x+\frac{28}{3}+\frac{1}{3}(x^3+x^2-9x-9)\right]dx=\frac{229}{9}\Rightarrow S=S_1+S_2+S_3+S_4=\frac{901}{18}$$

Chọn ý **A.**

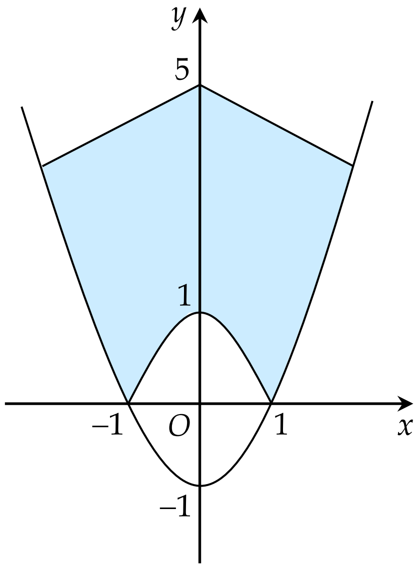
Câu 57

Gọi S_a là diện tích được giới hạn bởi 2 đồ thị hàm số $f(x)=|x^2-1|$ và đồ thị hàm số $g(x)=\begin{cases}5+ax \text{ khi } x<0\\5-ax \text{ khi } x>0\end{cases}$, với $a>0$. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_5}$

A. $\frac{33}{13}$ **B.** $\frac{13}{33}$ **C.** $\frac{36}{11}$ **D.** $\frac{11}{36}$

Lời giải

Gọi I_a là diện tích giới hạn bởi $g(x)$ và ĐTHS $y=x^2-1$



Dựa vào đồ thị, dễ thấy $I_a=S_a+2\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx \Rightarrow S_a=I_a-\frac{8}{3}$

Ta cần tính I_a. Dễ chứng minh diện tích hình cần tính đối xứng qua Oy, do vậy ta đi tính nửa bên phải. Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$5-ax=x^2-1 \Leftrightarrow x^2+ax-6=0 \Rightarrow x=\frac{-a+\sqrt{a^2+24}}{2} \text{ (Vì}$$

$$x\geq 0) \Rightarrow I_a=2\int_0^{\frac{-a+\sqrt{a^2+24}}{2}}(6-ax-x^2)dx$$

$$\Rightarrow \begin{cases}S_1=2\int_0^2(6-x-x^2)dx-\frac{8}{3}=12\\S_5=2\int_0^1(6-5x-x^2)dx-\frac{8}{3}=\frac{11}{3}\end{cases} \Rightarrow \frac{S_1}{S_5}=\frac{36}{11}$$

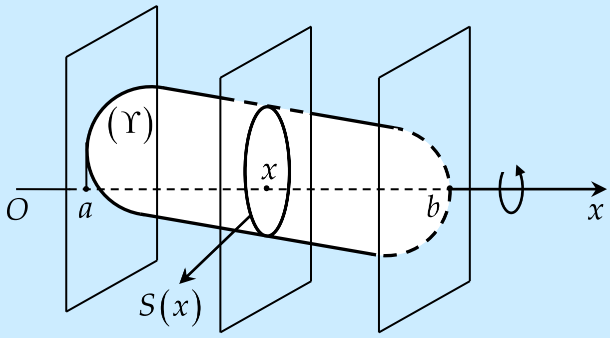
Chọn ý **C.**

B. ỨNG DỤNG TÍNH THỂ TÍCH

I. LÝ THUYẾT CẦN NẮM

1. TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ

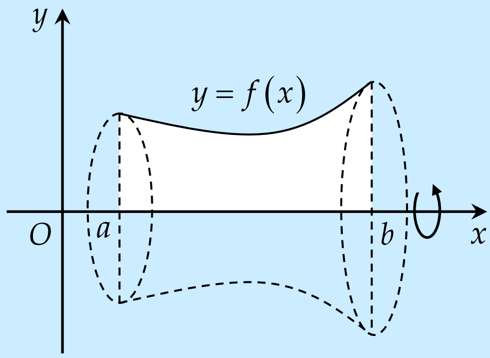
Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b; $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x, $(a \le x \le b)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$.



Khi đó, thể tích của vật thể *B* được xác định: $V = \int_a^b S(x)dx$

2. TÍNH THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY.

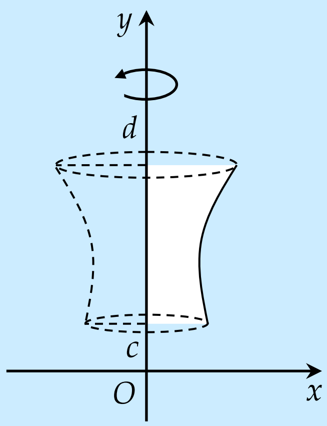
- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục *Ox*:



$$\begin{cases} (C): y = g(x) \\ (Ox): y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \Rightarrow V_x = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Tương tự:

- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, trục hoành và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ quanh trục *Oy*:



$x = g(y)$

Ta có $\begin{cases} (C): x = g(y) \\ (Oy): x = 0 \\ y = c \\ y = d \end{cases} \Rightarrow V_y = \pi\int_c^d [g(y)]^2 dy$

- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục *Ox*

$$\boxed{V = \pi\int_a^b \left|f^2(x) - g^2(x)\right| dx}$$

III. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Câu 1. Cho hình phẳng *D* giới hạn bởi các đường $y^2 = 4x$ và đường thẳng $x = 4$. Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi *D* xoay quanh trục *Ox* là

A. 32π **B.** 64π **C.** 16π **D.** 4π

Câu 2. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 2$ quay xung quanh trục *Ox*. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng?

A. $2\ln^2 2 - 4\ln 2 + 2$ B. $\pi\left(2\ln^2 2 + 4\ln 2 - 2\right)$

C. $2\pi\left(\ln^2 2 - 2\ln 2 + 1\right)$ D. $\pi(2\ln 2 - 1)$

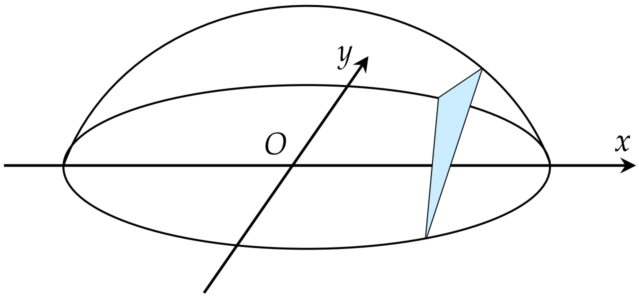
Câu 3. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = a.x^2$, $y = bx$ $(a, b \neq 0)$ quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng?

A. $V = \pi.\frac{b^3}{a^3}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)$ **B.** $V = \pi.\frac{b^5}{5a^3}$ **C.** $V = \pi.\frac{b^5}{3a^3}$ **D.** $V = \pi.\frac{b^5}{a^3}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)$

Câu 4. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 - 6x^2 + 9x$, $y = 0$ quay xung quanh trục *Ox*. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng?

A. $\frac{729\pi}{35}$ **B.** $\frac{27\pi}{4}$ **C.** $\frac{256608\pi}{35}$ **D.** $\frac{7776\pi}{5}$

Câu 5. Một vật có kích thước và hình dáng như hình vẽ dưới đây. Đáy là hình tròn giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 = 16$ (nằm trong mặt phẳng Oxy), cắt vật bởi các mặt phẳng vuông góc với trục Ox ta được thiết diện là tam giác đều. Thể tích của vật thể là?



A. $V=\frac{256\sqrt{3}}{3}$.   **B.** $V=\frac{256}{3}$.   **C.** $V=\frac{32\sqrt{3}}{3}$.   **D.** $V=\frac{32}{3}$.

Câu 6. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2x^2$, $y^2=4x$ quay xung quanh trục *Ox*. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng ?

A. $V=\frac{88\pi}{5}$.   **B.** $V=\frac{9\pi}{70}$.   **C.** $V=\frac{4\pi}{3}$.   **D.** $V=\frac{6\pi}{5}$.

Câu 7. Thể tích khối tròn xoay được giới hạn bởi các đường $y=\left(1-x^2\right)$, $y=0$, $x=0$ và $x=2$ khi quay quanh trục Ox bằng?

A. $\frac{8\pi\sqrt{2}}{3}$ **B.** 2π **C.** $\frac{46\pi}{15}$ **D.** $\frac{5\pi}{2}$

Câu 8. Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=\frac{x^2}{4}$. và $y=x$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành ?

A. $\frac{124\pi}{15}$ **B.** $\frac{126\pi}{15}$ **C.** $\frac{128\pi}{15}$ **D.** $\frac{131\pi}{15}$

Câu 9. Hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2+1$, trục tung và tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^2+1$ tại điểm $(1;2)$. Khi quay hình (H) quanh trục Ox tạo thành khối tròn xoay có thể tích V bằng?

A. $\frac{4\pi}{5}$ **B.** $\frac{28\pi}{15}$ **C.** $\frac{8\pi}{15}$ **D.** π

Câu 10. Ký hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{\sin x-\cos x+m}$, $y=0$, $x=0$ và $x=\frac{\pi}{2}$ với m là tham số thực lớn hơn 2. Tìm m sao cho thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục hoành bằng $\frac{3\pi^2}{2}$?

A. 6   **B.** 4   **C.** 3   **D.** 9

Câu 11. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-\sqrt{x}$, đường thẳng $y=-x+2$ và trục hoành. Khối tròn xoay tạo ra khi (H) quay quanh Ox có thể tích V được xác định bằng công thức nào sau đây ?

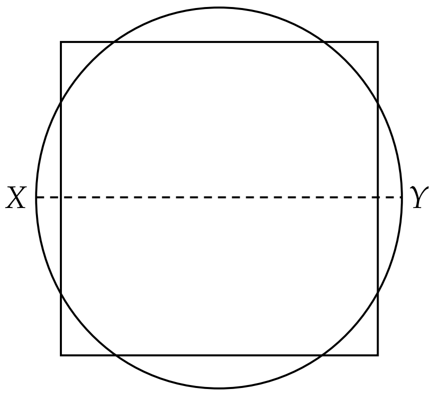
A. $V=\pi\left[\int_0^2 x\,dx+\int_2^4 (2-x)^2\,dx\right].$ **B.** $V=\pi\left[\int_0^2 x\,dx-\int_2^4 (2-x)^2\,dx\right].$

C. $V=\pi\left[\int_0^2 x\,dx+\int_2^4 (x-2)^2\,dx\right].$ **D.** $V=\pi\left[\int_0^4 x\,dx-\int_2^4 (2-x)^2\,dx\right].$

Câu 12. Tính thể tích V của khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường tròn $(C): x^2+(y-3)^2=1$ quanh trục hoành ?

A. $V=6\pi.$ **B.** $V=6\pi^3.$ **C.** $V=3\pi^2.$ **D.** $V=6\pi^2.$

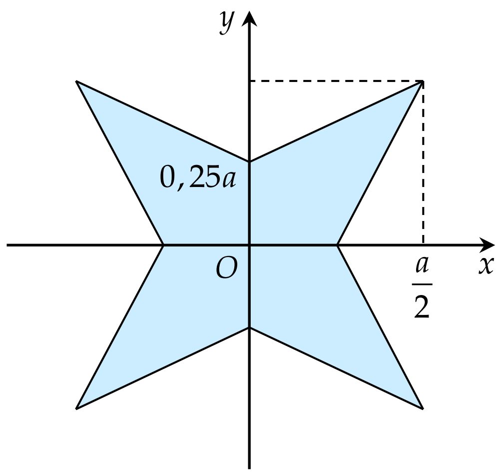
Câu 13. Cho hình vuông có độ dài cạnh bằng 8cm và một hình tròn có bán kính 5cm được xếp chồng lên nhau sao cho tâm của hình tròn trùng với tâm của hình vuông như hình vẽ bên. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay tạo thành khi quay mô hình trên quanh trục XY.



A. $V=\frac{260\pi}{3}\text{cm}^3.$ **B.** $V=\frac{290\pi}{3}\text{cm}^3.$

C. $V=\frac{520\pi}{3}\text{cm}^3.$ **D.** $V=\frac{580\pi}{3}\text{cm}^3.$

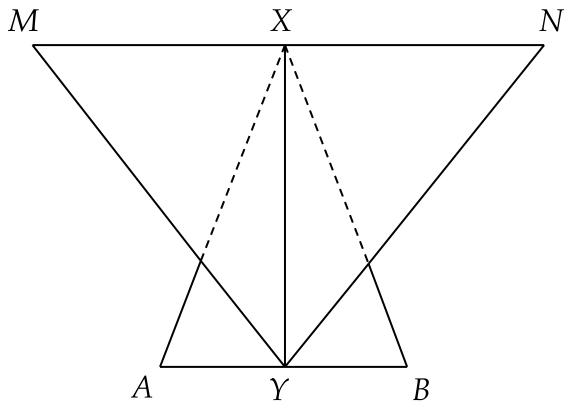
Câu 14. Bên trong hình vuông cạnh a, dựng hình sao bốn cánh đều như hình vẽ bên (các kích thước cần thiết cho như ở trong hình). Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình sao đó quanh trục Ox.



A. $V=\frac{5\pi}{48}a^3.$ **B.** $V=\frac{5\pi}{16}a^3.$

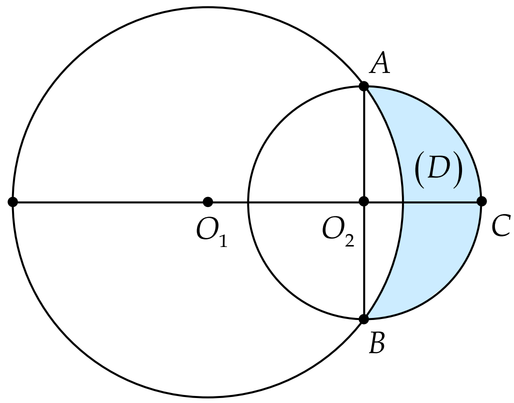
C. $V=\frac{\pi}{6}a^3.$ **D.** $V=\frac{\pi}{8}a^3.$

Câu 15. Cho hai tam giác cân có chung đường cao $XY = 40cm$ và cạnh đáy lần lượt là $40cm$ và $60cm$, được xếp chồng lên nhau sao cho đỉnh của tam giác này là trung điểm cạnh đáy của tam giác kia như hình vẽ bên. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay mô hình trên quanh trục XY ?



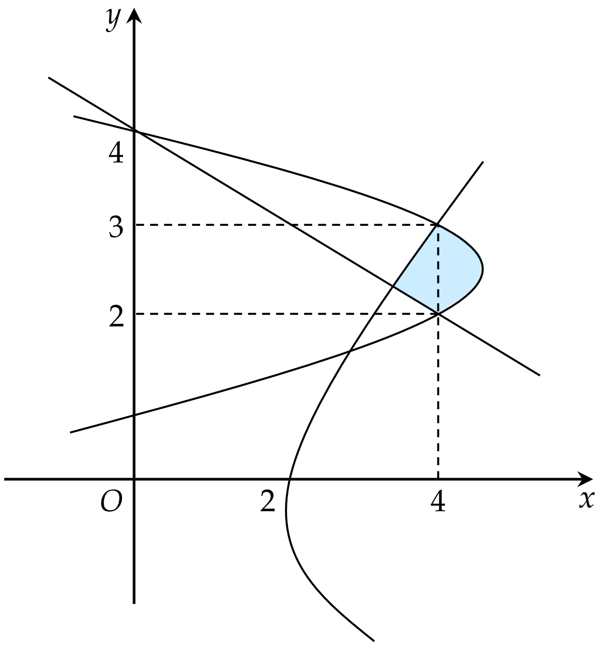
A. $V = \frac{40480\pi}{3} cm^3$. **B.** $V = \frac{52000\pi}{3} cm^3$. **C.** $V = \frac{46240\pi}{3} cm^3$. **D.** $V = 1920\pi cm^3$.

Câu 16. Cho hai đường tròn $(O_1;5)$ và $(O_2;3)$ cắt nhau tại hai điểm A, B sao cho AB là một đường kính của đường tròn $(O_2;3)$. Gọi (D) là hình phẳng được giới hạn bởi hai đường tròn (ở ngoài đường tròn lớn, phần được gạch chéo như hình vẽ). Quay (D) quanh trục O_1O_2 ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành.



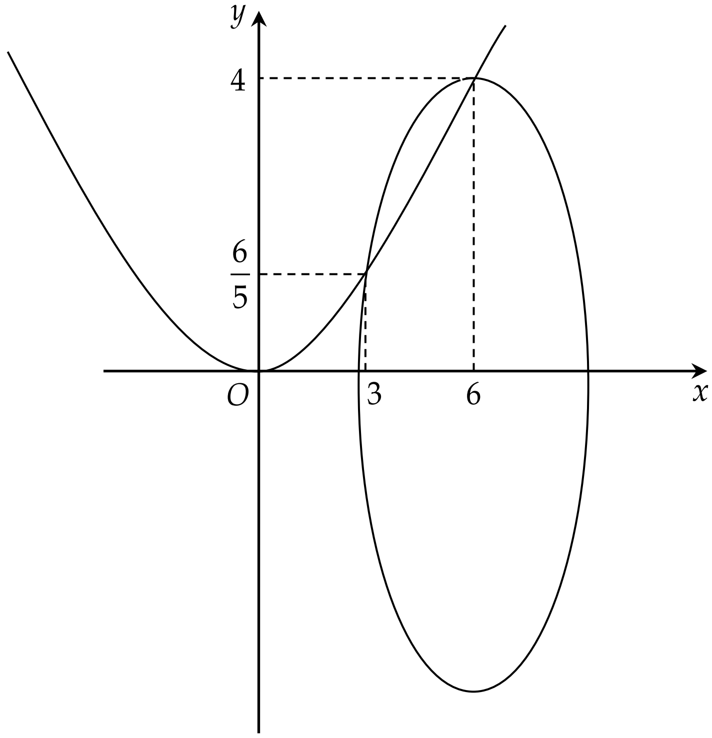
A. $V = 36\pi$ **B.** $V = \frac{68\pi}{3}$ **C.** $V = \frac{14\pi}{3}$ **D.** $V = \frac{40\pi}{3}$

Câu 17. Cho đồ thị hàm số $f(x)$,1 nửa đồ thị hàm số $g(x)$ và đường thẳng $\vartriangle$ như hình vẽ. Tính thể tích phần tô màu khi quay xung quanh Ox ?



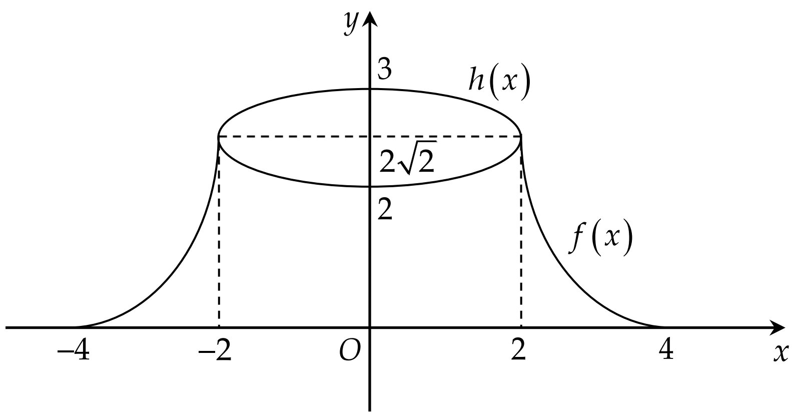
A. 17π **B.** 20π **C.** 15π **D.** 9π

Câu 18. Cho đồ thị hàm số $f(x)$ và elip $h(x)$ như hình vẽ. Tính thể tích khi quay hình tô đậm xung quanh trục Ox. ?



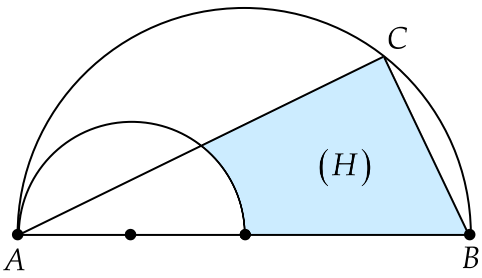
A. 865.344π **B.** 965.344π **C.** 642.344π **D.** 354.344π

Câu 19. Cho hình vẽ. Tính hiện tích hình H ?



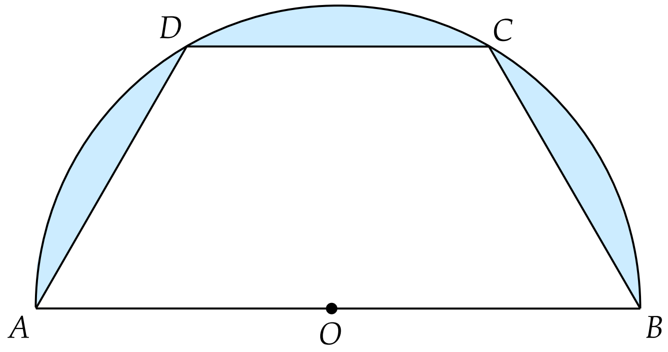
A. $\frac{379}{4}\pi$ **B.** $\frac{523}{6}\pi$ **C.** 95π **D.** $\frac{328}{15}\pi$

Câu 20. Ta vẽ hai nửa đường tròn như hình vẽ bên, trong đó đường kính của nửa đường tròn lớn gấp đôi đường kinh của nửa đường tròn nhỏ. Biết rằng nửa hình tròn đường kính AB có diện tích 8π và $ABC = 30^{o}$. Tính thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) quanh đường thẳng AB ?



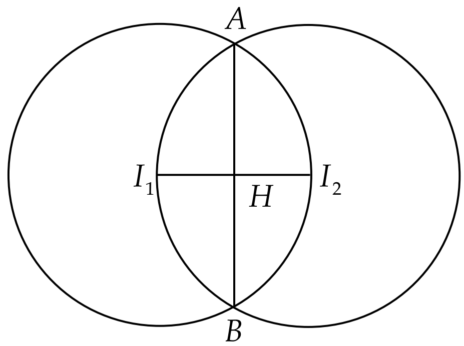
A. $\frac{4}{3}\pi$ **B.** $\frac{2}{3}\pi$ **C.** $\frac{14}{3}\pi$ **D.** $\frac{20}{3}\pi$

Câu 21. Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R = 4$, hai điểm C,D di động trên nửa đường tròn sao cho ABCD là hình thang cân. $CD = 2$, thể tích vật thể tròn xoay tô đậm tạo thành khi quay hình thang cân ABCD quanh trục AB là bao nhiêu?



A. $9{,}5$ **B.** $10{,}2$ **C.** $8{,}2$ **D.** $11{,}4$

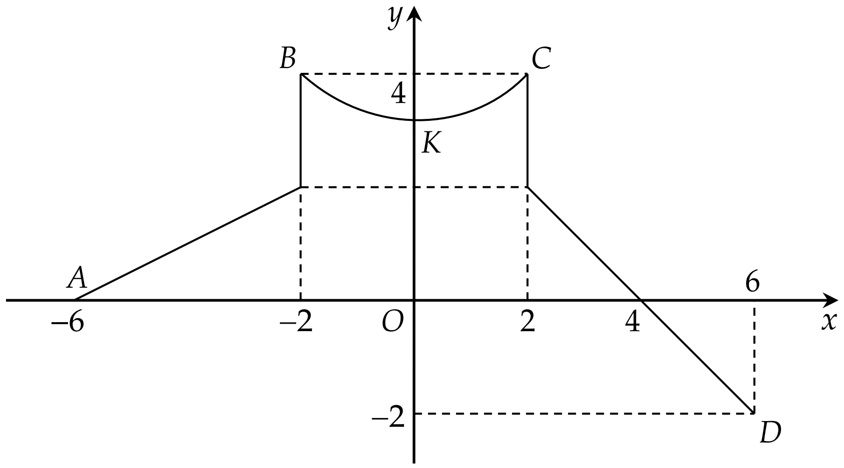
Câu 22. Cho hai mặt cầu cùng bán kính $(S_1),(S_2)$ thoả mãn tâm của (S_1) thuộc (S_2) và ngược lại tâm của (S_2) thuộc (S_1) .Tính thể tích phần chung của hai khối cầu tạo bởi $(S_1),(S_2)$



A. 60^0 **B.** 45^0 **C.** $\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$ **D.** 30^0

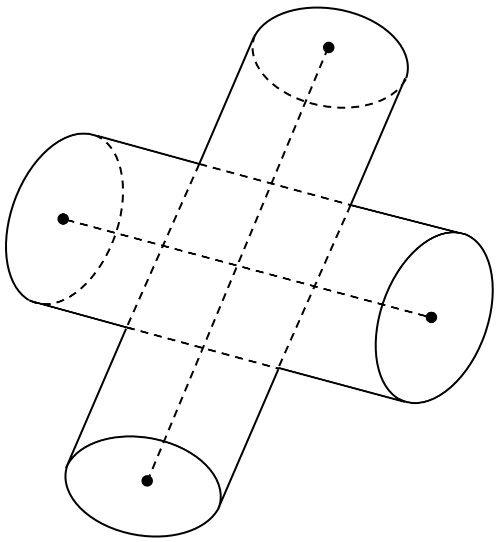
Câu 23. Cho đồ thị hàm số liên tục như hình vẽ. Biết BC là một cung tròn của đường tròn bán kính $R = 4$, tâm I nằm trên Oy (O là trung điểm AD). Tính giá trị của biểu thức tích phân $\int_{-6}^{6} \pi.(f(x)+2)^2\,dx$ ta được kết quả trong khoảng nào?

TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC



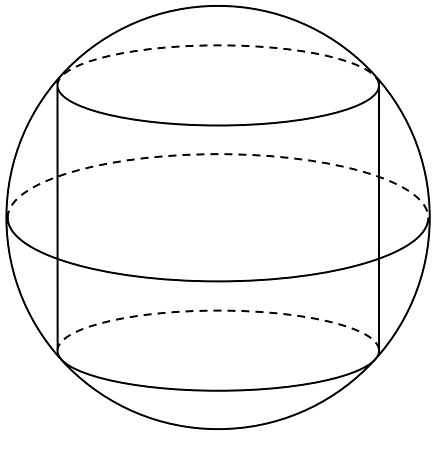
A. $(201;250)$ **B.** $(250;301)$ **C.** $(271;300)$ **D.** $(300;350)$

Câu 24. Cho một khối cầu bán kính R. Đâm thủng khối cầu bởi một khối trụ có trục đi qua tâm mặt cầu và chiều dài hình trụ thu được là 6. Tính thể tích vật thể còn lại sau khi đục thủng ?



A. $\frac{1024}{3}$ **B.** $\frac{1024}{5}$ **C.** $\frac{1024}{9}$ **D.** $\frac{1024}{15}$

Câu 25. Cho một khối cầu bán kính R. Đâm thủng khối cầu bởi một khối trụ có trục đi qua tâm mặt cầu và chiều dài hình trụ thu được là 6. Tính thể tích vật thể còn lại sau khi đục thủng ?



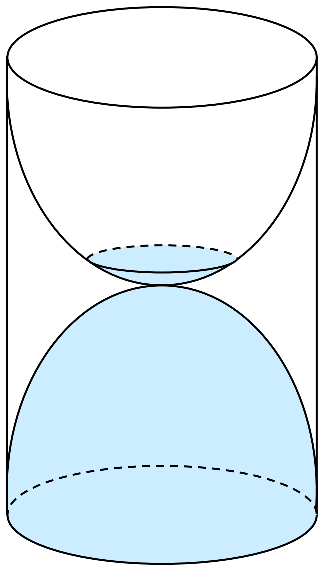
A. 36π. **B.** 42π. **C.** 12π. **D.** 42π.

Câu 26. Cho $(H): \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1, (D)$ là tiếp tuyến của (H) đi qua $A(2;-1)$ với hệ số góc dương. Tính thể tích khối tròn xoay tạo bởi miền phẳng giới hạn bởi (H), (D) và trục Ox khi quay xung quanh trục Oy ?

A. $\dfrac{379}{4}\pi$ **B.** $\dfrac{523}{6}\pi$ **C.** 95π **D.** $\dfrac{328}{15}\pi$

Câu 27. Một chiếc đồng hồ cát có thiết diện qua trục là 2 parapol đối xứng qua mặt nằm ngang. Khi để thẳng đứng và cát không thể chảyvà mực cát của parapol ở trên là 0,2 chiều cao của parapol ở trên. Khi lật ngược đồng hồ các thì lưu lượng cát chảy từ trên xuống dưới không đổi là $3cm^3/p$. Khi chiều cao ở trên là 6 cm thì bề mặt trên tạo thành 1 đường tròn có diện tích $9cm^2$. Biết sau 900s thì cát không còn chảy nữa. Hỏi khi lượng cát chảy xuống dưới bằng chiều cao của parapol thì thể tích cát của phần parapol ở trên là bao nhiêu (coi lượng cát đang chảy không đáng kể) ?

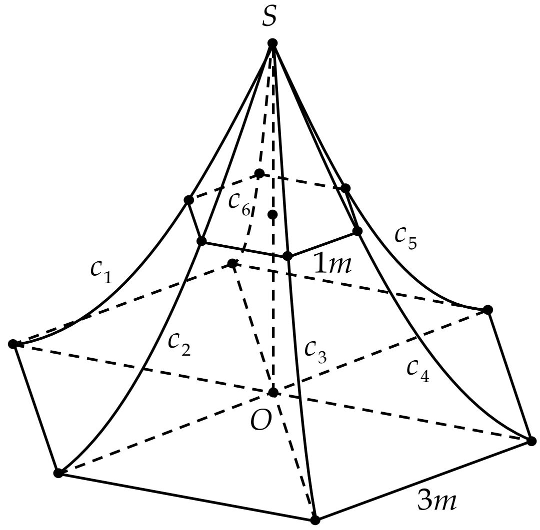
A. 1,8 **B.** 0,65 **C.** 2,8 **D.** 1,39



Câu 28. Cho hai mặt cầu (S_1), (S_2) có cùng bán kính R thỏa mãn tính chất tâm của (S_1) thuộc (S_2) và ngược lại. Tính thể tích phần chung V của hai khối cầu tạo bởi 2 mặt cầu (S_1), (S_2)?

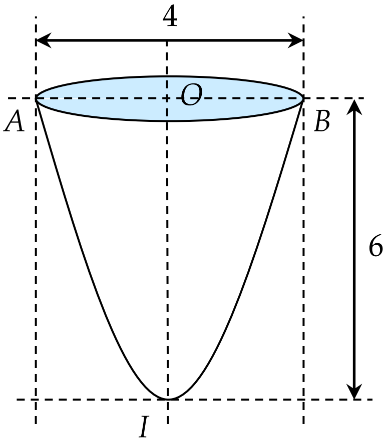
A. $V = \pi R^3$ **B.** $V = \dfrac{\pi R^3}{2}$ **C.** $V = \dfrac{5\pi R^3}{12}$ **D.** $V = \dfrac{2\pi R^3}{5}$

Câu 29. Người ta dựng một cái lều vải (H) có dạng hình "chóp lục giác cong đều" như hình vẽ bên. Đáy của (H) là một hình lục giác đều cạnh $3m$. Chiều cao $SO = 6m$ (SO vuông góc với mặt phẳng đáy). Các cạnh bên của (H) là các sợi dây $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ nằm trên các đường parabol có trục đối xứng song song với SO. Giả sử giao tuyến (nếu có) của (H) với mặt phẳng (P) vuông góc với SO là một lục giác đều và khi (P) qua trung điểm của SO thì lục giác đều có cạnh bằng $1m$. Tính thể tích phần không gian nằm bên trong cái lều (H) đó.



A. $\frac{135\sqrt{3}}{5}(m^3)$ **B.** $\frac{96\sqrt{3}}{5}(m^3)$ **C.** $\frac{135\sqrt{3}}{4}(m^3)$ **D.** $\frac{135\sqrt{3}}{8}(m^3)$

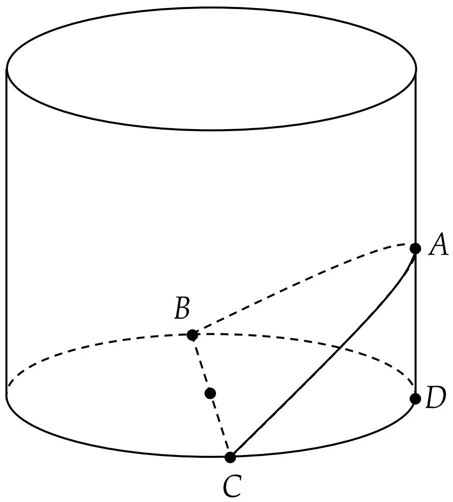
Câu 30. Có một vật thể là hình tròn xoay có dạng giống như một cái ly như hình vẽ dưới đây. Người ta đo được đường kính của miệng ly là $4cm$ và chiều cao là $6cm$. Biết rằng thiết diện của chiếc ly cắt bởi mặt phẳng đối xứng là một parabol. Tính thể tích $V(cm^3)$ của vật thể đã cho.



A. $V = 12\pi$. **B.** $V = 12$.

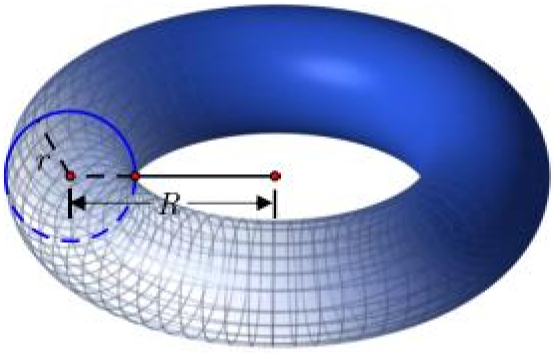
C. $V = \frac{72}{5}\pi$. **D.** $V = \frac{72}{5}$.

Câu 31. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R. Tính thể tích vật thể tạo thành bởi đáy của hình trụ và mặt phẳng qua đường kính đáy, biết mặt phẳng tạo với đáy một góc 45^0.



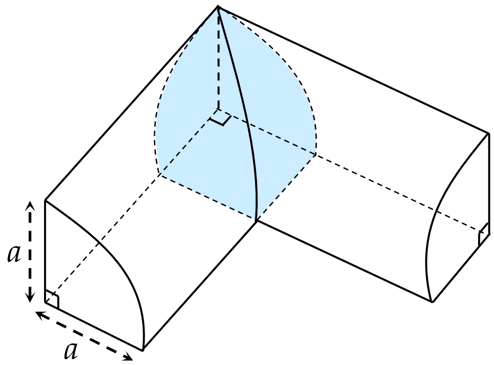
A. $V = \frac{8R^3}{3}$. **B.** $V = \frac{2\pi R^3}{3}$. **C.** $V = \frac{2R^3}{3}$. **D.** $V = \frac{8\pi R^3}{3}$.

Câu 32. Một hình xuyến dạng cái phao có kích thước như hình vẽ. Tính thể tích của hình đó theo R và r.



A. $V = 2\pi^2 r^2 R$. **B.** $V = 2\pi^2 r R^2$. **C.** $V = \pi^2 r^2 R$. **D.** $V = \pi^2 r R^2$.

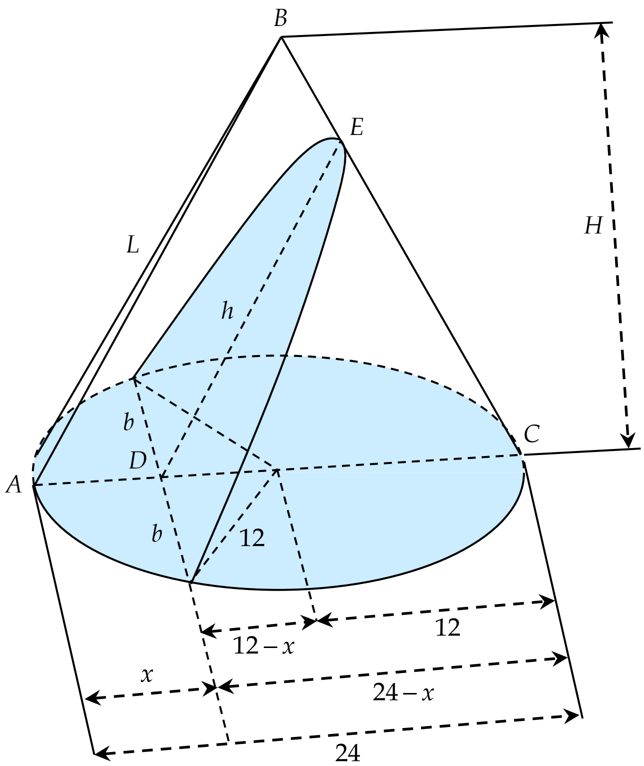
Câu 33. Gọi (H) là phần giao của hai khối $\frac{1}{4}$ hình trụ có bán kính a, hai trục hình trụ vuông góc với nhau. Xem hình vẽ bên. Tính thể tích của (H).



A. $V_{(H)} = \frac{2a^3}{3}$. **B.** $V_{(H)} = \frac{3a^3}{4}$.

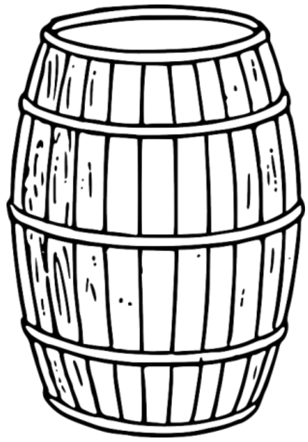
C. $V_{(H)} = \frac{a^3}{2}$. **D.** $V_{(H)} = \frac{\pi a^3}{4}$.

Câu 34. Khi cắt hình nón có chiều cao 16 cm và đường kính đáy 24 cm bởi một mặt phẳng song song với đường sinh của hình nón ta thu được thiết diện là một hình Parabol có diện tích lớn nhất bằng?



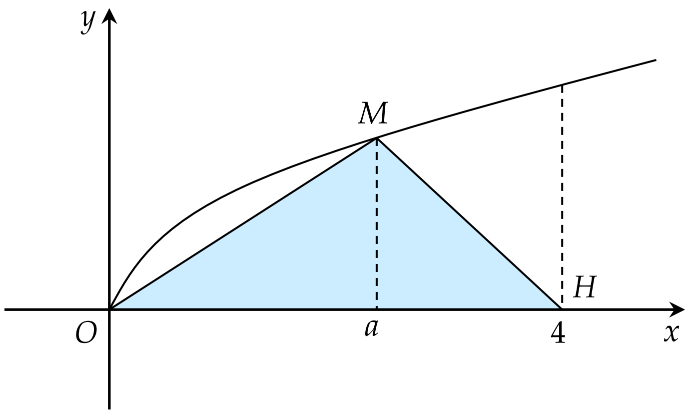
A. $120\sqrt{2}\ \text{cm}^2$ **B.** $120\sqrt{6}\ \text{cm}^2$ **C.** $120\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ **D.** $150\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

Câu 35. Một thùng rượu có bán kính các đáy là 30cm, thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy có bán kính là 40cm, chiều cao thùng rượu là 1m (hình vẽ). Biết rằng mặt phẳng chứa trục và cắt mặt xung quanh thùng rượu là các đường parabol, hỏi thể tích của thùng rượu (đơn vị lít) là bao nhiêu ?



A. $425,2$. **B.** 425162.
C. 212581. **D.** $212,6$.

Câu 36. Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, $y=0$ và $x=4$ quanh trục Ox. Đường thẳng $x=a\ (0<a<4)$ cắt đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ tại M (hình vẽ bên). Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox. Biết rằng $V=2V_1$. Khi đó:

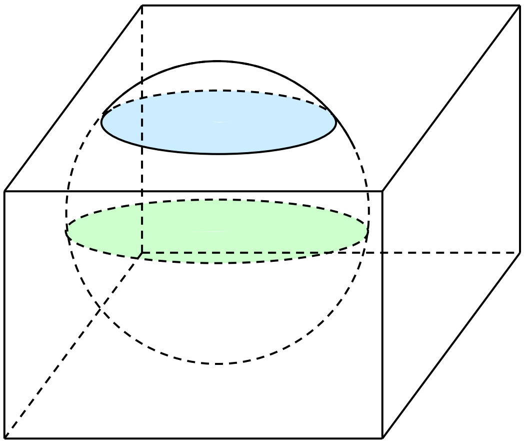


A. 2 **B.** $2\sqrt{2}$ **C.** $\dfrac{5}{2}$ **D.** 3

Câu 37. Cho khối trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O;R)$ và $(O';R)$, $OO'=4R$. Trên đường tròn $(O;R)$ lấy hai điểm A, B sao cho $AB=a\sqrt{3}$. Mặt phẳng (P) đi qua A, B cắt đoạn OO' và tạo với đáy một góc $60°$, (P) cắt khối trụ theo thiết diện là một phần của elip. Diện tích thiết diện đó bằng?

A. $\left(\dfrac{4\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$ **B.** $\left(\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$ **C.** $\left(\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$ **D.** $\left(\dfrac{4\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$

Câu 38. Đặt quả bóng hình cầu vào trong một cái hộp với kích thước chiều dài, chiều rộng, chiều cao của hình hộp tương ứng là 12cm, 12cm, 10cm như hình vẽ, quả bóng có bán kính $R=6\text{cm}$ .Thể tích phần trong hộp và phần nhô lên của quả bóng xấp xỉ bao nhiêu ?

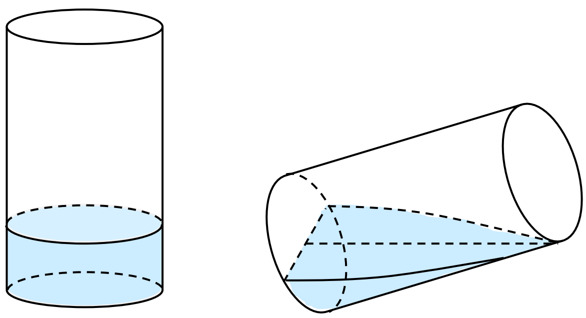


A. 1208 **B.** 1530 C. 1270 **D.** 1507

Câu 39. Một cái thùng đựng dầu có thiết diện ngang (mặt trong của thùng) là một đường elip có trục lớn bằng 1m, trục bé bằng $0{,}8\text{m}$, chiều dài (mặt trong của thùng) bằng 3m. Đươc đặt sao cho trục bé nằm theo phương thẳng đứng (như hình bên). Biết chiều cao của dầu hiện có trong thùng (tính từ đáy thùng đến mặt dầu) là $0{,}6\text{m}$. Tính thể tích V của dầu có trong thùng (Kết quả làm tròn đến phần trăm).

A. $V = 1{,}52\text{m}^3$ **B.** $V = 1{,}31\text{m}^3$ **C.** $V = 1{,}27\text{m}^3$ **D.** $V = 1{,}19\text{m}^3$

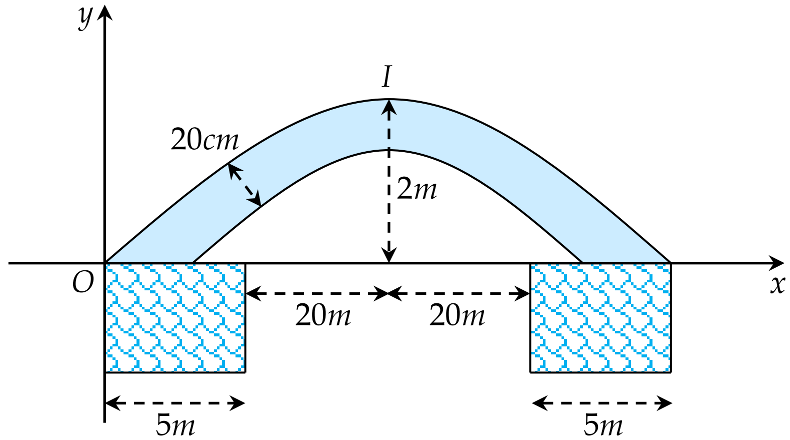
Câu 40. Có một cốc thủy tinh hình trụ, bán kính trong lòng đáy cốc là $6\,\text{cm}$, chiều cao trong lòng cốc là $10\,\text{cm}$ đang đựng một lượng nước. Tính thể tích lượng nước trong cốc, biết khi nghiêng cốc nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì ở đáy mực nước trùng với đường kính đáy.



A. $240\,\text{cm}^3$ **B.** $240\pi\,\text{cm}^3$ C. $120\,\text{cm}^3$ **D.** $120\pi\,\text{cm}^3$

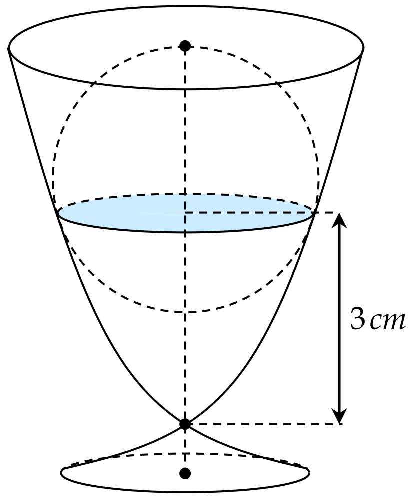
Câu 41. Thành phố định xây cây cầu bắc ngang con sông dài 500m, biết rằng người ta định xây cầu có 10 nhịp cầu hình dạng parabol,mỗi nhịp cách nhau 40m,biết 2 bên đầu cầu và giữa mối nhịp nối người ta xây 1 chân trụ rộng 5m. Bề dày nhịp cầu không đổi là 20cm.

Biết 1 nhịp cầu như hình vẽ. Hỏi lượng bê tông để xây các nhịp cầu là bao nhiêu (bỏ qua diện tích cốt sắt trong mỗi nhịp cầu)



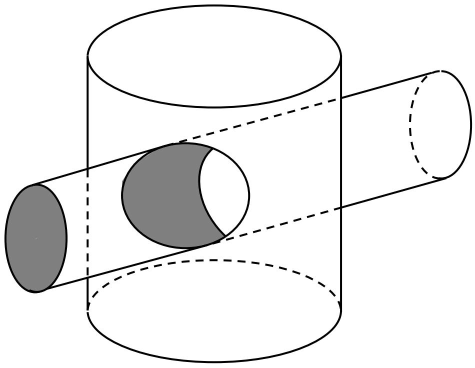
A. $20m^3$ **B.** $50m^3$ **C.** $40m^3$ **D.** $100m^3$

Cây 42.Một chiếc ly bằng thủy tinh đang chứa nước bên trong được tạo thành bằng cách quay đồ thị $y = 2^x$ quanh trục tung. Người ta thả vào ly một quả cầu có bán kính R thì mực nước dâng lên phủ kín quả cầu và đồng thời chạm tới miệng ly. Biết điểm tiếp xúc của quả cầu và chiếc ly cách đáy $3cm$. Thể tích nước trong ly gần nhất với giá trị nào ?



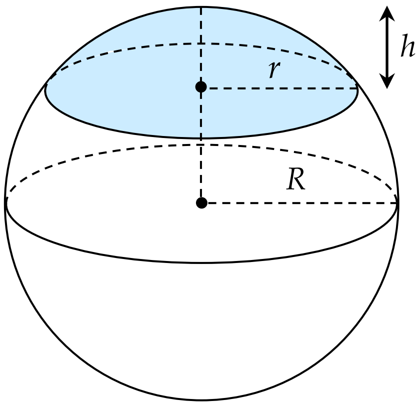
A. $20m^3$ **B.** $30m^3$ **C.** $40m^3$ **D.** $100m^3$

Câu 43. Cắt 2 khối trụ bằng sắt xuyên qua nhau như hình vẽ dưới. Khối trụ đứng có bán kính đáy $R = 10cm$, khối trụ ngang có bán kính đáy $r = 6cm$. Biết rằng trụ của hai khối trụ cắt và vuông góc với nhau tại chính giữa của mỗi hình. Tính thể tích phần chung của 2 khối trụ đó?



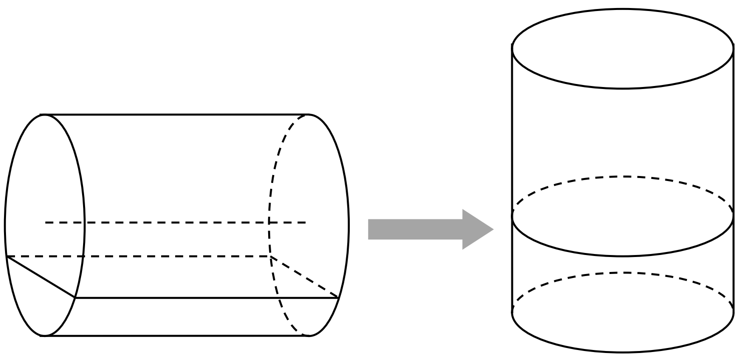
A. $2154.96\left(cm^3\right)$ **B.** $1077.48\left(cm^3\right)$ **C.** $4309.92\left(cm^3\right)$ **D.** $3385\left(cm^3\right)$

Câu 43. Cho một khối chỏm cầu (S) có bán kính R và chiều cao h. Tính thể tích của khối chỏm S.



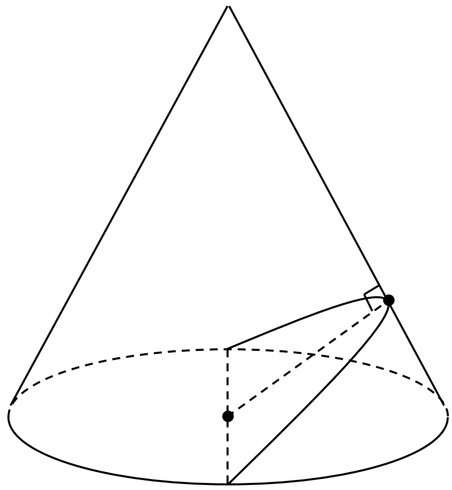
A. $V=\pi h^2\left(R+\dfrac{h}{3}\right)$ **B.** $\pi h^2\left(R-\dfrac{h}{3}\right)$ **C.** $\pi h^2\left(R+\dfrac{h}{2}\right)$ **D.** $\pi h^2\left(R-\dfrac{h}{2}\right)$

Câu 44. Một thùng đựng nước có dạng hình trụ có chiều cao h và bán kính đáy bằng R. Khi đặt thùng nước nằm ngang như hình 1 thì khoảng cách từ trục hình trụ tới mặt nước bằng $\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ (mặt nước thấp hơn trục của hình trụ). Khi đặt thùng nước thẳng đứng như hình 2 thì chiều cao của mực nước trong thùng là . Tính tỉ số $\dfrac{h_1}{h}$?



A. $\dfrac{2\pi-3\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\dfrac{\pi-\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\dfrac{2\pi-\sqrt{3}}{12}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

Câu 45. Một khối nón (N) có bán kính đáy r, thiết diện qua đỉnh và vuông góc với mặt phẳng đáy là một tam giác đều. Cắt khối nón bởi một mặt phẳng đi qua đường kính đáy và vuông góc với đường sinh của khối nón để lấy một cái nêm (xem hình vẽ).



A. $V=\dfrac{r^3}{2\sqrt{3}}$ **B.** $V=\dfrac{r^3}{\sqrt{3}}$ **C.** $V=\dfrac{\pi r^3}{2\sqrt{3}}$ **D.** $V=\dfrac{\pi r^3}{\sqrt{3}}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

Cho hình phẳng *D* giới hạn bởi các đường $y^2 = 4x$ và đường thẳng $x = 4$. Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi *D* xoay quanh trục *Ox* là

A. 32π **B.** 64π **C.** 16π **D.** 4π

Lời giải

Giao điểm của đường $y^2 = 4x$ với trục hoành là : $O(0;0)$.

Phần phía trên Ox của đường $y^2 = 4x$ có phương trình $y = 2\sqrt{x}$.

Suy ra thể tích khối tròn xoay sinh ra khi *D* xoay quanh trục *Ox* là: $V = \int_0^4 \pi.\left(2\sqrt{x}\right)^2 dx = 32\pi$

Chọn ý **A.**

Câu 2.

Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \ln x,\ y = 0,\ x = 2$ quay xung quanh trục *Ox*. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng?

A. $2\ln^2 2 - 4\ln 2 + 2$ **B.** $\pi\left(2\ln^2 2 + 4\ln 2 - 2\right)$

C. $2\pi\left(\ln^2 2 - 2\ln 2 + 1\right)$ **D.** $\pi\left(2\ln 2 - 1\right)$

Lời giải

Tọa độ giao điểm của hai đường $y = \ln x$ và $y = 0$ là điểm $C(1;0)$.

Nên thể tích của khối tròn xoay cần tính là $V = \int_1^2 \pi.\ln^2 x dx$.

Đặt $\begin{cases} u = \pi\ln^2 x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{2\pi\ln x}{x}dx \\ v = x \end{cases}$. Suy ra $V = \pi x\ln^2 x\Big|_1^2 - 2\pi\int_1^2 \ln x dx = 2\pi\ln^2 2 - 2\pi I$.

Tính $I = \int_1^2 \ln x dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dx = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = x \end{cases}$. Nên $I = x\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 dx = 2\ln 2 - 1$.

Vậy $V = 2\pi\ln^2 2 - 2\pi\left(2\ln 2 - 1\right) = 2\pi\left(\ln^2 2 - 2\ln 2 + 1\right)$.

Chọn ý **C.**

Câu 3.

Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = a.x^2,\ y = bx\ (a, b \neq 0)$ quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng?

A. $V = \pi.\dfrac{b^3}{a^3}\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5}\right)$ **B.** $V = \pi.\dfrac{b^5}{5a^3}$ **C.** $V = \pi.\dfrac{b^5}{3a^3}$ **D.** $V = \pi.\dfrac{b^5}{a^3}\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5}\right)$

Lời giải

Tọa độ giao điểm của hai đường $y = ax^2$ và $y = bx$ là các điểm $O(0;0)$ và $A\left(\frac{b}{a};\frac{b^2}{a}\right)$.

Vậy thể tích của khối tròn xoay cần tính là: $V = \int_0^{\frac{b}{a}} \pi.b^2x^2dx - \int_0^{\frac{b}{a}} \pi.a^2x^4dx = \pi.\frac{b^5}{a^3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$

Chọn ý **D.**

Câu 4.

Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 - 6x^2 + 9x$, $y = 0$ quay xung quanh trục *Ox*. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng?

A. $\frac{729\pi}{35}$ **B.** $\frac{27\pi}{4}$ **C.** $\frac{256608\pi}{35}$ **D.** $\frac{7776\pi}{5}$

Lời giải

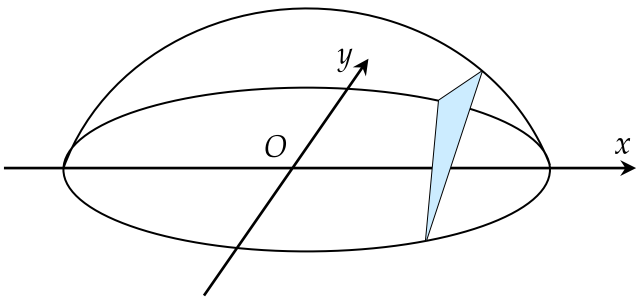
Tọa độ giao điểm của đường $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ với $y = 0$ là các điểm $O(0;0)$ và $A(3;0)$.

Vậy thể tích của khối tròn xoay cần tính là: $V = \int_0^3 \pi\left(x^3 - 6x^2 + 9x\right)^2 dx = \frac{729\pi}{35}$.

Chọn ý **A.**

Câu 5.

Một vật có kích thước và hình dáng như hình vẽ dưới đây. Đáy là hình tròn giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 = 16$ (nằm trong mặt phẳng Oxy), cắt vật bởi các mặt phẳng vuông góc với trục Ox ta được thiết diện là tam giác đều. Thể tích của vật thể là?



A. $V = \frac{256\sqrt{3}}{3}$. **B.** $V = \frac{256}{3}$. **C.** $V = \frac{32\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V = \frac{32}{3}$.

Lời giải

Giao điểm của thiết diện và Ox là H. Đặt $OH = x$ suy ra cạnh của thiết diện là $2\sqrt{16 - x^2}$.

Diện tích thiết diện tại H là $S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}4\left(16 - x^2\right)$.

Vậy thể tích của vật thể là $V = \int_{-4}^{4} \sqrt{3}\left(16 - x^2\right)dx = \frac{256\sqrt{3}}{3}$.

Câu 6.

Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x^2$, $y^2 = 4x$ quay xung quanh trục *Ox*. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng ?

A. $V = \frac{88\pi}{5}$. **B.** $V = \frac{9\pi}{70}$. **C.** $V = \frac{4\pi}{3}$. **D.** $V = \frac{6\pi}{5}$.

Lời giải

Với $x \in [0;2]$ thì $y^2 = 4x \Leftrightarrow y = \sqrt{4x}$

Tọa độ giao điểm của đường $y = 2x^2$ với $y^2 = 4x$ là các điểm $O(0;0)$ và $A(1;2)$. Vậy thể tích của khối tròn xoay cần tính là: $V = \pi\int_0^1 \left|\left(2x^2\right)^2 - 4x\right| dx = \pi\int_0^1 \left(4x - 4x^2\right) dx = \frac{6\pi}{5}$.

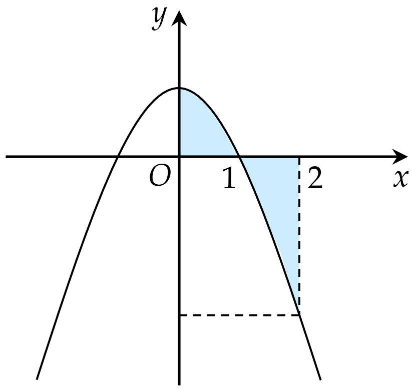
Chọn ý **A.**

Câu 7.

Thể tích khối tròn xoay được giới hạn bởi các đường $y = \left(1 - x^2\right)$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 2$ khi quay quanh trục Ox bằng?

A. $\frac{8\pi\sqrt{2}}{3}$ **B.** 2π **C.** $\frac{46\pi}{15}$ **D.** $\frac{5\pi}{2}$

Lời giải



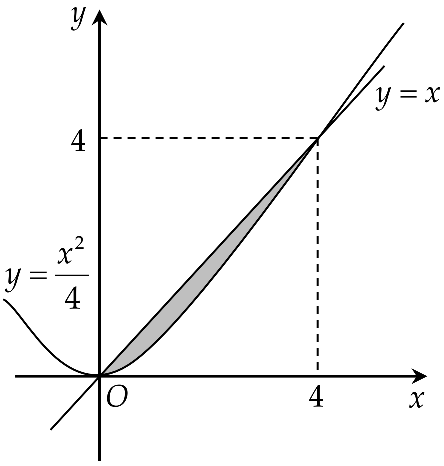
Thể tích khối tròn xoay được giới hạn bởi các đường $y = \left(1 - x^2\right)$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 2$ khi quay quanh trục Ox là: $V = \pi\int_0^2 \left(1 - x^2\right)^2 dx = \pi\int_0^2 \left(1 - 2x^2 + x^4\right) dx = \pi\left(x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2 = \frac{46}{15}\pi$.

Câu 8.

Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{4}$. và $y = x$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành ?

A. $\frac{124\pi}{15}$ **B.** $\frac{126\pi}{15}$ **C.** $\frac{128\pi}{15}$ **D.** $\frac{131\pi}{15}$

Lời giải



Thể tích cần tính $V=\pi\int\limits_0^4\left|\left(\frac{x^2}{4}\right)^2-x^2\right|dx=\frac{128\pi}{15}$.

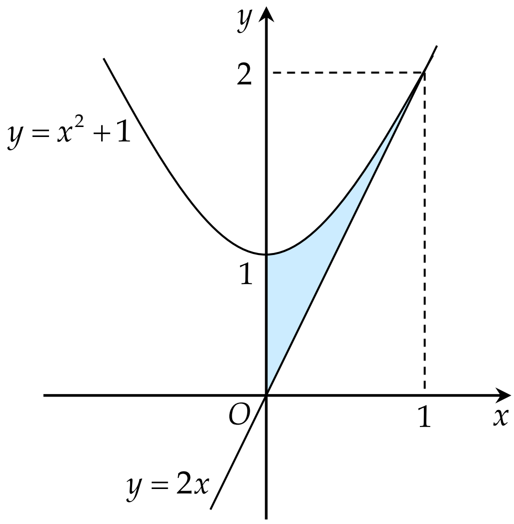
Chọn ý **C.**

Câu 9.

Hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2+1$, trục tung và tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^2+1$ tại điểm $(1;2)$. Khi quay hình (H) quanh trục Ox tạo thành khối tròn xoay có thể tích V bằng?

A. $\frac{4\pi}{5}$ **B.** $\frac{28\pi}{15}$ **C.** $\frac{8\pi}{15}$ **D.** π

Lời giải



Tiếp tuyến của đồ thị $y=x^2+1$ tại điểm $(1;2)$ có phương trình $y=2x$.

Thể tích cần tính $V=\pi\int\limits_0^1\left|\left(x^2+1\right)^2-(2x)^2\right|dx$

$=\pi\int\limits_0^1\left|x^4-2x^2+1\right|dx=\pi\int\limits_0^1\left(x^4-2x^2+1\right)dx=\frac{8\pi}{15}$.

Chọn ý **C.**

Câu 10.

Ký hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{\sin x-\cos x+m}$, $y=0$, $x=0$ và $x=\frac{\pi}{2}$ với m là tham số thực lớn hơn 2. Tìm m sao cho thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục hoành bằng $\frac{3\pi^2}{2}$?

A. 6 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 9

Lời giải

Thể tích cần tính $V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{\sin x-\cos x+m}\right)^2dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x+m)dx$

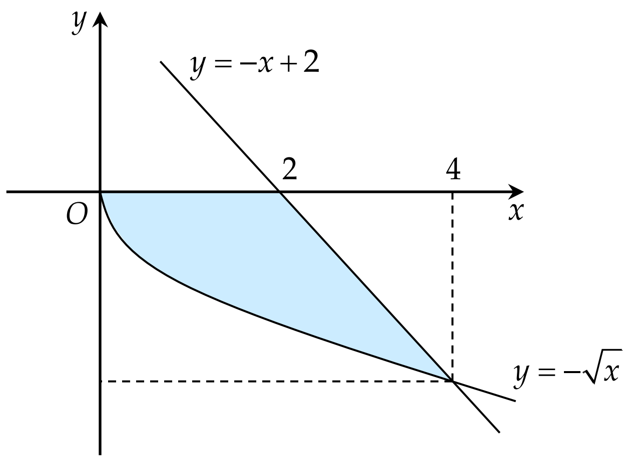
$$=\pi(-\cos x-\sin x+mx)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi\left(-1+\frac{m\pi}{2}\right)-\pi(-1)=\frac{m\pi^2}{2}.$$

Theo giả thiết $V=\frac{3\pi^2}{2}\Leftrightarrow\frac{m\pi^2}{2}=\frac{3\pi^2}{2}\Leftrightarrow m=3$ (thỏa mãn $m>2$).

Cách Casio. Thể tích cần tính $V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x+m)dx$. Đến đây thử từng giá trị m ở các đáp án vào, đáp án nào cho kết quả $\frac{3\pi^2}{2}$ thì nhận.

Câu 11.

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-\sqrt{x}$, đường thẳng $y=-x+2$ và trục hoành. Khối tròn xoay tạo ra khi (H) quay quanh Ox có thể tích V được xác định bằng công thức nào sau đây ?



A. $V=\pi\left[\int_0^2 x\,dx+\int_2^4(2-x)^2dx\right]$. **B.** $V=\pi\left[\int_0^2 x\,dx-\int_2^4(2-x)^2dx\right]$.

C. $V=\pi\left[\int_0^2 x\,dx+\int_2^4(x-2)^2dx\right]$. **D.** $V=\pi\left[\int_0^4 x\,dx-\int_2^4(2-x)^2dx\right]$.

Lời giải

- Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-\sqrt{x}$, trục hoành, đường thẳng $x=0$, $x=4$ xung quanh trục Ox

$$\Rightarrow V_1=\pi.\int_0^4\left(-\sqrt{x}\right)^2dx=\pi.\int_0^4 x\,dx.$$

- Gọi V_2 là thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x+2$, trục hoành, đường thẳng $x=2$, $x=4$ xung quanh trục Ox

$$\Rightarrow V_2=\pi.\int_2^4(2-x)^2dx.$$

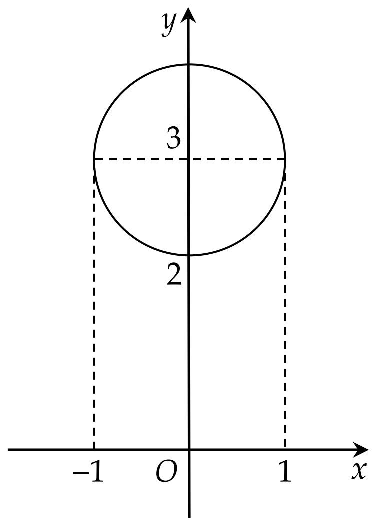
Suy ra thể tích cần tính .

Câu 12.

Tính thể tích V của khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường tròn $(C):x^2+(y-3)^2=1$ quanh trục hoành ?

A. $V=6\pi.$ **B.** $V=6\pi^3.$ **C.** $V=3\pi^2.$ **D.** $V=6\pi^2.$

Lời giải

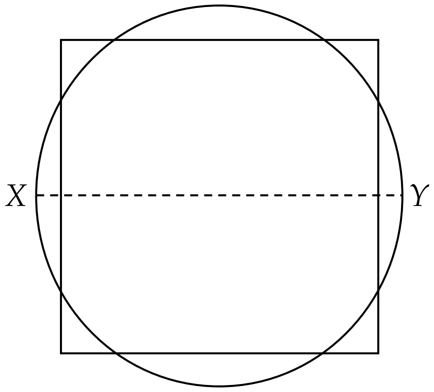


Ta có $x^2+(y-3)^2=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=3+\sqrt{1-x^2}\\y=3-\sqrt{1-x^2}\end{array}\right.$, $x\in[-1;1]$.

Thể tích cần tính $V=\pi\int_{-1}^{1}\left[\left(3+\sqrt{1-x^2}\right)^2-\left(3-\sqrt{1-x^2}\right)^2\right]dx=12\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$ = 59,21762.

Câu 13.

Cho hình vuông có độ dài cạnh bằng 8cm và một hình tròn có bán kính 5cm được xếp chồng lên nhau sao cho tâm của hình tròn trùng với tâm của hình vuông như hình vẽ bên. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay tạo thành khi quay mô hình trên quanh trục XY.



A. $V = \dfrac{260\pi}{3}\text{cm}^3$.	**B.** $V = \dfrac{290\pi}{3}\text{cm}^3$.

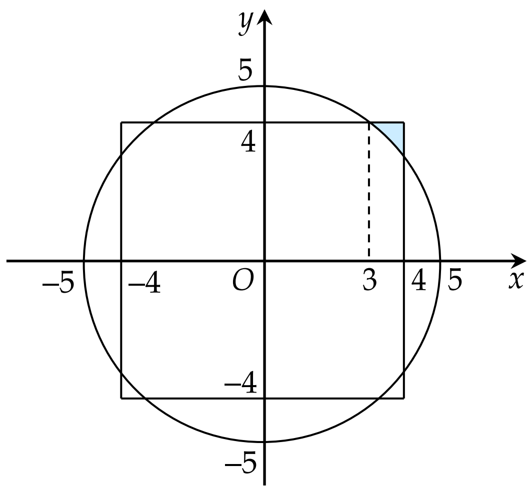
C. $V = \dfrac{520\pi}{3}\text{cm}^3$.	**D.** $V = \dfrac{580\pi}{3}\text{cm}^3$.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

- Thể tích khối cầu $V_1 = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi 5^3 = \dfrac{500\pi}{3}$.
- Gọi V_2 là thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) (phần tô màu) được giới hạn bởi đường thẳng $y = 4$, đường tròn $y^2 = 25 - x^2$ và $x = 4$ quanh trục hoành

$$\Rightarrow V_2 = \pi\int_3^4 \left|4^2 - \left(25 - x^2\right)\right| dx = \frac{10\pi}{3}$$

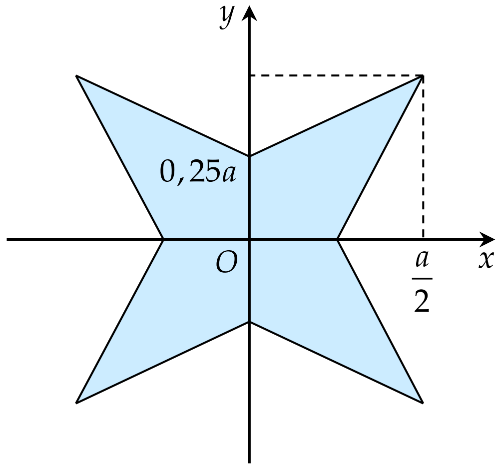


Vậy thể tích cần tính $V = V_1 + 2V_2 = \dfrac{520\pi}{3}\text{cm}^3$.

Chọn ý **C.**

Câu 14.

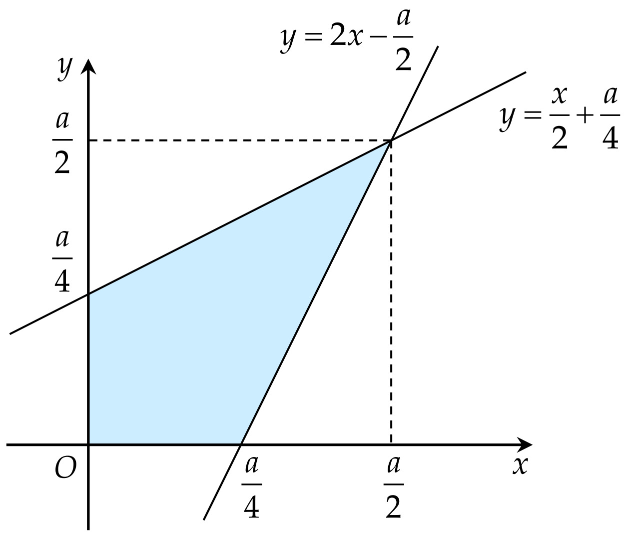
Câu 14. Bên trong hình vuông cạnh a, dựng hình sao bốn cánh đều như hình vẽ bên (các kích thước cần thiết cho như ở trong hình). Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình sao đó quanh trục Ox.



A. $V = \frac{5\pi}{48}a^3$. **B.** $V = \frac{5\pi}{16}a^3$.

C. $V = \frac{\pi}{6}a^3$. **D.** $V = \frac{\pi}{8}a^3$.

Lời giải



Do hình sao có tính đối xứng nên ta quay theo trục thẳng đứng hay nằm ngang đều cho thể tích như nhau. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Gọi V là thể tích khối tròn xoay cần tính.

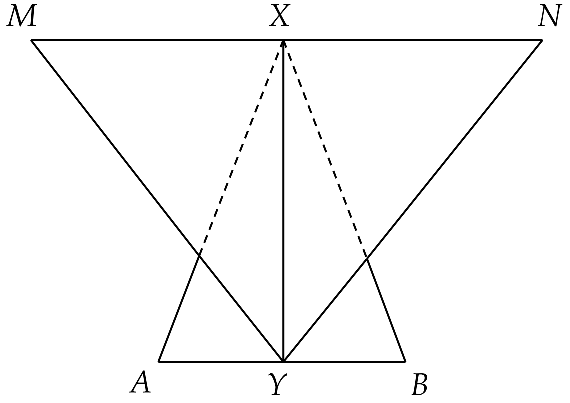
Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng được tô màu trong hình bên quanh trục hoành. Khi đó $V = 2V_1$.

Ta có $V_1 = \pi\int_0^{\frac{a}{2}}\left(\frac{x}{2}+\frac{a}{4}\right)^2 dx - \pi\int_{\frac{a}{4}}^{\frac{a}{2}}\left(2x-\frac{a}{2}\right)^2 dx = \frac{5\pi a^3}{96}$. Suy ra thể tích cần tính $V = 2V_1 = \frac{5\pi a^3}{48}$.

Chọn ý **A.**

Câu 15.

Cho hai tam giác cân có chung đường cao $XY = 40\text{cm}$ và cạnh đáy lần lượt là 40cm và 60cm, được xếp chồng lên nhau sao cho đỉnh của tam giác này là trung điểm cạnh đáy của tam giác kia như hình vẽ bên. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay mô hình trên quanh trục XY ?

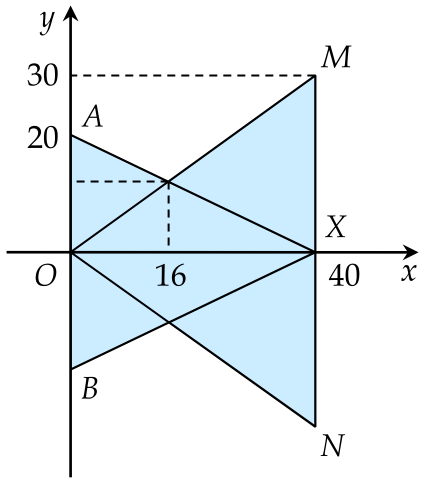


A. $V = \dfrac{40480\pi}{3}\text{cm}^3$. **B.** $V = \dfrac{52000\pi}{3}\text{cm}^3$. **C.** $V = \dfrac{46240\pi}{3}\text{cm}^3$. **D.** $V = 1920\pi\text{cm}^3$.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ:

$Y \equiv O(0;0)$, $X(40;0)$, $A(0;20)$, $M(40;30)$.



Phương trình đường $YM: 3x - 4y = 0 \to y = \dfrac{3x}{4}$.

Phương trình $AX: x + 2y - 40 = 0 \to y = \dfrac{40-x}{2}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường YM và AX là: $\dfrac{3x}{4} = \dfrac{40-x}{2} \leftrightarrow x = 16$.

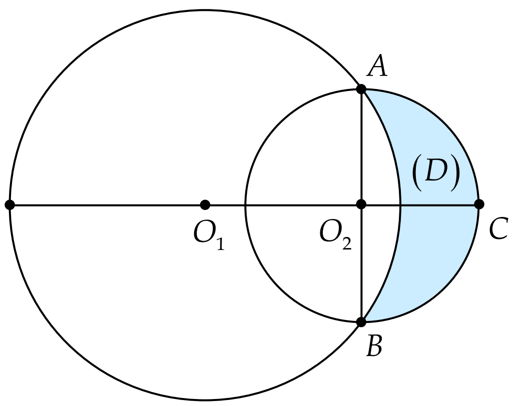
Thể tích vật thể cần tính

$$V = \pi\int_0^{16}\left(\frac{40-x}{2}\right)^2 dx + \pi\int_{16}^{40}\left(\frac{3x}{4}\right)^2 dx = \frac{46240\pi}{3}\text{cm}^3.$$

Chọn ý **C.**

Câu 16.

Cho hai đường tròn $(O_1;5)$ và $(O_2;3)$ cắt nhau tại hai điểm A, B sao cho AB là một đường kính của đường tròn $(O_2;3)$. Gọi (D) là hình phẳng được giới hạn bởi hai đường tròn (ở ngoài đường tròn lớn, phần được gạch chéo như hình vẽ). Quay (D) quanh trục O_1O_2 ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành.



A. $V = 36\pi$ **B.** $V = \dfrac{68\pi}{3}$ **C.** $V = \dfrac{14\pi}{3}$ **D.** $V = \dfrac{40\pi}{3}$

Lời giải

Chọn hệ tọa độ Oxy với $O_2 \equiv O$, $O_2C \equiv Ox$, $O_2A \equiv Oy$.

Cạnh $O_1O_2 = \sqrt{O_1A^2 - O_2A^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \Rightarrow (O_1):(x+4)^2 + y^2 = 25$.

Phương trình đường tròn (O_2): $x^2 + y^2 = 9$.

Kí hiệu (H_1) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{25-(x+4)^2}$, trục Ox, $x=0$, $x=1$.

Kí hiệu (H_2) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{9-x^2}$, trục Ox, $x=0$, $x=3$.

Khi đó thể tích V cần tính chính bằng thể tích V_2 của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H_2) xung quanh trục Ox trừ đi thể tích V_1 của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H_1) xung quanh trục Ox.

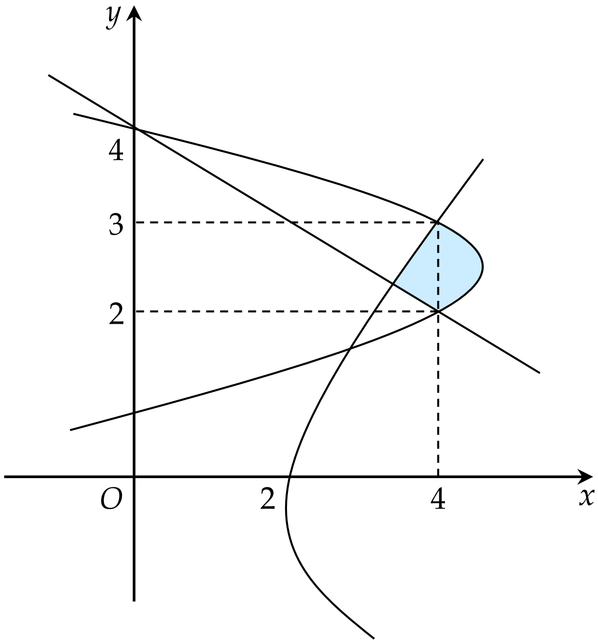
Ta có $V_2 = \frac{1}{2}.\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi.3^3 = 18\pi$.

Lại có $V_1 = \pi\int_0^1 y^2dx = \pi\int_0^1\left[25-(x+4)^2\right]dx = \pi\left[25x - \frac{(x+4)^3}{3}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{14\pi}{3}$.

Do đó $V = V_2 - V_1 = 18\pi - \frac{14\pi}{3} = \frac{40\pi}{3}$.

Câu 17.

Cho đồ thị hàm số $f(x)$,1 nửa đồ thị hàm số $g(x)$ và đường thẳng $\vartriangle$ như hình vẽ. Tính thể tích phần tô màu khi quay xung quanh Ox ?



A. 17π **B.** 20π **C.** 15π **D.** 9π

Lời giải

Phân tích: *3 bài tiếp theo ta sẽ thấy cùng chung phương pháp, ta sẽ phải đi tìm hàm số sau đó tính thể tích khối tròn xoay.*

Chuyển lại hệ trục tọa độ như hình vẽ

Xét hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$, thay các giá trị ta được $\begin{cases}9a-3b+c=4\\16-4b+c=0\\a-b+c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\b=-10\\c=-8\end{cases}$

Xét đường thẳng $\triangle$, thay các giá trị vào $\begin{cases}4=-m+n\\0=-4m+n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=\dfrac{4}{3}\\n=\dfrac{16}{3}\end{cases}$

Xét hàm $g(x)=cx^2+dx+e$, thay các giá trị $\begin{cases}9c-3d+e=4\\e=2\\2c.0+d=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}e=2\\d=0\\c=\dfrac{2}{9}\end{cases}$

Phương trình hoành độ $g(x)$ và Δ là

$$\frac{2}{9}x^2+1=\frac{16}{3}x+\frac{4}{3}\Leftrightarrow x=3-2\sqrt{6}\text{ (do x phải âm)}$$

Thể tích khi quay hình (1) quanh trục Ox là $\pi\int\limits_{-3}^{3-2\sqrt{6}}\left(f(x)^2-g(x)^2\right)dx\approx 7.8\pi$.

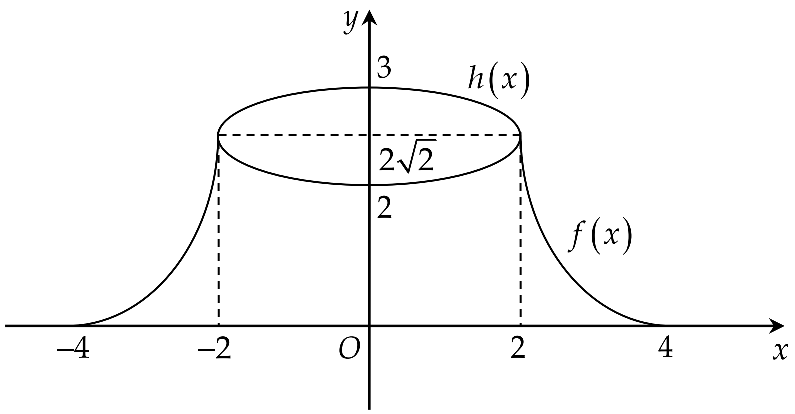
Thể tích khi quay hình (2) quanh trục Ox là $\pi\int\limits_{3-2\sqrt{6}}^{-1}\left|f(x)^2-d(x)^2\right|dx\approx 6.8\pi$.

Thể tích cần tìm gần nhất là 14.6π

Chọn ý **C.**

Câu 18.

Cho hình vẽ. Tính hiện tích hình H ?



A. $\dfrac{379}{4}\pi$ **B.** $\dfrac{523}{6}\pi$ **C.** 95π **D.** $\dfrac{328}{15}\pi$

Lời giải

Xét $f(x)=ax^2+bx+c:\begin{cases}4a+2b+c=2\\16a+4b+c=0\\2a.4+b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\b=-4\\c=8\end{cases}\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-4b+8$. (ta thấy $x=4$ là cực tiểu của $f(x)$)

Thể tích hình giới hạn bởi $f(x),Ox,x=2,x=4$ là $V_1=\pi\int_2^4\left(\dfrac{1}{2}x^2-4x+8\right)^2dx=\dfrac{8}{5}\pi$.

Thể tích khi quay hình chữ nhật xung quanh trục Ox là $V_2=4.\pi.2^2=16\pi$.

Giả sử tịnh tiến trục Ox lên 2 đơn vị, phương trình elip là

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1\Rightarrow y=\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}.$$

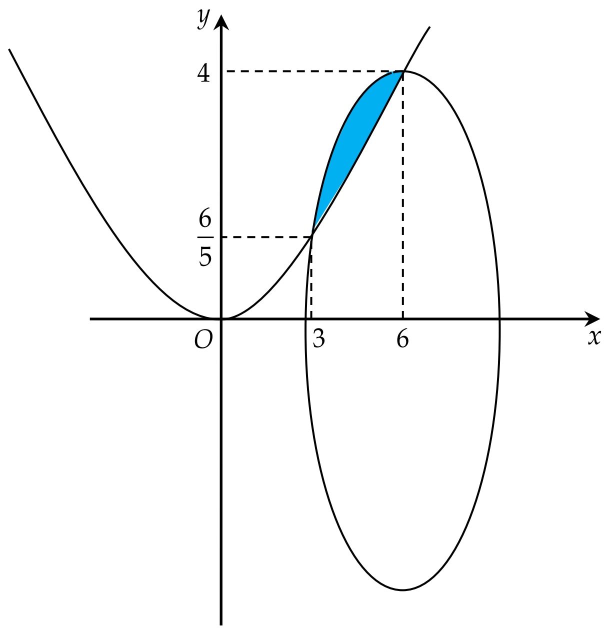
Thể tích hình khi quay nửa elip quanh Ox là $V_3=\pi\int_{-2}^{2}\left(\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)^2dx=\dfrac{8}{3}\pi$.

Thể tích hình H khi quay xung quanh trục Ox là $V=2V_1+V_2+V_3=\dfrac{328}{15}\pi$.

Chọn ý **D.**

Câu 19.

Cho đồ thị hàm số $f(x)$ và elip $h(x)$ như hình vẽ. Tính thể tích khi quay hình tô đậm xung quanh trục Ox. ?



A. 865.344π **B.** 965.344π **C.** 642.344π **D.** 354.344π

Lời giải

Di chuyển Oy sang bên phải 3 đơn vị.

Xét hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$, thay các giá trị ta được

$$\begin{cases} 9a-3b+c=\dfrac{16}{5} \\ c=4 \\ 36a-6b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{2}{15} \\ b=-\dfrac{2}{15} \\ c=4 \end{cases} \Rightarrow f(x)=-\dfrac{2}{15}x^2+4x+4.$$

Thay các giá trị vào phương trình elip $\dfrac{x^2}{m}+\dfrac{y^2}{n}=1$, ta được

$$\begin{cases} 0+\dfrac{4^2}{n^2}=1 \\ \dfrac{3^2}{m^2}+\dfrac{\left(\dfrac{16}{5}\right)^2}{n^2}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=5 \\ n=4 \end{cases} \Rightarrow h(x)=\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1 \Rightarrow y=\dfrac{4}{5}.\sqrt{25-x^2}.$$

Thể tích của khối tròn xoay khi xoay hình được giới hạn bởi $f(x), Ox, x=-6, x=-3$ là

$$V_1=\pi\int_{-6}^{-3}\left(-\dfrac{2}{15}x^2+4x+4\right)^2dx=907.584\pi$$

Thể tích của khối tròn xoay khi xoay hình được giới hạn bởi $h(x), Ox, x=-3, x=0$ là

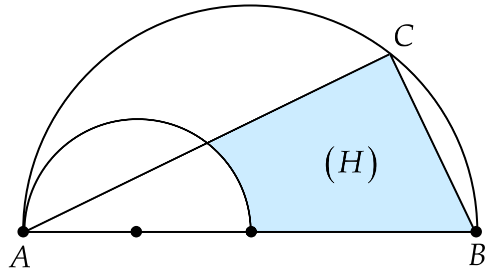
$$V_1=\pi\int_{-3}^{0}\left(\dfrac{4}{5}.\sqrt{25-x^2}\right)^2dx=42.24\pi$$

Thể tích hình cần tìm là $V=V_1-V_2=865.344\pi$

Chọn ý **A.**

Câu 20.

Ta vẽ hai nửa đường tròn như hình vẽ bên, trong đó đường kính của nửa đường tròn lớn gấp đôi đường kinh của nửa đường tròn nhỏ. Biết rằng nửa hình tròn đường kính AB có diện tích 8π và $ABC=30^o$. Tính thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) quanh đường thẳng AB ?



A. $\dfrac{4}{3}\pi$ **B.** $\dfrac{2}{3}\pi$ **C.** $\dfrac{14}{3}\pi$ **D.** $\dfrac{20}{3}\pi$

Lời giải

Phân tích: *Bài này có thể làm bình thường nhưng cũng có thể làm bằng phương pháp tích phân.*

Lấy trục tọa độ O trùng với AB nằm trên Ox, khi đó đường thẳng chứa AC là đường thẳng

$y=\sqrt{3}x$.

Xét 2 đường tròn $(C_1):(x-2)^2+y^2=4$ và $(C_2):(x-4)^2+y^2=16$ và đường thẳng $y=\sqrt{3}x$.

Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C_1) và đường thẳng $y=\sqrt{3}x$ quanh trục Ox là $V_1=\pi\int_0^1\left|\left(3x^2-4+(x-2)^2\right)\right|dx=\frac{2}{3}\pi$

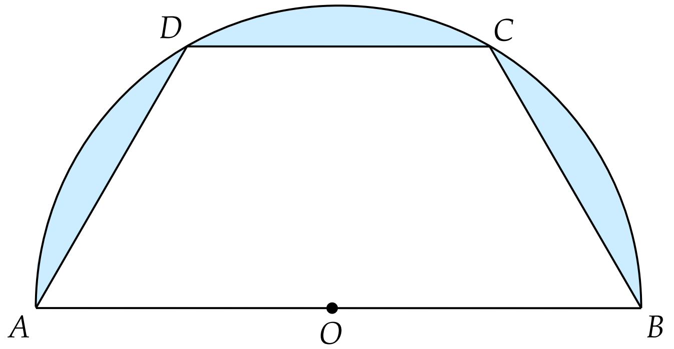
Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C_2) và đường thẳng $y=\sqrt{3}x$ quanh trục Ox là $V_2=\pi\int_0^2\left|3x^2-16+(x-4)^2\right|dx=\frac{16}{3}\pi$

Thể tích cần tìm là $V=V_2-V_1=\frac{14}{3}\pi$

Chọn ý **C.**

Câu 21.

Cho nửa đường tròn đường kính $AB=2R=4$, hai điểm C,D di động trên nửa đường tròn sao cho ABCD là hình thang cân. $CD=2$, thể tích vật thể tròn xoay tô đậm tạo thành khi quay hình thang cân ABCD quanh trục AB là bao nhiêu?



A. 9,5 **B.** 10,2 **C.** 8,2 **D.** 11,4

Lời giải

Chiều cao hình thang là : $\sqrt{2^2-1}=\sqrt{3}$

Thể hình khối hình khi quay hình thang xung quanh trục AB : $V_1=\frac{1}{2}(2+4)\sqrt{2^2-1}=3\sqrt{3}$.

Gọi trung điểm AB là O đồng thời là gốc tọa độ, phương trình đương tròn là :

$$x^2+y^2=R^2\Rightarrow y=\sqrt{R^2-x^2}=\sqrt{4-x^2}.$$

Thể tích của khôi tròn xoay khi quay hình giới hạn bởi đường tròn và đường thẳng $y=3\sqrt{3}$ xung quanh Ox là : $V_2=\pi\int_{-1}^{1}\left(4-x^2-3\right)dx=\frac{4\pi}{3}$.

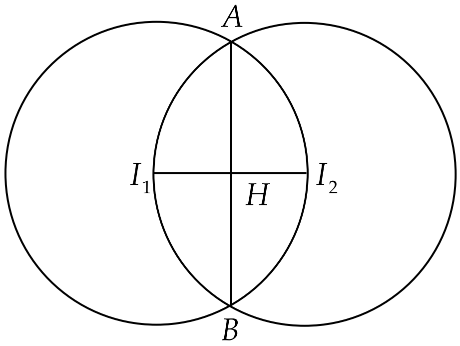
Thể tích khối tròn xoay khi quay nửa đường tròn quanh AB là : $V=\frac{2}{3}\pi R^3=\frac{16\pi}{3}$.

Thể tích khối tròn xoay phải tìm là : $V_3=V-V_1-V_2=4\pi-3\sqrt{3}$.

Chọn ý **A.**

Câu 22.

Cho hai mặt cầu cùng bán kính $(S_1),(S_2)$ thoả mãn tâm của (S_1) thuộc (S_2) và ngược lại tâm của (S_2) thuộc (S_1). Tính thể tích phần chung của hai khối cầu tạo bởi $(S_1),(S_2)$



A. 60^0 **B.** 45^0 **C.** $\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$ **D.** 30^0

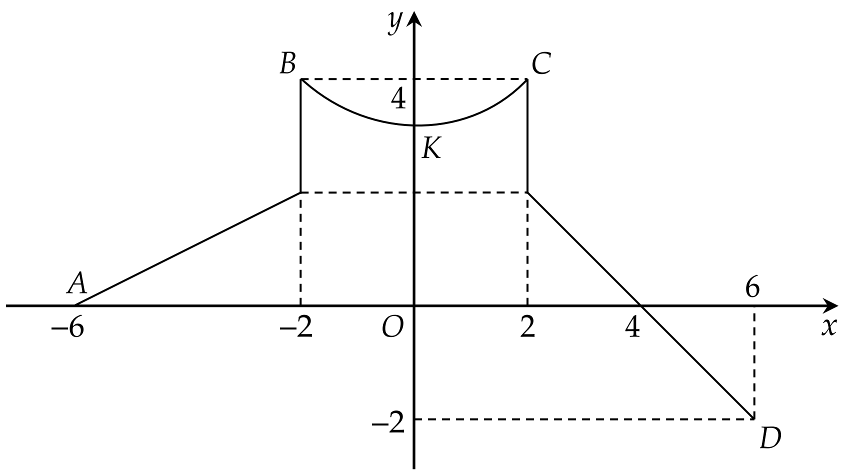
Lời giải

Thể tích phần chung chính là tổng thể tích của 2 khối chỏm cầu bằng nhau có bán kính R, chiều cao $h=\frac{R}{2}$. Xét 1 mặt cầu, gọi tâm hình cầu là O, trục Ox song song với AB, $I_1H=I_2H$, $AH=\sqrt{R^2-\left(\frac{R}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}R$. Thể tích chỏm cầu $\pi\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}R}^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}\left(R^2-x^2-\left(\frac{R}{2}\right)^2\right)dx=\frac{5\pi R^3}{12}$.

Chọn ý **D.**

Câu 23.

Cho đồ thị hàm số liên tục như hình vẽ. Biết BC là một cung tròn của đường tròn bán kính $R=4$, tâm I nằm trên Oy (O là trung điểm AD). Tính giá trị của biểu thức tích phân $\int_{-6}^{6}\pi.\left(f(x)+2\right)^2dx$ ta được kết quả trong khoảng nào?



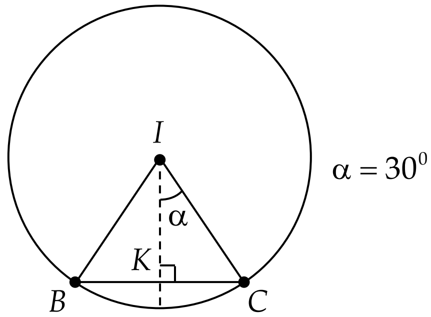
A. $(201;250)$ **B.** $(250;301)$ **C.** $(271;300)$ **D.** $(300;350)$

Lời giải

Ta có $S=\pi\int\limits_{-6}^{6}\left(f(x)+2\right)^2dx=\pi\int\limits_{-6}^{6}\left(f(x)^2+4f(x)+4\right)dx$

$$=\pi\int\limits_{-6}^{6}f(x)^2dx+\pi\int\limits_{-6}^{6}4f(x)dx+\pi\int\limits_{-6}^{6}4dx=I+4\pi.J+48\pi$$

Trước hết ta cần tính thể tích hình khi quay $f(x)$ quanh trục Ox, ta chia thành 4 phần.



Gọi K là giao điểm BC và IO. Vì tam giác IBC đều nên

$BIC=30^0\Rightarrow IK=4.\cos30^0=2\sqrt{3}\Rightarrow IO=2\sqrt{3}+4$. Suy ra I có tọa độ là $\left(0;2\sqrt{3}+4\right)$

Phương trình đường tròn tâm I là

$$x^2+\left(y-2\sqrt{3}-4\right)^2=4^2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=\sqrt{16-x^2}+2\sqrt{3}+4\\y=-\sqrt{16-x^2}+2\sqrt{3}+4\end{array}\right.$$

Nên thể tích khối hình khi quay BC quanh trục Ox giới hạn bởi $x=-2;x=2$ là

$$V_1=\pi\int\limits_{-2}^{2}\left(-\sqrt{16-x^2}+2\sqrt{3}+4\right)^2dx\approx167$$

Lấy phương trình thứ 2 vì cung tròn hướng lên trên

Thể tích khối hình khi quay ME xung quanh trục Ox giới hạn bởi $x=-6;x=-2$ là

$$V_2=\frac{1}{3}.\pi.2^2.4=\frac{16}{3}\pi$$

Thể tích khối hình khi quay NF quanh Ox giới hạn bởi $x=2;x=4$ là

$$V_3=2.\frac{1}{3}.\pi.2^2.2=\frac{16}{3}\pi\Rightarrow I=V_1+V_2+V_3\approx167+\frac{32}{3}\pi$$

Tính diện tích các hình đã chia ta được

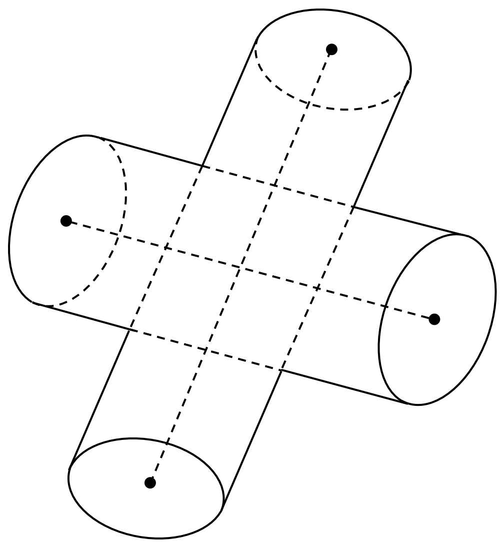
$$J=\frac{1}{2}.2.4+2.\frac{1}{2}.2.2+\int\limits_{-2}^{2}\left(-\sqrt{16-x^2}+2\sqrt{3}+4\right)dx=8-4\sqrt{3}-\frac{8\pi}{3}$$

$$\Rightarrow S=167+\frac{32}{3}\pi+4\pi.\left(8-4\sqrt{3}-\frac{8\pi}{3}\right)+48\pi\approx259$$

Chọn ý **B.**

Câu 24.

Cho một khối cầu bán kính R. Đâm thủng khối cầu bởi một khối trụ có trục đi qua tâm mặt cầu và chiều dài hình trụ thu được là 6. Tính thể tích vật thể còn lại sau khi đục thủng ?



A. $\frac{1024}{3}$ **B.** $\frac{1024}{5}$ **C.** $\frac{1024}{9}$ **D.** $\frac{1024}{15}$

Lời giải

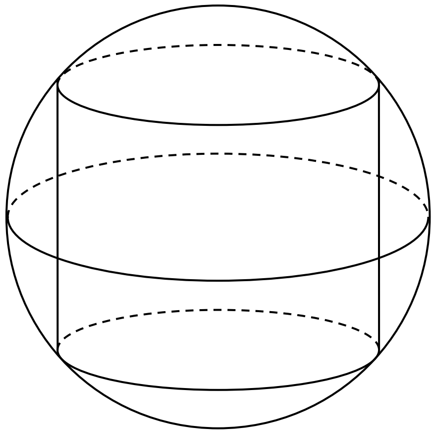
Chọn trục Ox trùng với trục của một mặt trụ và gốc tọa độ tại giao điểm của 2 mặt trụ. Cắt phần chung bởi mặt phẳng vuông góc với Ox tại điểm có hoành độ $x\left(-4 \le x \le 4\right)$ ta được thiết diện là một hình vuông có độ dài cạnh là $2\sqrt{R^2 - x^2} = 2\sqrt{16 - x^2}$.

Do đó diện tích thiết diện là $S\left(x\right) = \left(2\sqrt{16 - x^2}\right)^2 = 4\left(16 - x^2\right)$

Và $V = \int_{-4}^{4} S\left(x\right)dx = \int_{-4}^{4} 4\left(16 - x^2\right)dx = \frac{1024}{3}$

Câu 25.

Cho một khối cầu bán kính R. Đâm thủng khối cầu bởi một khối trụ có trục đi qua tâm mặt cầu và chiều dài hình trụ thu được là 6. Tính thể tích vật thể còn lại sau khi đục thủng ?



A. 36π. **B.** 42π. **C.** 12π. **D.** 42π.

Lời giải

Phân tích: *Sau đây mình sẽ giải theo 2 cách nhé!*

Cách 1. Gọi bán kính hình trụ là r.

Khi đó $r=\sqrt{R^2-9}$ và hai chỏm cầu có chiều cao là $h=R-3$.

Thể tích vật còn lại là

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3-6\pi\left(R^2-9\right)-\frac{\pi(R-3)\left[3\left(R^2-9\right)+(R-3)^2\right]}{3}=36\pi.$$

Cách 2. Nếu gọi tâm hình tròn là tâm O của trục tọa độ Oxy.

Phương trình đường tròn là: $x^2+y^2=R^2\Rightarrow y=\sqrt{R^2-x^2}$

Thể tích phần còn lại quay xung quanh hình trụ là $\pi\int_{-3}^{3}\left(R^2-x^2-R^2+9\right)dx=36\pi$

Chọn ý **A.**

Câu 26.

Cho $(H):\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1,(D)$ là tiếp tuyến của (H) đi qua $A(2;-1)$ với hệ số góc dương. Tính thể tích khối tròn xoay tạo bởi miền phẳng giới hạn bởi (H), (D) và trục Ox khi quay xung quanh trục Oy ?

A. $\frac{379}{4}\pi$ **B.** $\frac{523}{6}\pi$ **C.** 95π **D.** $\frac{328}{15}\pi$

Lời giải

Ta có (D) đi qua $A(2;-1)$ nên $y=(x-2)-1\Leftrightarrow kx-y-(2k+1)=0$.

(D) tiếp xúc với (H) $\Leftrightarrow 16k^2-4=(2k+1)^2\Leftrightarrow 12k^2-4k-5=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=\frac{5}{6} \\ k=\frac{1}{2}(\text{Loai}) \end{array}\right. \Rightarrow (D): y=\frac{5}{6}x-\frac{8}{3} \Rightarrow x=\frac{6}{5}y+\frac{16}{5}$$

Phương trình tung độ giao điểm

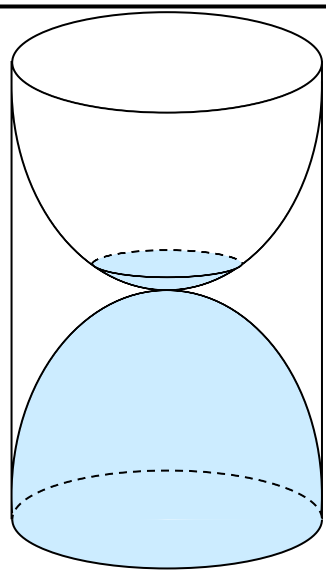
$$4y^2+16=\left(\frac{6}{5}y+\frac{16}{5}\right)^2 \Leftrightarrow 4y^2-12y+9=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=\frac{3}{2} \end{cases}$$

Thể tích cần tìm $V=\pi\int_0^{\frac{3}{2}}\left[\left(4y^2+16\right)-\left(\frac{6y+16}{5}\right)^2\right]dy=\frac{72}{25}\pi$.

Chọn ý **C.**

Câu 27.

Một chiếc đồng hồ cát có thiết diện qua trục là 2 parapol đối xứng qua mặt nằm ngang. Khi để thẳng đứng và cát không thể chảy và mực cát của parapol ở trên là 0,2 chiều cao của parapol ở trên. Khi lật ngược đồng hồ các thì lưu lượng cát chảy từ trên xuống dưới không đổi là $3cm^3/p$. Khi chiều cao ở trên là 6 cm thì bề mặt trên tạo thành 1 đường tròn có diện tích $9cm^2$. Biết sau 900s thì cát không còn chảy nữa. Hỏi khi lượng cát chảy xuống dưới bằng chiều cao của parapol thì thể tích cát của phần parapol ở trên là bao nhiêu (coi lượng cát đang chảy không đáng kể) ?



A. 1,8 **B.** 0,65 **C.** 2,8 **D.** 1,39

Lời giải

Phân tích : *Đây là một bài toán khá dài và cần phân tích, phương pháp làm là tính thể tích thông qua thiết diện và để làm được điều đó ta phải đi tìm phương rình đường parabol.*

Gọi chiều cao 1 parapol là h.

Theo giả thiết $S=9\pi cm^2 \Rightarrow R=3$.

Xét thiết diện qua trục thẳng đứng thì ta thấy parapol đi qua các điểm $(0;0);(3;6);(-3;6)$.

Nên $y=\frac{2}{3}x^2$ $\Rightarrow$Diện tích hình tròn qua thiết diện nằm ngang là $\frac{3\pi}{2y}$

Thể tích phần phía dưới của đồng hồ cát là $\pi\int_0^h \frac{3}{2}ydy=45 \Rightarrow h=\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{\pi}}$

Thể tích phần cát cần tìm là $\pi\int_0^{\frac{1}{5}h}\frac{3}{2}ydy=1{,}8cm^3$

Chọn ý **A.**

Câu 28.

Cho hai mặt cầu (S_1), (S_2) có cùng bán kính R thỏa mãn tính chất tâm của (S_1) thuộc (S_2) và ngược lại. Tính thể tích phần chung V của hai khối cầu tạo bởi 2 mặt cầu (S_1), (S_2)?

A. $V = \pi R^3$ **B.** $V = \dfrac{\pi R^3}{2}$ **C.** $V = \dfrac{5\pi R^3}{12}$ **D.** $V = \dfrac{2\pi R^3}{5}$

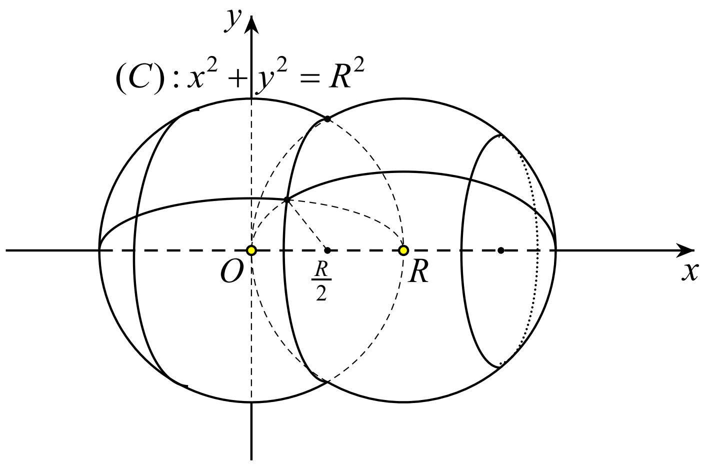
Lời giải

Gắn hệ trục Oxy như hình vẽ. Khối cầu $S(O,R)$ chứa một đường tròn lớn. Đường tròn lớn có phương trình là $(C): x^2+y^2=R^2$

$$\Rightarrow y(x)=\sqrt{R^2-x^2}\ (C)$$

Là phương trình nửa đường tròn nằm phía trên trục Ox.

Quay hình phẳng giới hạn bởi phương trình (C); $x=\dfrac{R}{2}$; $x=R$



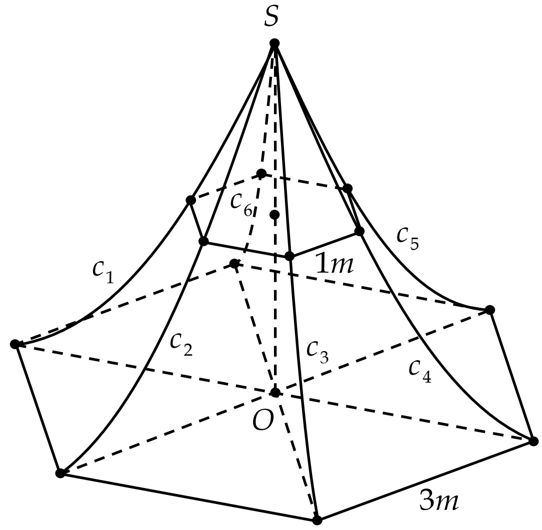
quanh trục hoành ta được $\dfrac{1}{2}V$ tạo thành từ phần chung của 2 quả cầu (S_1), (S_2)

Vậy thể tích chung của hai quả cầu cần tính là

$$V=2\pi\int_{\frac{R}{2}}^{R}\left(R^2-x^2\right)dx=2\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{\frac{R}{2}}^{R}=\frac{5\pi R^3}{12}.$$

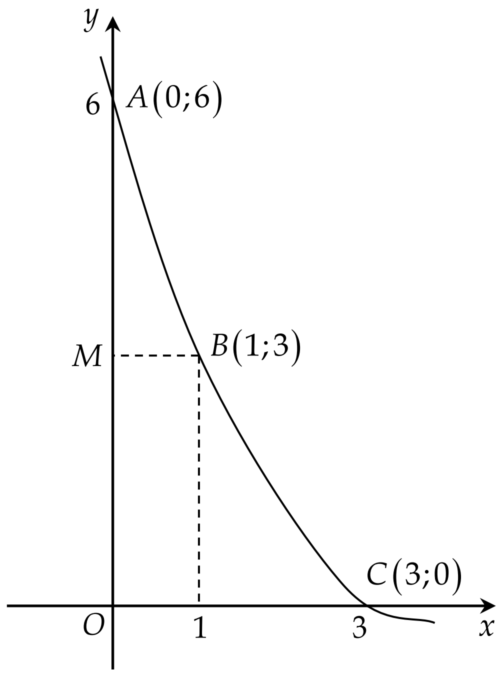
Câu 29.

Người ta dựng một cái lều vải (H) có dạng hình "chóp lục giác cong đều" như hình vẽ bên. Đáy của (H) là một hình lục giác đều cạnh 3m. Chiều cao $SO = 6m$ (SO vuông góc với mặt phẳng đáy). Các cạnh bên của (H) là các sợi dây $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ nằm trên các đường parabol có trục đối xứng song song với SO. Giả sử giao tuyến (nếu có) của (H) với mặt phẳng (P) vuông góc với SO là một lục giác đều và khi (P) qua trung điểm của SO thì lục giác đều có cạnh bằng 1m. Tính thể tích phần không gian nằm bên trong cái lều (H) đó.



A. $\frac{135\sqrt{3}}{5}(m^3)$ **B.** $\frac{96\sqrt{3}}{5}(m^3)$ **C.** $\frac{135\sqrt{3}}{4}(m^3)$ **D.** $\frac{135\sqrt{3}}{8}(m^3)$

Lời giải



Đặt hệ tọa độ như hình vẽ, ta có parabol cần tìm đi qua 3 điểm có tọa độ lần lượt là $A(0;6), B(1;3), C(3;0)$ nên có phương trình là $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 6$

Theo hình vẽ ta có cạnh của thiết diện là BM

Suy ra $2y = x^2 - 7x + 12 \Rightarrow \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = 2y + \frac{1}{4} \Rightarrow \left|x - \frac{7}{2}\right| = \sqrt{2y + \frac{1}{4}}$

Vì $x \in [0;3] \Rightarrow \frac{7}{2} - x = \sqrt{2y + \frac{1}{4}} \Leftrightarrow x = \frac{7}{2} - \sqrt{2y + \frac{1}{4}}$

Nếu ta đặt $t = OM$ thì $BM = \frac{7}{2} - \sqrt{2t + \frac{1}{4}}$

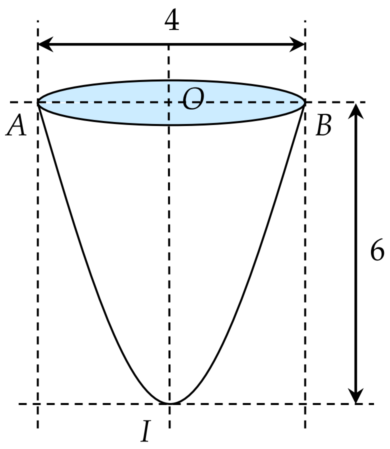
Khi đó diện tích của thiết diện lục giác $S(t) = 6.\frac{BM^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{7}{2} - \sqrt{2t + \frac{1}{4}}\right)^2$, với $t \in [0;6]$

Diện tích thiết diện lục giác bằng 6 lần diện tích tam giác đều nhỏ tạo nên nó

Vậy thể tích của túp lều theo đề bài là $V = \int_0^6 S(t)dt = \int_0^6 \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{7}{2} - \sqrt{2t + \frac{1}{4}}\right)^2 dt = \frac{135\sqrt{3}}{8}$

Câu 30.

Có một vật thể là hình tròn xoay có dạng giống như một cái ly như hình vẽ dưới đây. Người ta đo được đường kính của miệng ly là 4cm và chiều cao là 6cm. Biết rằng thiết diện của chiếc ly cắt bởi mặt phẳng đối xứng là một parabol. Tính thể tích $V(\text{cm}^3)$ của vật thể đã cho.



A. $V = 12\pi$.
B. $V = 12$.
C. $V = \frac{72}{5}\pi$.
D. $V = \frac{72}{5}$.

Lời giải

Chọn gốc tọa độ O trùng với đỉnh I của parabol (P).

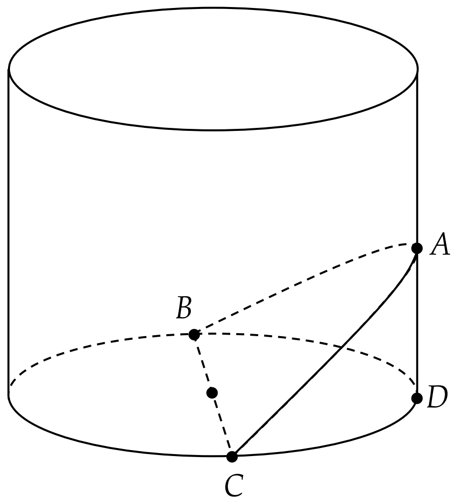
Vì parabol (P) đi qua các điểm $A(-2;6), B(2;6)$ và $I(0;0)$ nên parabol (P) có phương trình $y = \frac{3}{2}x^2$. Ta có $y = \frac{3}{2}x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{3}y$.

Khi đó thể tích của vật thể đã cho là $V = \pi\int_0^6 \left(\frac{2}{3}y\right)dy = 12\pi(\text{cm}^3)$.

Chọn ý **A.**

Câu 31.

Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R. Tính thể tích vật thể tạo thành bởi đáy của hình trụ và mặt phẳng qua đường kính đáy, biết mặt phẳng tạo với đáy một góc 45^0.



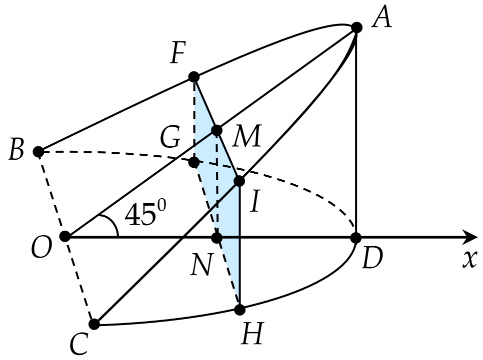
A. $V=\frac{8R^3}{3}\cdot$

B. $V=\frac{2\pi R^3}{3}\cdot$

C. $V=\frac{2R^3}{3}\cdot$

D. $V=\frac{8\pi R^3}{3}\cdot$

Lời giải



Gắn trục tọa độ Ox như hình vẽ. Gọi BC là đường kính đáy

Điểm A là điểm thuộc mặt phẳng cắt khối trụ sao cho $OA\perp BC$.

D là hình chiếu vuông góc của A trên (BCD)

Ta có $\left((ABC);(BCD)\right)=45^0\Rightarrow AOD=45^0$.

Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với trục Ox, cắt khối vật thể theo một thiết diện là hình chữ nhật $FGHI$; $M=OA\cap IF; N=OD\cap HG$.

Đặt $ON=x$. Ta có: $IH=FG=MN=x.\tan 45^0=x$; $HG=2NH=2\sqrt{OH^2-ON^2}=2\sqrt{R^2-x^2}$

Diện tích hình chữ nhật $FGHI$ bằng $MN.HG=2x\sqrt{R^2-x^2}$

Diện tích $FGHI$ là một hàm liên tục trên đoạn $[0;R]$

Thể tích khối vật thể tạo thành

$$V=\int_0^R 2x\sqrt{R^2-x^2}dx=-\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}d\left(R^2-x^2\right)=-\frac{2}{3}\left(R^2-x^2\right)\sqrt{R^2-x^2}\Big|_0^R=\frac{2}{3}R^3.$$

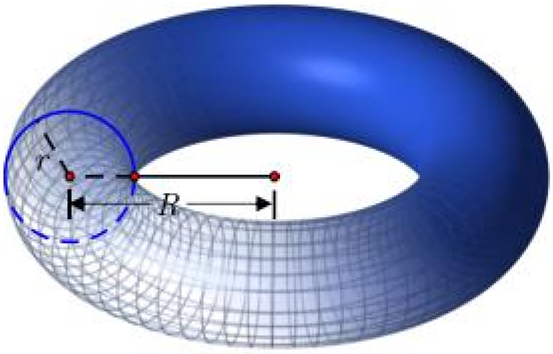
Nhận xét. Học sinh có thể dùng phương pháp đổi biến số để tính tích phân trên bằng cách đặt: $\sqrt{R^2-x^2}=t$.

Công thức tổng quát khi mặt phẳng cắt khối trụ tạo với đáy góc α thì thể tích tạo thành:

$$\boxed{V = \frac{2}{3}R^3\tan\alpha}$$

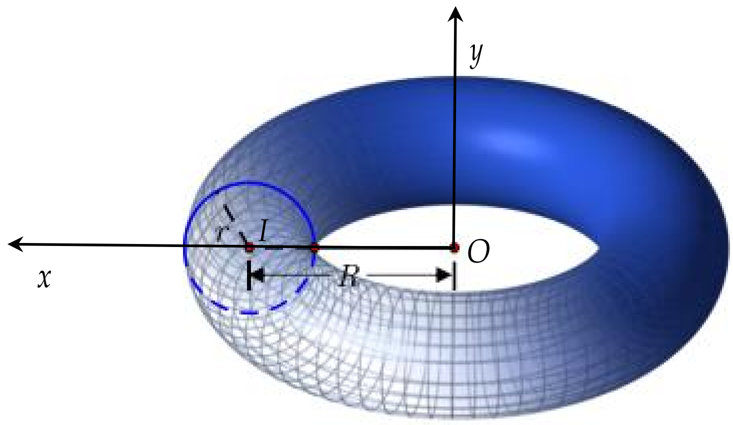
Câu 32.

Một hình xuyến dạng cái phao có kích thước như hình vẽ. Tính thể tích của hình đó theo R và r.



A. $V = 2\pi^2 r^2 R$. **B.** $V = 2\pi^2 r R^2$. **C.** $V = \pi^2 r^2 R$. **D.** $V = \pi^2 r R^2$.

Lời giải



Xét hệ trục toạ độ *Oxy* như hình vẽ. Phương trình đường tròn tâm $I(R;0)$, bán kính r có phương trình là $(x-R)^2 + y^2 = r^2 \Leftrightarrow |x-R| = \sqrt{r^2-y^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = R+\sqrt{r^2-y^2} \\ x = R-\sqrt{r^2-y^2} \end{array}\right.$

Khi đó hình xuyến dạng cái phao được tạo ra khi ta quay đường tròn $(I;r)$ quanh trục Oy. Thể tích cái phao là $V = \pi\int_{-r}^{r}\left|\left(R+\sqrt{r^2-y^2}\right)^2 - \left(R-\sqrt{r^2-y^2}\right)^2\right|dy = 4\pi R\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-y^2}dy$.

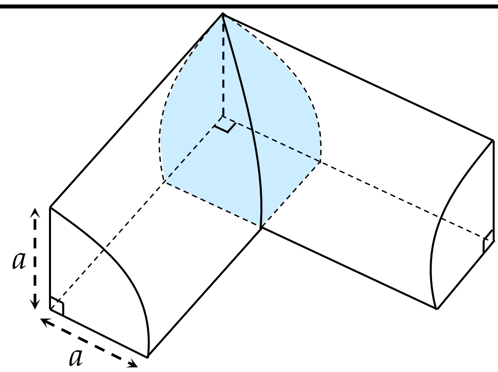
Đặt $y = r\sin t \Leftrightarrow dy = r\cos t dt \xrightarrow[-r \to -\frac{\pi}{2}]{r \to \frac{\pi}{2}} V = 4\pi R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(r\cos t)^2 dt$

$$= 2\pi r^2 R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt = 2\pi r^2 R\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi^2 r^2 R$$

Chọn ý **A.**

Câu 33.

Gọi (H) là phần giao của hai khối $\frac{1}{4}$ hình trụ có bán kính a, hai trục hình trụ vuông góc với nhau. Xem hình vẽ bên. Tính thể tích của (H).

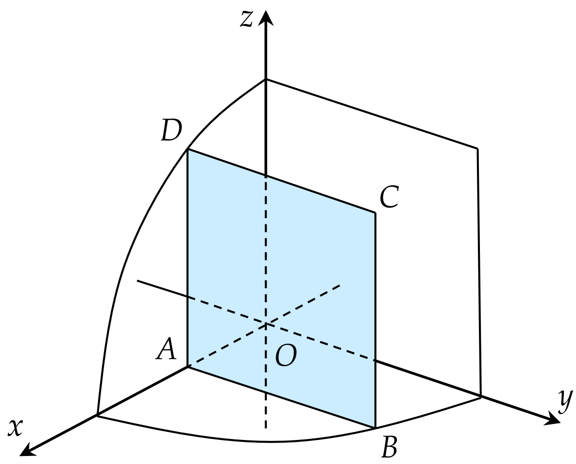


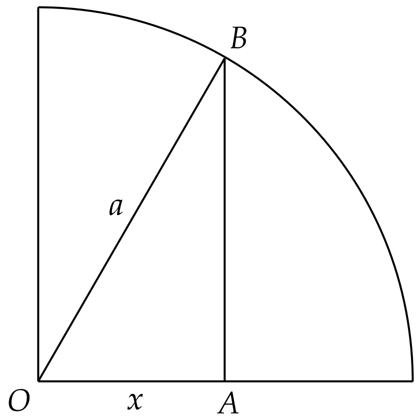
A. $V_{(H)} = \frac{2a^3}{3}$. **B.** $V_{(H)} = \frac{3a^3}{4}$.

C. $V_{(H)} = \frac{a^3}{2}$. **D.** $V_{(H)} = \frac{\pi a^3}{4}$.

Lời giải

Ta gọi trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.





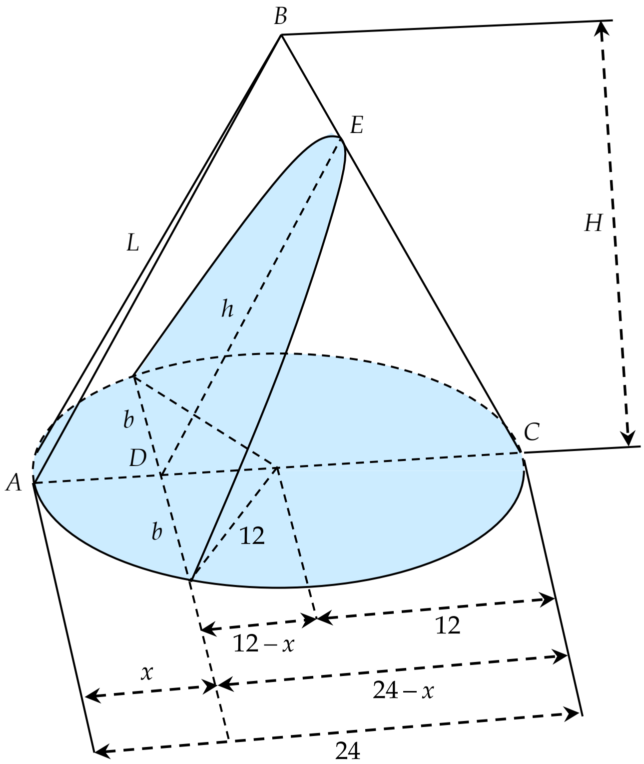
Khi đó phần giao (H) là một vật thể có đáy là một phần tư hình tròn tâm O bán kính a, thiết diện của mặt phẳng vuông góc với trục Ox là một hình vuông có diện tích

$$S(x) = a^2 - x^2$$

Thể tích khối (H) là $\int_0^a S(x)dx = \int_0^a (a^2 - x^2)dx = \frac{2a^3}{3}$.

Câu 34.

Khi cắt hình nón có chiều cao 16 cm và đường kính đáy 24 cm bởi một mặt phẳng song song với đường sinh của hình nón ta thu được thiết diện là một hình Parabol có diện tích lớn nhất bằng?



A. $120\sqrt{2}\ cm^2$ **B.** $120\sqrt{6}\ cm^2$ **C.** $120\sqrt{3}\ cm^2$ **D.** $150\sqrt{3}\ cm^2$

Lời giải

Ta có $DE//AB$ nên theo Thales ta có $\frac{h}{L}=\frac{24-x}{24}\Rightarrow h=\frac{L(24-x)}{24}$

Theo định lý Pythago ta có $b^2+(12-x)^2=12^2\Leftrightarrow b=\sqrt{24x-x^2}$

Thiết diện là một hình parabol có chiều cao h độ dài cạnh đáy bằng 2b có diện tích là $S=\frac{4}{3}bh$ - Cái này hoàn toàn chứng minh được bằng tích phân

Từ đó $\Rightarrow S=\frac{L}{18}(24-x)\sqrt{24x-x^2}$. Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

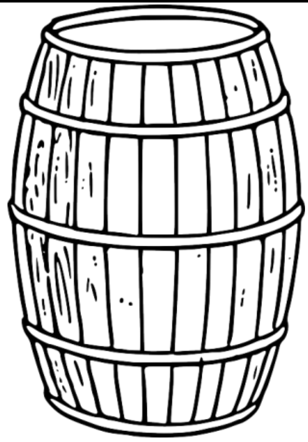
$$S=\frac{L\sqrt{(24-x)(24-x)(24-x).3x}}{18\sqrt{3}}\le\frac{L}{18\sqrt{3}}\sqrt{\left(\frac{24-x+24-x+24-x+3x}{4}\right)^4}=6\sqrt{3}L$$

Trong đó $L=\sqrt{r^2+H^2}=\sqrt{12^2+16^2}=20\Rightarrow S\le 120\sqrt{3}cm^2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 24-x=3x\Leftrightarrow x=6\Rightarrow b=6\sqrt{3},h=15$

Câu 35.

Một thùng rượu có bán kính các đáy là 30cm, thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy có bán kính là 40cm, chiều cao thùng rượu là 1m (hình vẽ). Biết rằng mặt phẳng chứa trục và cắt mặt xung quanh thùng rượu là các đường parabol, hỏi thể tích của thùng rượu (đơn vị lít) là bao nhiêu ?

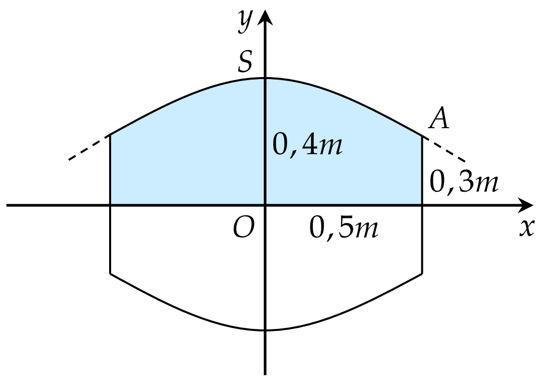


A. $425,2$. **B.** 425162.

C. 212581. **D.** $212,6$.

Lời giải

Đặt thùng rượu nằm ngang, ta gắn trục tọa độ như hình vẽ.



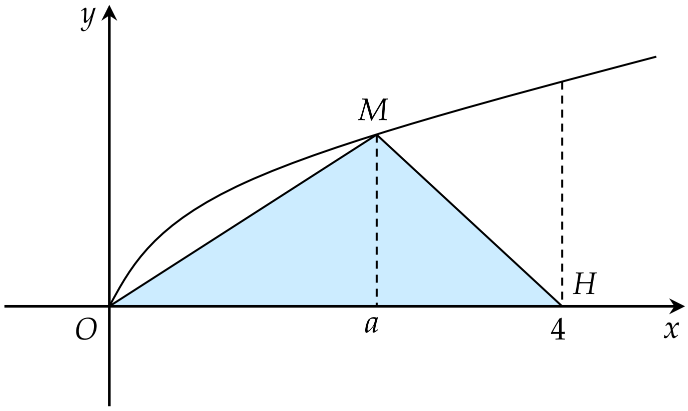
Gọi $(P): y = ax^2 + bx + c$ là parabol đi qua điểm $A(0,5;0,3)$ và có đỉnh $S(0;0,4)$ (hình vẽ). Khi đó, thể tích thùng rượu bằng thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi (P), trục hoành và hai đường thẳng $x = \pm 0,5$ quay quanh trục Ox.

Dễ dàng tìm được $(P): y = -\dfrac{2}{5}x^2 + 0,4$. Thể tích thùng rượu là

$$V = \pi\int_{-0,5}^{0,5}\left(-\frac{2}{5}x^2 + 0,4\right)^2 dx = 2\pi\int_{0}^{0,5}\left(-\frac{2}{5}x^2 + 0,4\right)^2 dx = \frac{203\pi}{1500} \approx 425,5 \; (1)$$

Câu 36.

Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, $y=0$ và $x=4$ quanh trục Ox. Đường thẳng $x=a\ (0<a<4)$ cắt đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ tại M (hình vẽ dưới).



Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox. Biết rằng $V=2V_1$. Khi đó:

A. 2 **B.** $2\sqrt{2}$ **C.** $\frac{5}{2}$ **D.** 3

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=0$.

Thể tích $V=\pi\int_0^4 x\,dx=8\pi$. Ta có $M\left(a;\sqrt{a}\right)$. Khi quay tam giác OMH quanh trục Ox tạo thành hai hình nón có chung đáy:

- Hình nón (N_1) có đỉnh là O, chiều cao $OK=a$, bán kính đáy $R=MK=\sqrt{a}$ nên có thể tích bằng $\frac{1}{3}\pi R^2.OK=\frac{1}{3}\pi\left(\sqrt{a}\right)^2.a=\frac{\pi a^2}{3}$.
- Hình nón (N_2) có đỉnh là H, chiều cao $HK=4-a$, bán kính đáy $R=MK=\sqrt{a}$ nên có thể tích bằng $\frac{1}{3}\pi R^2 HK=\frac{1}{3}\pi\left(\sqrt{a}\right)^2.(4-a)=\frac{4\pi a-\pi a^2}{3}$.

Suy ra $V_1=\frac{\pi a^2}{3}+\frac{4\pi a-\pi a^2}{3}=\frac{4\pi a}{3}$.

Theo giả thiết $V=2V_1 \Leftrightarrow 8\pi=2.\frac{4}{3}\pi a \Rightarrow a=3$.

Chọn ý **D.**

Câu 37.

Cho khối trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O;R)$ và $(O';R)$, $OO'=4R$. Trên đường tròn $(O;R)$ lấy hai điểm A, B sao cho $AB=a\sqrt{3}$. Mặt phẳng (P) đi qua A, B cắt đoạn OO' và tạo với đáy một góc $60°$, (P) cắt khối trụ theo thiết diện là một phần của elip. Diện tích thiết diện đó bằng?

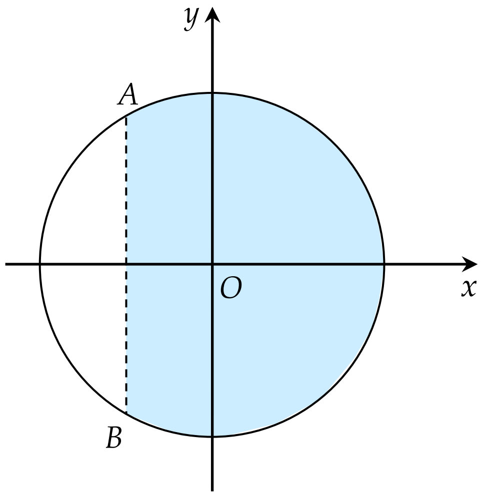
A. $\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$ **B.** $\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$ **C.** $\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$ **D.** $\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$

Lời giải

Cách 1. Gọi diện tích cần tìm là S, diện tích của hình này chiếu xuống đáy là S'.

Ta có $S'=S.\cos 60°$.

Hình chiếu của phần elip xuống đáy là miền sọc xanh như hình vẽ.



Trong ΔAOB ta có: $\cos AOB=\dfrac{OA^2+OB^2-AB^2}{2.OA.OB}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow AOB=\dfrac{2\pi}{3}$.

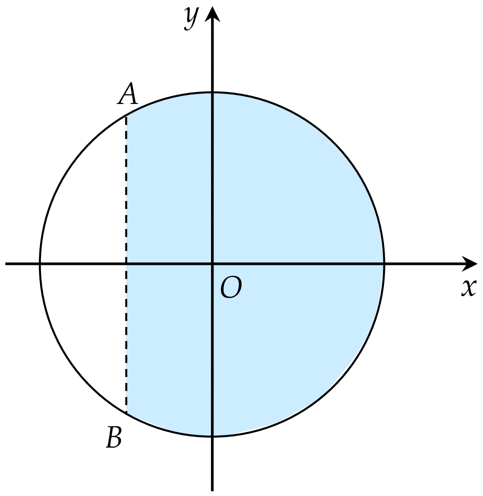
Suy ra sđ AOB lớn $=\dfrac{4\pi}{3}$

Do đó $S'=S_{quatAOB}+S_{\Delta AOB}=\dfrac{\frac{4\pi}{3}}{2\pi}.\pi R^2+\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)R^2=\left(\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$

Vậy $S=\dfrac{S'}{\cos 60°}=2\left(\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2=\left(\dfrac{4\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$

Cách 2. Ta có: $\cos AOB=\dfrac{OA^2+OB^2-AB^2}{2.OA.OB}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow AOB=120°\Rightarrow OH=\dfrac{R}{2}$.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ



Suy ra: phương trình đường tròn đáy là $x^2+y^2=R^2 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$.

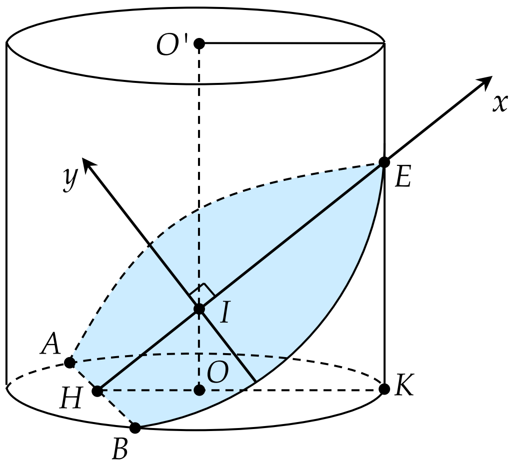
Hình chiếu của phần elip xuống đáy là miền sọc xanh như hình vẽ.

Ta có $S=2\int\limits_{-\frac{R}{2}}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx$. Đặt $x=R.\sin t \Rightarrow S=\left(\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$.

Gọi diện tích phần elip cần tính là S'.

Theo công thức hình chiếu, ta có $S'=\dfrac{S}{\cos 60^\circ}=2S=\left(\dfrac{4\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$.

Cách 3. Gọi I, H, K, E là các điểm như hình vẽ.



Ta có $IHO=60^\circ$, $OH^2=OB^2-BH^2=R^2-\dfrac{3R^2}{4}=\dfrac{R^2}{4}\Rightarrow OH=\dfrac{R}{2}\Rightarrow OI=OH.\tan 60^\circ=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$,

Mặt khác $IH=\dfrac{OH}{\cos 60^\circ}=R$, $\Delta IOH \sim \Delta EKH$ nên ta có $\dfrac{IE}{IH}=\dfrac{OK}{OH}=2\Rightarrow IE=2R$.

Chọn hệ trục tọa độ Ixy như hình vẽ ta có elip (E) có bán trục lớn là $a=IE=2R$ và (E) đi qua $A\left(-R;\dfrac{R\sqrt{3}}{2}\right)$ nên (E) có phương trình là $(E):\dfrac{x^2}{4R^2}+\dfrac{y^2}{R^2}=1$.

- Diện tích của thiết diện là $S=2\int\limits_{-R}^{2R}R\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4R^2}}dx=2R\int\limits_{-R}^{2R}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4R^2}}dx$

- Xét tích phân $I=\int_{-R}^{2R}\sqrt{1-\frac{x^2}{4R^2}}dx$, đặt $x=2R.\sin t;\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ ta được

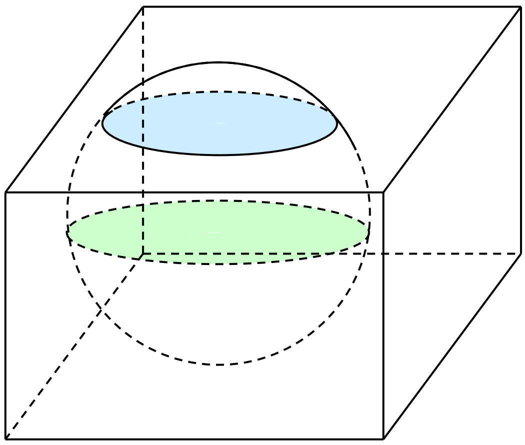
$$I=\frac{R}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=\frac{R}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)R\Rightarrow S=\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$$

Câu 38.

Đặt quả bóng hình cầu vào trong một cái hộp với kích thước chiều dài, chiều rộng, chiều cao của hình hộp tương ứng là 12cm, 12cm, 10cm như hình vẽ, quả bóng có bán kính $R=6cm$ .Thể tích phần trong hộp và phần nhô lên của quả bóng xấp xỉ bao nhiêu ?

A. 1208 **B.** 1530 C. 1270 **D.** 1507

Lời giải



Mặt phẳng thiết diện đi qua tâm của hình tròn và vuông góc với 2 đáy. Gọi Ox, Oy là 2 trục tọa độ đi qua O là tâm hình tròn thiết diện (Ox nằm dọc, Oy nằm ngang).

Ta thấy phần nhô lên của quả bóng có chiều cao $h=2cm$.

Gọi S là diện tích hình tròn khi cắt ngang phần trên của quả bóng.

Ta có $V_1=\int_4^6|S|dx=\int_4^6\left|\pi\left(R^2-x^2\right)\right|dx=\frac{64\pi}{3}$

Thể tích cần tìm là $V=V_1+12.12.10\approx 1507$.

Chọn ý **D.**

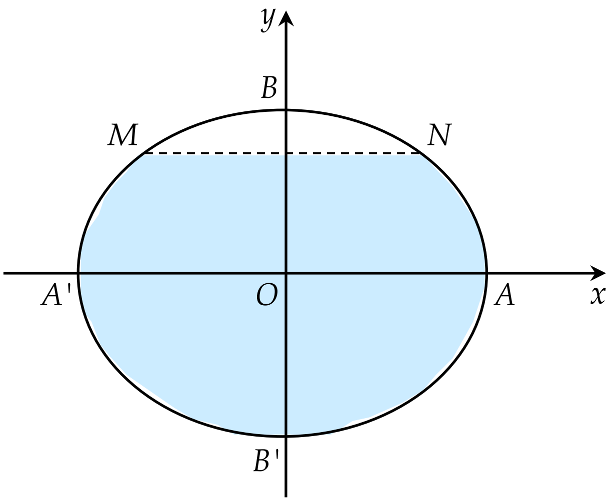
Câu 39.

Một cái thùng đựng dầu có thiết diện ngang (mặt trong của thùng) là một đường elip có trục lớn bằng $1m$, trục bé bằng $0,8m$, chiều dài (mặt trong của thùng) bằng $3m$. Được đặt sao cho trục bé nằm theo phương thẳng đứng (như hình bên). Biết chiều cao của dầu hiện có trong thùng (tính từ đáy thùng đến mặt dầu) là $0,6m$. Tính thể tích V của dầu có trong thùng (Kết quả làm tròn đến phần trăm).

A. $V = 1,52m^3$ **B.** $V = 1,31m^3$ **C.** $V = 1,27m^3$ **D.** $V = 1,19m^3$

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Theo đề bài ta có phương trình của Elip là $\dfrac{x^2}{\frac{1}{4}} + \dfrac{y^2}{\frac{4}{25}} = 1$.

Gọi M, N lần lượt là giao điểm của dầu với elip.

Gọi S_1 là diện tích của Elip ta có $S_1 = \pi ab = \pi\dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{5} = \dfrac{\pi}{5}$.

Gọi S_2 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi Elip và đường thẳng MN.

Theo đề bài chiều cao của dầu hiện có trong thùng (tính từ đáy thùng đến mặt dầu) là $0,6m$ nên ta có phương trình của đường thẳng MN là $y = \dfrac{1}{5}$.

Mặt khác từ phương trình $\dfrac{x^2}{\frac{1}{4}} + \dfrac{y^2}{\frac{4}{25}} = 1$ ta có $y = \dfrac{4}{5}\sqrt{\dfrac{1}{4} - x^2}$.

Do đường thẳng $y=\frac{1}{5}$ cắt Elip tại hai điểm M, N có hoành độ lần lượt là $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ và $\frac{\sqrt{3}}{4}$

nên $S_2=\int\limits_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}}\left(\frac{4}{5}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}-\frac{1}{5}\right)dx=\frac{4}{5}\int\limits_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}dx-\frac{\sqrt{3}}{10}$.

- Tính $I=\int\limits_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}dx$. Đặt $x=\frac{1}{2}\sin t\Rightarrow dx=\frac{1}{2}\cos tdt$.

Đổi cận Khi $x=\frac{-\sqrt{3}}{4}$ thì $t=-\frac{\pi}{3}$; Khi $x=\frac{\sqrt{3}}{4}$ thì $t=\frac{\pi}{3}$.

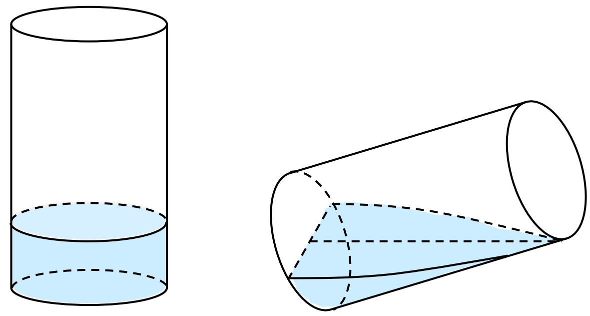
Khi đó $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\cos^2 tdt=\frac{1}{8}\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2t)dt=\frac{1}{8}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Vậy $S_2=\frac{4}{5}\frac{1}{8}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{10}=\frac{\pi}{15}-\frac{\sqrt{3}}{20}$.

Thể tích của dầu trong thùng là $V=\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{15}+\frac{\sqrt{3}}{20}\right).3=1,52$.

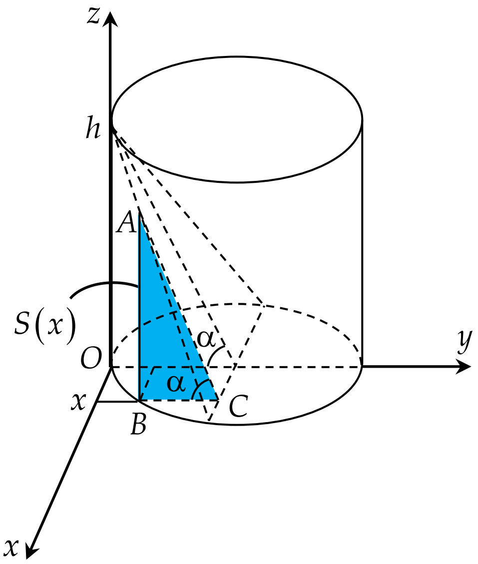
Câu 40.

Có một cốc thủy tinh hình trụ, bán kính trong lòng đáy cốc là $6\,cm$, chiều cao trong lòng cốc là $10\,cm$ đang đựng một lượng nước. Tính thể tích lượng nước trong cốc, biết khi nghiêng cốc nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì ở đáy mực nước trùng với đường kính đáy.



A. $240\,cm^3$ **B.** $240\pi\,cm^3$ C. $120\,cm^3$ **D.** $120\pi\,cm^3$

Lời giải



Đặt $R = 6\,(cm)$, $h = 10\,(cm)$. Gán hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm x $(-6 \le x \le 6)$ cắt vật thể theo thiết diện có diện tích là $S(x)$.

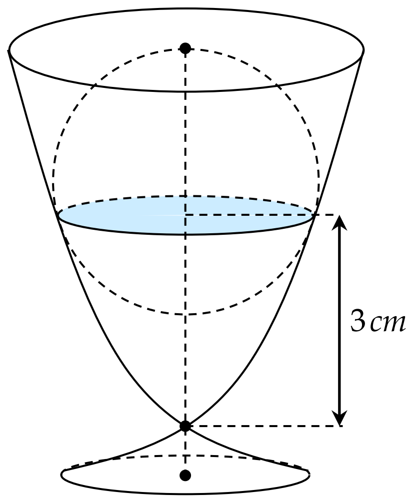
Ta thấy thiết diện đó là một tam giác vuông, giả sử là tam giác ABC vuông tại B như trong hình vẽ.

Ta có $S(x) = S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.BC = \frac{1}{2}BC^2 \tan\alpha = \frac{1}{2}(R^2 - x^2)\frac{h}{R} = \frac{5(36 - x^2)}{6}$.

Vậy thể tích lượng nước trong cốc là $V = \int\limits_{-6}^{6} S(x)dx = \int\limits_{-6}^{6} \frac{5(36 - x^2)}{6}dx = 240\left(cm^3\right)$

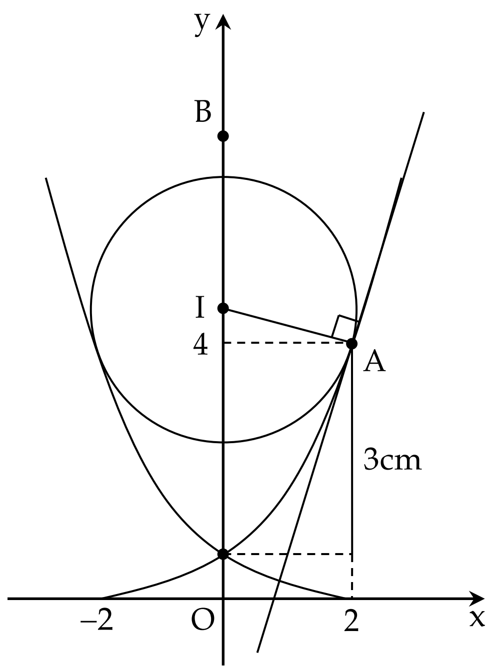
Câu 40.

Một chiếc ly bằng thủy tinh đang chứa nước bên trong được tạo thành bằng cách quay đồ thị $y = 2^x$ quanh trục tung. Người ta thả vào ly một quả cầu có bán kính R thì mực nước dâng lên phủ kín quả cầu và đồng thời chạm tới miệng ly. Biết điểm tiếp xúc của quả cầu và chiếc ly cách đáy $3cm$. Thể tích nước trong ly gần nhất với giá trị nào ?



A. $20m^3$ **B.** $30m^3$ **C.** $40m^3$ **D.** $100m^3$

Lời giải



Xét mặt cắt bởi thiết diện qua trục của chiếc ly. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Ta có điểm tiếp xúc của đường tròn và đồ thị $(C): y = 2^x$ là điểm $A(2;4)$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại A là

$$(d): y = 4\ln 2(x-2)+4 \text{ hay } (d): 4\ln 2x - y - 8\ln 2 + 4 = 0$$

Khi đó tâm I của đường tròn bằng giao điểm của Δ và Oy , với Δ là là đường thẳng vuông góc với d tại A.

Ta có $(\Delta): x + 4\ln 2.y - 2 - 16\ln 2 = 0 \Rightarrow I\left(0; \dfrac{1+8\ln 2}{2\ln 2}\right)$

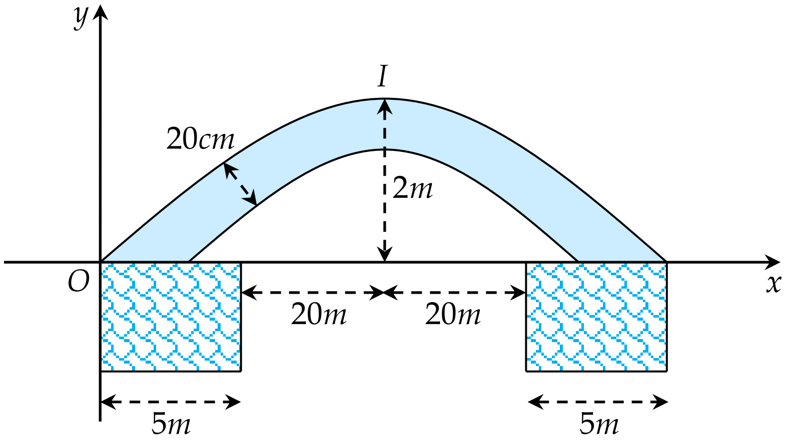
Từ hình vẽ ta thấy $y_B = y_I + IA = \dfrac{1+8\ln 2}{2\ln 2} + IA \Rightarrow V_{ly} = \pi\int_1^{y_B}(\log_2 y)^2 dy$

Thể tích của quả cầu là $V_C = \dfrac{4}{3}\pi IA^3 \Rightarrow V = V_{Ly} - V_C \approx 29,6$

Chọn ý **B.**

Câu 41.

Thành phố định xây cây cầu bắc ngang con sông dài 500m, biết rằng người ta định xây cầu có 10 nhịp cầu hình dạng parabol,mỗi nhịp cách nhau 40m,biết 2 bên đầu cầu và giữa mối nhịp nối người ta xây 1 chân trụ rộng 5m. Bề dày nhịp cầu không đổi là 20cm. Biết 1 nhịp cầu như hình vẽ. Hỏi lượng bê tông để xây các nhịp cầu là bao nhiêu (bỏ qua diện tích cốt sắt trong mỗi nhịp cầu)



A. $20m^3$ **B.** $50m^3$ **C.** $40m^3$ **D.** $100m^3$

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ với gốc $O(0;0)$ là chân cầu (điểm tiếp xúc Parabol trên), đỉnh $I(25;2)$, điểm $A(50;0)$ (điểm tiếp xúc Parabol trên với chân đế)

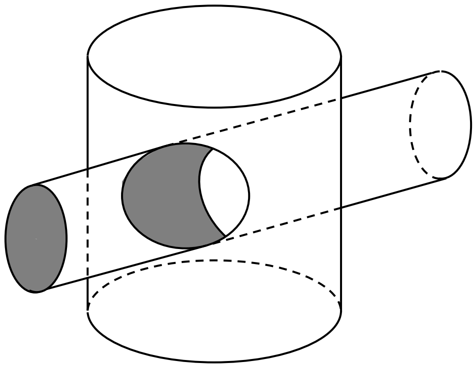
Gọi Parabol trên có phương trình $(P_1): y_1 = ax^2 + bx + c = ax^2 + bx$ (do (P_1) đi qua O)

$\Rightarrow y_2 = ax^2 + bx - \frac{20}{100} = ax^2 + bx - \frac{1}{5}$ là phương trình parabol dưới

Ta có (P_1) đi qua I và A $\Rightarrow (P_1): y_1 = -\frac{2}{625}x^2 + \frac{4}{25}x \Rightarrow y_2 = -\frac{2}{625}x^2 + \frac{4}{25}x - \frac{1}{5}$

Câu 42.

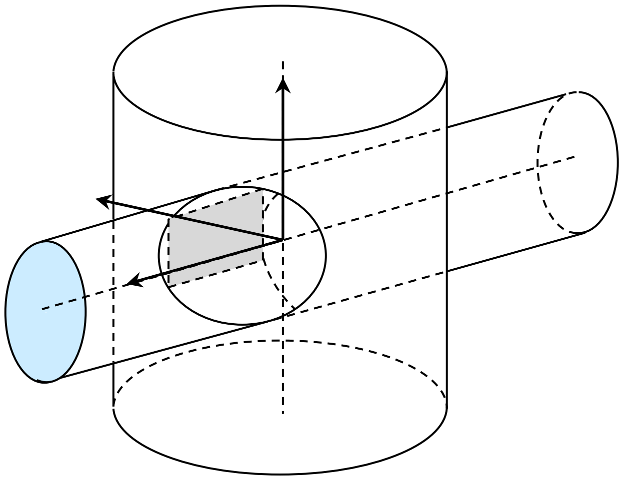
Cắt 2 khối trụ bằng sắt xuyên qua nhau như hình vẽ dưới. Khối trụ đứng có bán kính đáy $R = 10cm$, khối trụ ngang có bán kính đáy $r = 6cm$. Biết rằng trụ của hai khối trụ cắt và vuông góc với nhau tại chính giữa của mỗi hình. Tính thể tích phần chung của 2 khối trụ đó?



A. $2154.96\left(cm^3\right)$ **B.** $1077.48\left(cm^3\right)$ **C.** $4309.92\left(cm^3\right)$ **D.** $3385\left(cm^3\right)$

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ với gốc tọa độ là giao điểm 2 đường nối tâm, trục Oy hướng về phía trái, Ox hướng vào trong, Oz hướng lên trên. Cắt một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x\left(-6 \le x \le 6\right)$ ta được một thiết diện là hình chữ nhật.

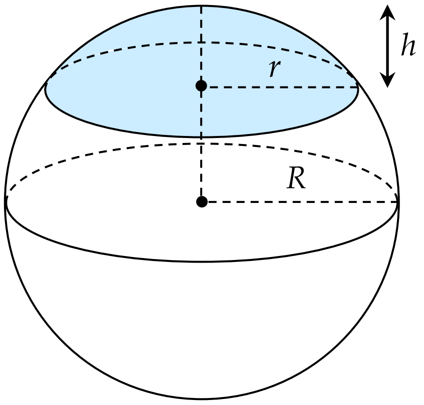


Ta có chiều rộng của hình chữ nhật là $a = 2\sqrt{r^2 - x^2} = 2\sqrt{36 - x^2}$, chiều dài của hình chữ nhật là $b = 2\sqrt{R^2 - x^2} = 2\sqrt{100 - x^2} \Rightarrow S\left(x\right) = ab = 4\sqrt{\left(36 - x^2\right)\left(100 - x^2\right)}$

$$\Rightarrow V = \int_{-6}^{6} S\left(x\right)dx = \int_{-6}^{6} 4\sqrt{\left(36 - x^2\right)\left(100 - x^2\right)}dx \approx 2154,96\left(cm^3\right)$$

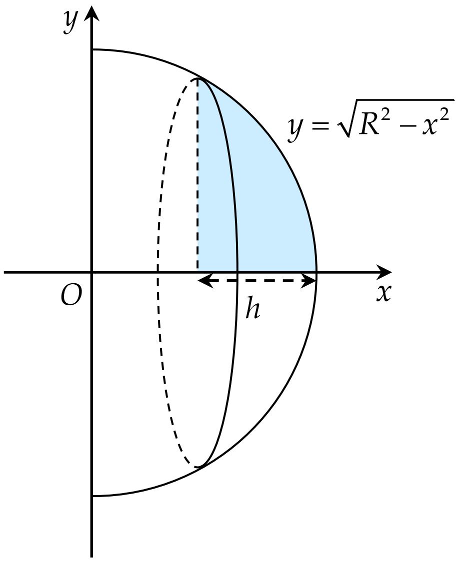
Câu 43.

Cho một khối chỏm cầu (S) có bán kính R và chiều cao h. Tính thể tích của khối chỏm S.



A. $V=\pi h^2\left(R+\dfrac{h}{3}\right)$ **B.** $\pi h^2\left(R-\dfrac{h}{3}\right)$ **C.** $\pi h^2\left(R+\dfrac{h}{2}\right)$ **D.** $\pi h^2\left(R-\dfrac{h}{2}\right)$

Lời giải



Ta có khối chỏm cầu thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi $\begin{cases} y=\sqrt{R^2-x^2} \\ x=R-h,(0<h\le R) \end{cases}$

quanh trục Ox $\Rightarrow V_{(S)}=\pi\int_{R-h}^{R}\left(R^2-x^2\right)dx=\pi\left(R^2x-\dfrac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{R-h}^{R}$

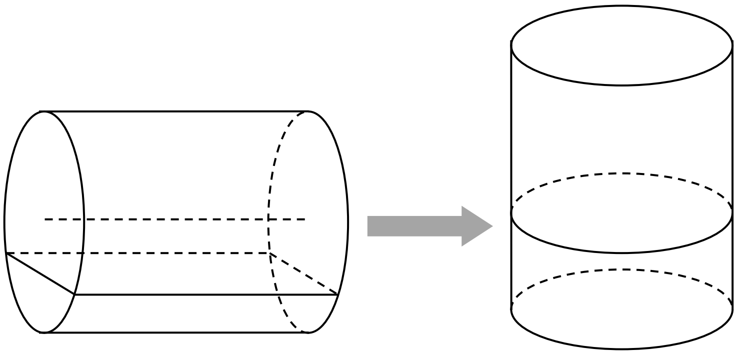
$$=\pi\left[R^3-\frac{R^3}{3}-R^2(R-h)+\frac{(R-h)^3}{3}\right]=\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)$$

Ngoài ra ta có thể viết công thức trên thành $V=\pi h^2\left(R-\dfrac{h}{3}\right)=\dfrac{\pi h}{6}\left(h^2+3r^2\right)$ trong đó r là bán kính của đáy chỏm cầu.

Nhận xét. *Vậy là từ công thức tính thể tích bằng tích phân ta đã tính được thể tích của một chỏm cầu, vậy các bạn sẽ suy ra được cách tính thể tích của một khối cầu chứ?*

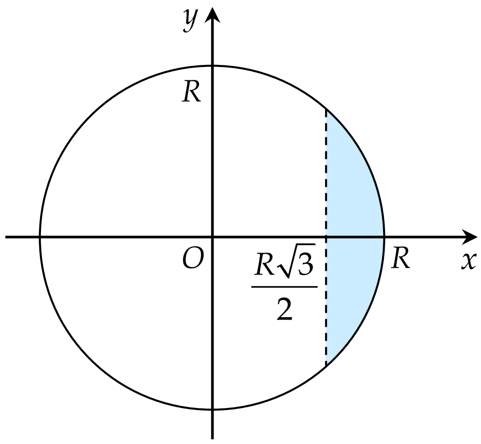
Câu 44.

Một thùng đựng nước có dạng hình trụ có chiều cao h và bán kính đáy bằng R. Khi đặt thùng nước nằm ngang như hình 1 thì khoảng cách từ trục hình trụ tới mặt nước bằng $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ (mặt nước thấp hơn trục của hình trụ). Khi đặt thùng nước thẳng đứng như hình 2 thì chiều cao của mực nước trong thùng là . Tính tỉ số $\frac{h_1}{h}$?



A. $\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\frac{\pi-\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\frac{2\pi-\sqrt{3}}{12}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$

Lời giải



Ta có thể tích nước có trong hình 1 là $V=Sh$

Thể tích nước có trong hình 2 là $V'=S'h_1$

Mặt khác ta có $V=V' \Rightarrow \frac{h_1}{h}=\frac{S}{S'}=\frac{S}{\pi R^2}$

Với S là diện tích thiết diện khi cắt chỏm cầu vuông góc với phương nằm ngang.

$$\Rightarrow S=2\pi\int_{\frac{R\sqrt{3}}{2}}^{R}\sqrt{R^2-x^2}dx$$

Đặt $x=R\sin t \Leftrightarrow dx=R\cos tdt \Rightarrow S=2\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}R\cos t\sqrt{R^2-(R\sin t)^2}dt$

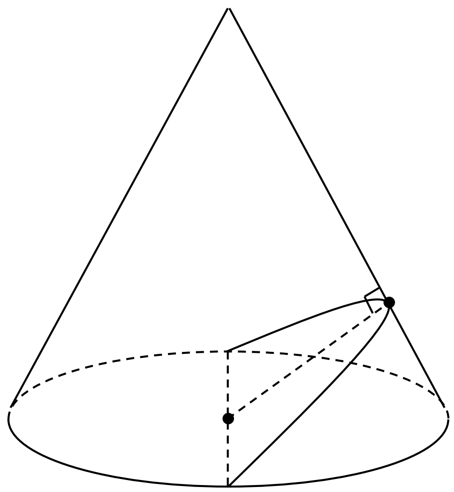
$$=2\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(R\cos t)^2dt=2\pi R^2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=2\pi R^2\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\pi R^2\left(\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{12}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{h_1}{h} = \frac{S}{\pi R^2} = \frac{\pi R^2\left(\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12}\right)}{\pi R^2} = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12}$$

Chọn ý **A.**

Câu 45.

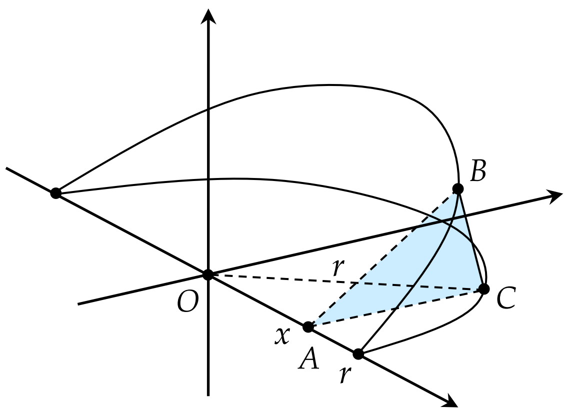
Một khối nón (N) có bán kính đáy r, thiết diện qua đỉnh và vuông góc với mặt phẳng đáy là một tam giác đều. Cắt khối nón bởi một mặt phẳng đi qua đường kính đáy và vuông góc với đường sinh của khối nón để lấy một cái nêm (xem hình vẽ).



A. $V = \frac{r^3}{2\sqrt{3}}$ **B.** $V = \frac{r^3}{\sqrt{3}}$ **C.** $V = \frac{\pi r^3}{2\sqrt{3}}$ **D.** $V = \frac{\pi r^3}{\sqrt{3}}$

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ bên dưới, và cắt nêm và cắt cái nêm bởi một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ta được một thiết diện là một tam giác vuông như hình vẽ $\Rightarrow V = \int_{-r}^{r} S(x)dx\ \left(S(x) = S_{\Delta ABC}\right)$



Tam giác ABC vuông tại B $\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.BC$

Tam giác OAC vuông tại A $\Rightarrow AC = \sqrt{r^2 - x^2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} BC = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}\sqrt{r^2 - x^2} \\ AB = AC \cdot \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{r^2 - x^2} \end{cases} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{\sqrt{3}}{8}\left(r^2 - x^2\right)$$

$$\Rightarrow V = \int_{-r}^{r} S(x)\,dx = \frac{\sqrt{3}}{8}\int_{-r}^{r}\left(r^2 - x^2\right)dx = \frac{\sqrt{3}}{8}\left(r^2 \cdot x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-r}^{r} = \frac{r^3}{2\sqrt{3}}$$

C. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TRONG THỰC TIỄN

I. CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN TỚI CHUYỂN ĐỘNG.

Trong thực tiễn ta sẽ bắt gặp rất nhiều các bài toán kiểu như sau thời gian bóp phanh bao lâu thì xe dừng hẳn hay cách chướng ngại vật bao nhiêu. Các bài toán này trong vật lý lớp 10 chúng ta đã được tìm hiểu rồi nhưng chỉ dừng lại là nhớ công thức mà chưa hiểu được tại sao lại có những công thức đó. Trong dạng toán này ta sẽ cùng đi tìm hiểu bản chất của các bài toán chuyển động dưới khía cạnh của toán học nhé!

Bài toán. Ta cùng xét vật M chuyển động trên quãng đường có độ dài là s trong khoảng thời gian t. Khi đó, vật M chuyển động với vận tốc trung bình là $v=\frac{s}{t}$ - Đây là công thức rất quen thuộc phải không nào, nhưng tuy nhiên trong cuộc sống không phải lúc nào cũng đi đều như thế, sẽ có lúc nhanh dần, lúc chậm dần. Vì vậy ta cần phương pháp tính đúng vận tốc của xe tại mỗi thời điểm.

- Giả sử $v(t)$ là vận tốc của vật M tại thời điểm t, và $s(t)$ là quãng đường vật đi được sau khoảng thời gian t tính từ lúc bắt đầu chuyển động thì ta luôn có đạo hàm của quãng đường là vận tốc tức $s'(t)=v(t)$ và điều đó tức là nguyên hàm của vận tốc là quãng đường

Từ hệ thức trên ta suy ra quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian $t\in[a;b]$ được tính theo công thức $\int_a^b v(t)dt=s(b)-s(a)$

- Bây giờ ta đặt $a(t)$ là gia tốc của vật M thì đạo hàm của vận tốc chính là gia tốc tức là $v'(t)=a(t)$ và ngược lại nguyên hàm của gia tốc chính là vận tốc

Note. Trên đây là những công thức cơ bản nhất mà chúng ta cùng nắm, sau đây sẽ cùng tìm hiểu tại sao lại có những công thức hồi lớp 10 mà chương trình vật lý dạy ta nhé!

VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1.

Một ô tô đang chạy với vận tốc 10m/s thì tài xế đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+10(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét ?

A. $0,2$m **B.** 2m **C.** 10m **D.** 20m

Lời giải

Ta có nguyên hàm của vận tốc $v(t)=-5t+10$ chính là quãng đường $s(t)$ mà ô tô đi được sau thời gian t giây kể từ lúc tài xế đạp phanh.

- Lúc bắt đầu đạp phanh, tức là tại thời điểm t_0, ô tô có vận tốc $v_0=10(m/s)$. Suy ra $v(t_0)=-5t_0+10=10 \Leftrightarrow t_0=0$.
- Khi ô tô dừng lại tại thời điểm t_1 thì vận tốc $v_1=0(m/s)$. Suy ra $v(t_1)=-5t_1+10=0 \Leftrightarrow t_1=2$.

Vậy quãng đường đi được từ lúc đạp phanh đến khi dừng lại là tích phân của hàm $v(t)$ khi thời gian t từ 0s đến 2s $\int_0^2 v(t)dt=\int_0^2(-5t+10)dt=\left(-5\frac{t^2}{2}+10t\right)\Big|_0^2=10m$.

Chú ý .

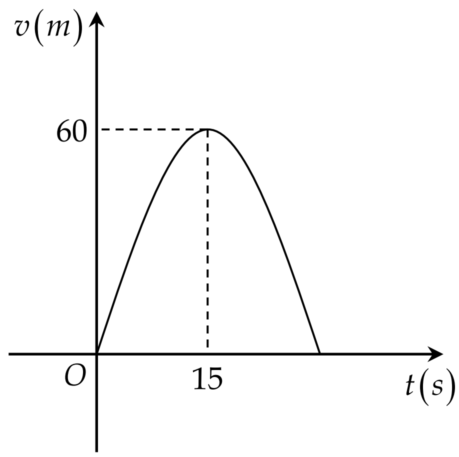
- Nguyên hàm của vận tốc là quãng đường đi được của vật chuyển động.
- Nếu biết $s(t)$ là nguyên hàm của $v(t)$ thì quãng đường của vật đi được trong khoảng thời gian $t\in[a;b]$ được tính theo công thức

$$\int_a^b v(t)dt=s(b)-s(a).$$

Chọn ý **C.**

Câu 2.

Một xe mô tô phân khối lớn sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu phóng nhanh với vận tốc tăng liên tục được biểu thị bằng đồ thị là đường cong Parabol có hình bên. Biết rằng sau 15s thì xe đạt ến vận tốc cao nhất 60m/s và bắt đầu giảm tốc. Hỏi từ lúc bắt đầu đến lúc đạt vận tốc cao nhất thì xe đã đi được quãng đường bao nhiêu mét ?



A. 500 **B.** 600 **C.** 650 **D.** 550

Lời giải

Ta nhận thấy rằng

- Vì đồ thị vận tốc có dạng là đường Parabol như hình vẽ nên biểu thức vận tốc sẽ có dạng $v(t)=at^2+bt+c$, đường cong Parabol có đỉnh $I(15;60)$, đồng thời đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$. Từ đây suy ra

$$\begin{cases} a.0^2+b.0+c=0 \\ -\dfrac{b}{2a}=15 \\ a.15^2+b.15+c=60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ 30a+b=0 \\ a.15^2+b.15+0=60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ a=-\dfrac{4}{15} \\ b=8 \end{cases} \Rightarrow v(t)=-\dfrac{4}{15}t^2+8t.$$

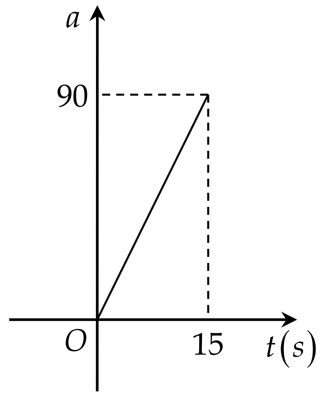
- Theo đồ thị thì xe bắt đầu tăng tốc lúc $t=0$ và đạt vận tốc cao nhất lúc $t=15\,s$ nên quãng đường đi được của xe từ lúc bắt đầu tăng tốc đến lúc đạt vận tốc cao nhất nên quãng đường đi được là $\int_0^{15} v(t)dt=\int_0^{15}\left(-\dfrac{4}{15}t^2+8t\right)dt=\left(-\dfrac{4}{45}t^3+4t^2\right)\Big|_0^{15}=600m$.

Vậy từ lúc bắt đầu tăng tốc đến lúc đạt vận tốc cao nhất thì xe đã đi được một quãng đường dài 600m.

Chọn ý **B.**

Câu 3.

Một máy bay đang chuyển động thẳng đều trên mặt đất với vận tốc $v=3(m/s)$ thì bắt đầu tăng tốc với độ biến thiên vận tốc là hàm số $a(t)$ có đồ thị hàm số là đường thẳng như hình bên. Sau 15s tăng tốc thì máy bay đạt đến vận tốc đ   lớn để phóng khỏi mặt đất. Hãy tính vận tốc khi máy bay bắt đầu rời khỏi mặt đất.



A. 677 **B.** 678 **C.** 679 **D.** 680

Lời giải

Ta thấy rằng đường thẳng $a(t)=mt+n$ đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$ và điểm $A(15;90)$ nên suy ra $\begin{cases} m.0+n=0 \\ m.15+n=90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=0 \\ m=6 \end{cases} \Rightarrow a(t)=6t$.

Ta biết rằng nguyên hàm của gia tốc $a(t)$ chính là vận tốc của vật chuyển động. Do đó ta có công thức vận tốc $v(t)$ được tính theo công thức $v(t)=\int a(t)dt=\int 6tdt=3t^2+C$

Tại thời điểm bắt đầu tăng tốc thì xem như $t=0$ và vận tốc lúc đó là $v=3(m/s)$.

$$\Rightarrow v(0)=3 \Leftrightarrow 3.0^2+C=3 \Leftrightarrow C=3 \Rightarrow v(t)=3t^2+3.$$

Vậy vận tốc máy bay đạt được khi bắt đầu phóng khỏi mặt đất là

$$v(15)=3.15^2+3=678(m/s)$$

Chọn ý **B.**

Câu 4.

Một viên đạn được bắn lên trời với vận tốc là 72 m/s bắt đầu từ độ cao 2m. Hãy xác định chiều cao của viên đạn sau thời gian 5s kể từ lúc bắn biết gia tốc trọng trường $a(t) = -9,8m/s^2$?

A. $0,2$m **B.** 2m **C.** 10m **D.** 20m

Lời giải

Ta có vận tốc của viên đạn tại thời điểm t là $v(t) = \int -9,8dt = -9,8t + C_1$

Do $v(0) = 72$ nên $v(0) = -9,8.0 + C_1 = 72 \Leftrightarrow C_1 = 72 \Rightarrow v(t) = -9,8t + 72$.

Độ cao của viên đạn tại thời điểm t là $s(t) = \int v(t)dt = \int(-9,8t + 72)dt = -4,9t^2 + 72t + C_2$

Vì $s(0) = 2$ nên $s(0) = -4,9.0^2 + 72.0 + C_2 = 2 \Leftrightarrow C_2 = 2 \Rightarrow s(t) = -4,9t^2 + 72t + 2$.

Vậy sau khoảng thời gian 5s kể từ lúc bắn, viên đạn ở độ cao

$$s(5) = -4,9.5^2 + 72.5 + 2 = 239,5m.$$

Mở rộng. Qua bài toán này ta có bài toán tổng quát hơn cho chuyển động ném đứng từ dưới lên của vật. Giả sử vật A được ném thẳng đứng lên với vận tốc ban đầu v_0 ở vị trí độ cao s_0 so với mặt đất. Ta sẽ thiết lập các hàm vận tốc và hàm độ cao của vật A như sau

- Xem như tại thời điểm $t_0 = 0$ thì vật được ném hướng lên. Theo giả thiết ta có $s(0) = s_0$ và $s'(0) = v_0$.
- Ta biết rằng trong chuyển động ném đứng từ dưới lên thì gia tốc trọng trường có giá trị âm tại mọi thời điểm t, nghĩa là $s''(t) = -9,8m/s^2$.
- Ta có vận tốc của viên đạn tại thời điểm t là $s'(t) = \int -9,8dt = -9,8t + C_1$

Do $s'(0) = v_0$ nên $s'(0) = -9,8.0 + C_1 = v_0 \Leftrightarrow C_1 = v_0 \Rightarrow s'(t) = -9,8t + v_0$.

- Độ cao của viên đạn tại thời điểm t là

$$s(t) = \int s'(t)dt = \int(-9,8t + v_0)dt = -4,9t^2 + v_0t + C_2$$

- Vì $s(0) = s_0$ nên $s(0) = -4,9.0^2 + 72.0 + C_2 = s_0$

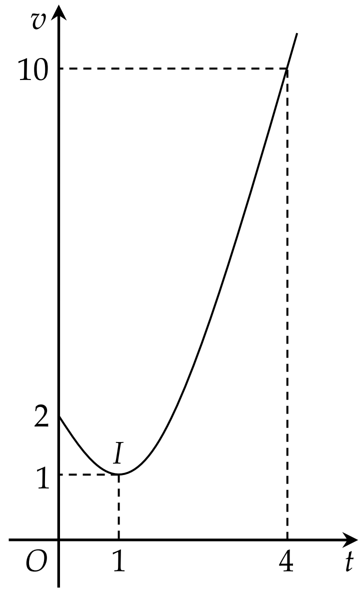
$$\Leftrightarrow C_2 = s_0 \Rightarrow s(t) = -4,9t^2 + v_0t + s_0$$

- Vậy ta có hàm vận tốc $s'(t) = -9,8t + v_0$ và hàm độ cao

$$s(t) = -4,9t^2 + v_0t + s_0.$$

Câu 5.

Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc thời gian $t(h)$ có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1;1)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát.



A. $s = 6(km)$

B. $s = 8(km)$

C. $s = \dfrac{40}{3}(km)$

D. $s = \dfrac{46}{3}(km)$

Lời giải

Hàm biểu diễn vận tốc có dạng $v(t) = at^2 + bt + c$.

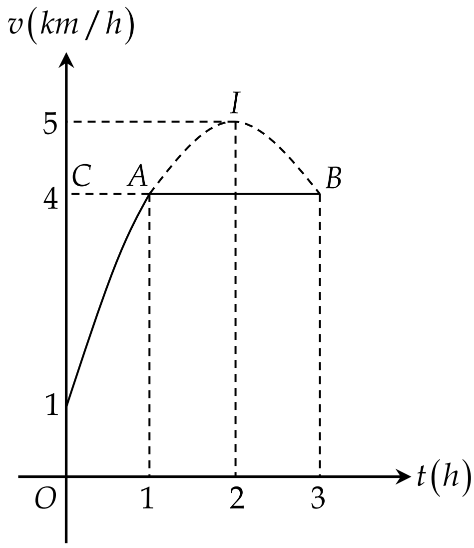
Dựa vào đồ thị ta có $\begin{cases} c = 2 \\ \dfrac{-b}{2a} = 1 \\ a + b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow v(t) = t^2 - 2t + 2$.

Với $t = 4 \Rightarrow v(4) = 10$ (thỏa mãn).

Từ đó $s = \int\limits_0^4 (t^2 - 2t + 2)dt = \dfrac{40}{3}(km)$.

Câu 6.

Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v\ (km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t\ (h)$ có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;5)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó



A. $15(km)$

B. $\dfrac{32}{3}(km)$

C. $12(km)$

D. $\dfrac{35}{3}(km)$

Lời giải

CHINH PHỤC OLYMPIC TOÁN

Parabol có đỉnh $I(2;5)$ và đi qua điểm $(0;1)$ có phương trình $y=-x^2+4x+1$.

Quãng đường vật đi được trong 1 giờ đầu là

$$S_1=\int_0^1(-x^2+4x+1)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+2x^2+x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1}=\frac{8}{3}$$

Quãng đường vật đi được trong 2 giờ sau là $S_2=2.4=8$

Vậy trong ba giờ vật đi được quãng đường là $S=S_1+S_2=\frac{8}{3}+8=\frac{32}{3}$ (km).

Câu 7.

Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu $1m$. Một ô tô A đang chạy với vận tốc $16m/s$ bỗng gặp ô tô B đang dừng đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu thị bởi công thức $v_A(t)=16-4t$ (đơn vị tính bằng m/s), thời gian tính bằng giây. Hỏi rằng để có 2 ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là bao nhiêu?

A. 33 **B.** 12 **C.** 31 **D.** 32

Lời giải

Ta có: $v_A(0)=16m/s$.

Khi xe A dừng hẳn: $v_A(t)=0 \Leftrightarrow t=4s$.

Quãng đường từ lúc xe A hãm phanh đến lúc dừng hẳn là $s=\int_0^4(16-4t)dt \;=32m$.

Do các xe phải cách nhau tối thiểu $1m$ để đảm bảo an toàn nên khi dừng lại ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là $33m$.

Câu 8.

Một vật đang chuyển động với vận tốc $v=20(m/s)$ thì thay đổi vận tốc với gia tốc được tính theo thời gian t là $a(t)=-4+2t(m/s^2)$. Tính quãng đường vật đi được kể từ thời điểm thay đổi gia tốc đến lúc vật đạt vận tốc bé nhất

A. $\frac{104}{3}m$ **B.** $104m$ **C.** $208m$ **D.** $\frac{104}{6}m$

Lời giải

Vận tốc của vật khi thay đổi là $v(t)=\int(-4+2t)dt=t^2-4t+C$.

Tại thời điểm $t=0$ (khi vật bắt đầu thay đổi vận tốc) có $v_0=20 \Rightarrow C=20$

Suy ra $v(t)=t^2-4t+20$.

Có $v(t)=(t-2)^2+16\ge 16$, suy ra vận tốc của vật đạt bé nhất khi $t=2$

Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó là

$$S=\int_0^2 v(t)dt=\int_0^2\left(t^2-4t+20\right)dt=\left(\frac{1}{3}t^3-2t^2+20t\right)\Bigg|_0^2=\frac{104}{3}\ (m).$$

Câu 9.

Một chiếc xe đua thể thức I bắt đầu chuyển động tăng tốc với gia tốc không đổi, khi vận tốc $80\,m/s$ thì xe chuyển động với vận tốc không đổi trong thời gian $56\,s$, sau đó nó giảm với gia tốc không đổi đến khi dừng lại. Biết rằng thời gian chuyển động của xe là $74\,s$. Tính quảng đường đi được của xe?

A. $5200\,m$ **B.** $5500\,m$ **C.** $5050\,m$ **D.** $5350\,m$

Lời giải

Lần tăng tốc đầu tiên xe chuyển động với vận tốc $v(t)=a.t$, $(a>0)$.

Đến khi xe đạt vận tốc $80m/s$ thì xe chuyển động hết $t_1=\frac{80}{a}(s)$.

Lần giảm tốc, xe chuyển động với vận tốc $v_3=80-bt$, $(b>0)$.

Khi xe dừng lại thì xe chuyển động thêm được $t_3=\frac{80}{b}(s)$.

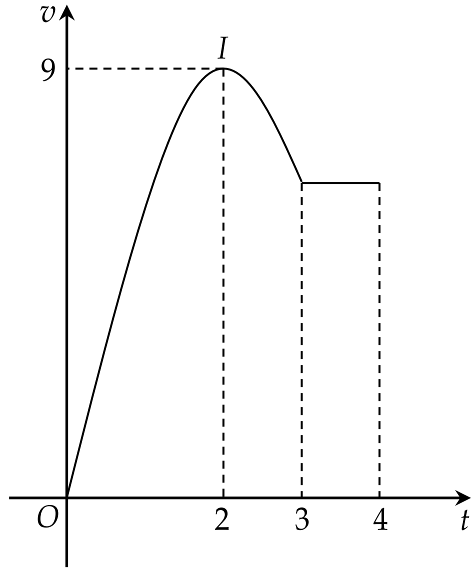
Theo yêu cầu bài toán ta có $\frac{80}{a}+56+\frac{80}{b}=74\Leftrightarrow\frac{80}{a}+\frac{80}{b}=18$.

Ta có $\begin{cases} S_1=\int_0^{t_1} atdt=\int_0^{\frac{80}{a}} atdt=\frac{1}{2}.\frac{80^2}{a}(m) \\ S_2=80.56(m) \\ S_3=b\int_0^{t_3}(80-bt)dt=\int_0^{\frac{80}{b}}(80-bt)dt=\frac{1}{2}.\frac{80^2}{b}(m) \end{cases}$

Vậy quảng đường xe chạy được là $S_3=\frac{1}{2}.80.\left(\frac{80}{a}+\frac{80}{b}\right)+80.56=40.18+80.56=5200(m)$

Câu 10.

Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc thời gian $t(h)$ có đồ thị của vận tốc như hình vẽ bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ đó.



A. $s = 26.5(km)$ **B.** $28.5(km)$

C. $27(km)$ **D.** $24(km)$

Lời giải

Theo giả thiết trong khoảng thời gian từ 0 đến 1 giờ vận tốc của vật là: $v(t) = at^2 + bt + c$

Căn cứ vào đồ thị đã cho có:

Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} v(0)=0 \\ t_0 = -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ v(t_0) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = -4a \\ a\left(-\dfrac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\dfrac{b}{2a}\right) + c = 9 \end{cases} \Leftrightarrow a = -\frac{9}{4}, b = 9, c = 0$$

Vậy $v(t) = \begin{cases} -\dfrac{9}{4}t^2 + 9t, 0 \le t \le 3 \\ v(3) = \dfrac{27}{4}, 3 \le t \le 4 \end{cases} \Rightarrow s = \int_0^3 \left(-\dfrac{9}{4}t^2 + 9t\right)dt + \int_3^4 \dfrac{27}{4}dt = \dfrac{81}{4} + \dfrac{27}{4} = 27$

Câu 11.

Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{150}t^2 + \frac{59}{75}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm Bcũng xuất phát từ O,chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a(m/s^2)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng?

A. $20m/s$ **B.** $13m/s$

C. $15m/s$ **D.** $16m/s$

Lời giải

Gọi $S_1(t)$ là phương trình chuyển động của A, $v_2(t)$ là phương trình vận tốc của B, $S_2(t)$ là phương trình chuyển động của B

$$\Rightarrow s_1(t)=\int v(t)dt=\int\left(\frac{1}{150}t^2+\frac{59}{75}t\right)dt=\frac{1}{450}t^3+\frac{59}{150}t^2+C$$

Theo đề bài ta có $s_1(0)=0\Rightarrow C=0\Rightarrow s_1(t)=\frac{1}{450}t^3+\frac{59}{150}t^2$

Ta có $v_2(t)=\int adt=at+C$

Theo đề bài $v_2(0)=0\Rightarrow C=0\Rightarrow v_2(t)=at\Rightarrow s_2(t)=\int atdt=\frac{1}{2}at^2+C$

Ta có $s_2(0)=0\Rightarrow C=0\Rightarrow s_2=\frac{1}{2}at^2$

Sau 12 s, B đuổi kịp A thì A đã chuyển động được 15 s

$$\Rightarrow s_2(12)=s_1(15)=96\Rightarrow a=\frac{4}{3}\left(m/s^2\right)\Rightarrow v_2(t)=\frac{4}{3}t\,(m/s)$$

Vậy vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A

Câu 12.

Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\frac{1}{100}t^2+\frac{13}{30}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 10 giây so với A và có gia tốc bằng $a\left(m/s^2\right)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng?

A. $15m/s$ **B.** $42m/s$

C. $9m/s$ **D.** $25m/s$

Lời giải

Gọi $S_1(t)$ là phương trình chuyển động của A, $v_2(t)$ là phương trình vận tốc của B, $S_2(t)$ là phương trình chuyển động của B

$$\Rightarrow s_1(t)=\int v(t)dt=\int\left(\frac{1}{100}t^2+\frac{13}{30}t\right)dt=\frac{1}{300}t^3+\frac{13}{60}t^2+C$$

Theo đề bài $s_1(0)=0\Rightarrow C=0\Rightarrow s_1(t)=\frac{1}{300}t^3+\frac{13}{60}t^2$

Ta có $v_2(t)=\int adt=at+C$

Theo đề bài $v_2(0)=0\Rightarrow C=0\Rightarrow v_2(t)=at\Rightarrow s_2(t)=\int atdt=\frac{1}{2}at^2+C$

Ta có $s_2(0)=0\Rightarrow C=0\Rightarrow s_2=\frac{1}{2}at^2$

Sau 15 s, B đuổi kịp A thì A đã chuyển động 25 s.

$$\Rightarrow s_2(15)=s_1(25)=\frac{375}{2}\Rightarrow a=\frac{5}{3}\left(m/s^2\right)\Rightarrow v_2(t)=\frac{5}{3}t\left(m/s\right)$$

Vậy vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A và $v_2(15)=25\ (m/s)$

Câu 13.

Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\frac{1}{120}t^2+\frac{58}{45}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O,chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a(m/s)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng?

A. $25m/s$ **B.** $30m/s$

C. $36m/s$ **D.** $21m/s$

Lời giải

Gọi $S_1(t)$ là phương trình chuyển động của A , $v_2(t)$ là phương trình vận tốc của B , $S_2(t)$ là phương trình chuyển động của B

$$\Rightarrow S_1(t)=\int v(t)dt=\int\left(\frac{1}{360}t^2+\frac{58}{45}t\right)dt=\frac{1}{240}t^3+\frac{58}{90}t^2+C$$

Theo đề bài $S_1(0)=0\Rightarrow C=0\Rightarrow S_1(t)=\frac{1}{360}t^3+\frac{58}{90}t^2$

Ta có $v_2(t)=\int adt=at+C$

Theo đề bài: $v_2(0)=0\Rightarrow C=0\Rightarrow v_2(t)=at\Rightarrow S_2(t)=\int atdt=\frac{1}{2}at^2+C$

Ta có: $S_2(0)=0\Rightarrow C=0\Rightarrow S_2=\frac{1}{2}at^2$

Sau 15s, B đuổi kịp A thì A đã chuyển động được 18s.

$$\Rightarrow S_2(15)=S_1(18)=225\Rightarrow a=2\left(m/s^2\right)\Rightarrow v_2(t)=2t\left(m/s\right)$$

Vậy vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A là $v_2(15)=30\ (m/s)$

Câu 14.

Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng nhanh dần đều (gia tốc không đổi) 10 giây sau nó đạt đến tốc độ v_0 (m/s). Từ thời điểm đó chất điểm A chuyển động thẳng đều. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 9 giây so với A và chuyển động thẳng nhanh dần đều với gia tốc $a_2=2\left(m/s^2\right)$. Sau khi B xuất phát được 6 giây thì đuổi kịp A. Tìm v_0.

A. $2m/s$ **B.** $4m/s$

C. $3m/s$ **D.** $10m/s$

Lời giải

Xét chất điểm A

Ban đầu, nó chuyển động thẳng nhanh dần đều nên $a_1 = \dfrac{v_0}{10} = 0,1v_0\left(m/s^2\right)$

Suy ra $v_1(t) = 0,1v_0 t \Rightarrow s_0 = \int_0^{10} 0,1v_0 t dt = 5v_0(m)$

Sau đó nó chuyển động thẳng đều với vận tốc $v_0(m/s)$ nên $S_1(t) = 5v_0 + v_0 t = v_0(t+5)$

Xét chất điểm $B: v_2(t) = \int a_2 dt = 2t + C \Rightarrow v_2 = 2t(m/s)$

$\Rightarrow S_2(t) = \int v_2 dt = \int 2tdt = t^2 + C$.

Theo đề bài ta có $S_2(t) = \int v_2 dt = \int 2tdt = t^2 + C$

Sau 6s từ lúc B xuất phát, B đuổi kịp, lúc này A đã chuyển động thêm 7s từ lúc chuyển động thẳng đều

Suy ra $S_2(6) = S_1(7) \Leftrightarrow 36 = 12v_0 \Leftrightarrow v_0 = 3(m/s)$

Câu 15.

Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng nhanh dần đều (gia tốc không đổi $a_1\left(m/s^2\right)$; 4 giây sau nó đạt đến tốc độ 8(m/s). Từ thời điểm đó chất điểm A chuyển động thẳng đều. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O,chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 17 giây so với A và chuyển động thẳng nhanh dần đều với gia tốc $a_2\left(m/s^2\right)$Sau khi B xuất phát được 10 giây thì đuổi kịp A. Tìm $P = 2a_2 - 4a_1$

A. $P = -2$ **B.** $P = 2$

C. $P = 0$ **D.** $P = 4$

Lời giải

Ban đầu, nó chuyển động thẳng nhanh dần đều nên $a_1 = \dfrac{8}{4} = 2\left(m/s^2\right)$

$$\Rightarrow v_1 = 2t(m/s) \Rightarrow s_0 = \int_0^4 2tdt = 16(m)$$

Sau đó nó chuyển động thẳng đều với vận tốc $8(m/s)$ nên $S_1(t) = 8t + 16$

Xét chất điểm B

$$v_2(t) = a_2 t \Rightarrow s_2(t) = \int v_2 dt = \frac{1}{2}a_2 t^2 + C \Rightarrow s_2(t) = \frac{1}{2}a_2 t^2$$

Sau 1. giây từ lúc B xuất phát, B đuổi kịp A,lúc này A đã chuyển động thêm 23 giây từ lúc bắt đầu chuyển động thẳng đều, suy ra

$$s_2(10) = s_1(23) \Leftrightarrow 50a_2 = 200 \Leftrightarrow a_2 = 4(m/s)$$

Vậy $P = 2.4 - 4.2 = 0$

Câu 16.

Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng nhanh dần đều (gia tốc không đổi $a_1\left(m/s^2\right)$,6 giây sau nó đạt đến tốc độ $12\left(m/s\right)$ và chưa gặp chất điểm B. Từ thời điểm đó chất điểm A chuyển động thẳng đều. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm BBcũng xuất phát từ O,chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn t_1 giây so với A và chuyển động thẳng nhanh dần đều với gia tốc $4\left(m/s^2\right)$. Sau khi B xuất phát được t_2 giây thì đuổi kịp A. Hỏi kết luận nào sau đây đúng?

A. $t_1 > 1$ **B.** $t_1 \le 1$

C. $t_2 < 7,5$ **D.** $t_2 > 4,5$

Lời giải

Xét chất điểm A

Ban đầu, nó chuyển động thẳng nhanh dần đều nên $a_1 = \dfrac{12}{6} = 2\left(m/s^2\right)$

Suy ra $v_1 = 2t\left(m/s\right) \Rightarrow S_0 = \int_0^6 2tdt = 36\left(m\right)$

Sau đó nó chuyển động thẳng đều với vận tốc $12\left(m/s\right)$ nên $S_1\left(t\right) = 12t + 36$

Xét chất điểm B

$$a_2 = 4 \Rightarrow v_2\left(t\right) = 4t \Rightarrow s_2\left(t\right) = \int 4tdt = 2t^2 + C \Rightarrow s_2\left(t\right) = 2t^2\left(m\right)$$

Sau t2 giây từ lúc B xuất phát, B đuổi kịpA,lúc này A đã chuyển động thêm $\left(t_1 + t_2 - 6\right)$ giây từ lúc bắt đầu chuyển động thẳng đều.

Suy ra $s_2\left(t_2\right) = s_1\left(t_1 + t_2 - 6\right) \Leftrightarrow 2t_2^2 = 12\left(t_1 + t_2\right) - 36 \Leftrightarrow t_2^2 - 6t_2 + 18 - 6t_1 = 0\left(*\right)$

Chất điểm B đuổi kịp chất điểm A thì phương trình (*) có nghiệm $t_2 > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 9 - \left(18 - 6t_1\right) = 6t_1 - 9 \ge 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 \ge \dfrac{3}{2} \\ 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow t_1 \ge \dfrac{3}{2}$$

Do $S > 0$ nên $\left(*\right)$ luôn có ít nhất một nghiệm dương và lớn hơn nghiệm còn lại với mọi $t_1 \ge \dfrac{3}{2}$. Do $t_1 + t_2 - 6 > 0, \forall t_1 \ge \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow t_2 > \underbrace{6 - t_1}_{g(t_1)} \Leftrightarrow t_2 > \max\limits_{\left[\frac{3}{2};+\infty\right)} g\left(t_1\right) = g\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{9}{2}$

Vậy $t_1 \ge \dfrac{3}{2}, t_2 > \dfrac{9}{2}$.

Câu 17.

Một viên đạn được bắn lên từ mặt đất theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu $25(m/s)$ và gia tốc là $-g$. Khi viên đạn lên đến vị trí cao nhất, nó rơi thẳng đứng xuống đất với gia tốc là g. Tính thời gian viên đạn đã bay từ lúc được bắn đến khi rơi xuống chạm đất. (Bỏ qua mọi lực ma sát, cho gia tốc trọng trường $g = 10\left(m/s^2\right)$.

A. $2,5s$ **B.** $4,0s$

C. $3,0s$ **D.** $5,0s$

Lời giải

Khi viên đạn bay lên $v_1(t) = \int -g dt = -10t + C$

Theo đề bài $v_1(0) = 25 \Rightarrow C = 25 \Rightarrow v_1(t) = -10t + 25$

Viên đạn đạt tới độ cao cao nhất thì nó dừng, tức $v = 0 \Leftrightarrow t = 2,5(s)$

Độ cao cao nhất viên đạn bay tới là $h_0 = \int_0^{2,5} v(t)dt = \dfrac{125}{4}(m)$

Khi viên đạn rơi xuống $v_2(t) = \int g dt = 10t + C$

Lúc viên đạn bắt đầu rơi xuống $v_2(0) = 0 \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow v_2(t) = 10t$

Quãng đường viên đạn rơi là $h(t) = \int v_2(t)dt = 5t^2 + C$

Ta chọn $h(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow h(t) = 5t^2$

Thời gian viên đạn rơi $5t^2 = \dfrac{125}{4} \Rightarrow t = 2,5(s)$

Vậy tổng thời giản viên đạn bay là 5s

Câu 18.

Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu $1m$. Một ô tô A đang chạy với tốc độ $v_0(m/s)$ bỗng gặp ô tô B đang dừng chờ đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -4\left(m/s^2\right)$Để 2 ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất $33m$. Tìm v_0.

A. $17m/s$ **B.** $16,25m/s$

C. $16,5m/s$ **D.** $16m/s$

Lời giải

Vận tốc của ô tô A khi hãm phanh $v(t) = \int a dt = -4t + C$

Theo đề bài $v(0) = v_0 \Rightarrow C = v_0 \Rightarrow v(t) = -4t + v_0$

Khi ô tô A dừng đã đi được khoảng thời gian là $t = \dfrac{v_0}{4} = 0,25v_0(s)$

Quãng đường khi ô tô A bắt đầu hãm phanh đến lúc dừng ô tô B $1m$ là $32m$.

$$\Rightarrow S = 32 \Leftrightarrow \int_0^{0,25v_0} v(t)dt = \int_0^{0,25v_0} -4t + v_0 = \left(-2t^2 + v_0 t\right)\Big|_0^{0,25v_0} = 32$$
$$\Leftrightarrow -0,125v_0^2 + 0,25v_0^2 = 32 \Leftrightarrow 0,125v_0^2 = 32 \Rightarrow v_0 = 16(m/s)$$

Câu 19.

Một ô tô A đang chạy thẳng với tốc độ $v_0(m/s)$ thì có ô tô B phía trước cách ô tô A $30m$ đang dừng chờ đèn đỏ. Để đảm bảo an toàn, ô tô A hãm phanh lại và chạy chậm dần đều với gia tốc $-3(m/s^2)$. Nhưng khi ô tô A còn cách ô tô B $6m$ thì đèn xanh nên ô tô B bắt đầu chạy thẳng nhanh dần đều với gia tốc $1,5(m/s^2)$ và cùng hướng với ô tô A. Giả sử ô tô A đi với vận tốc nhỏ nhất để đụng ô tô B, tính quãng đường ô tô A đã đi được từ lúc hãm phanh đến khi đụng ô tô B?

A. $3\sqrt{6}m$ **B.** $8m$

C. $2m$ **D.** $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}m$

Lời giải

Phương trình vận tốc của ô tô B là $v_2(t) = \int a dt = \frac{3}{2}t + C$. Do $v_2(0) = 0 \Rightarrow v_2(t) = \frac{3}{2}t$

Phương trình chuyển động của ô tô B là $s_2(t) = \int v(t)dt = \frac{3}{4}t^2 + C$

Đặt $s_2(0) = 0$. Khi đó $s_2(t) = \frac{3}{4}t^2$

Vận tốc của ô tô A khi hãm phanh $v_1(t) = \int a dt = -3t + C$.

Theo đề bài $v_1(0) = v_0 \Rightarrow v_1(t) = -3t + v_0$

Quãng đường ô tô B đi được từ khi hãm phanh là $S_1 = \int_0^{t_0} v_0(t)dt = \frac{-3}{2}t_0^2 + v_0 t$

Gọi vận tốc của ô tô A lúc đèn xanh là $v_A \Rightarrow v_A = -3t_0 + v_0$

Phương trình chuyển động của ô tô A đi từ lúc đèn xanh

$$s_1(s) = \int(-3t + v_A)dt = -\frac{3}{2}t^2 + v_A t + C$$

Do lúc đèn chuyển xanh ô tô A còn cách ô tô B một đoạn 6m nên

$$s_1(0) = -6 \Rightarrow s_1(t) = -\frac{3}{2}t^2 + v_A t - 6$$

Hai ô tô đụng nhau khi $s_1 = s_2 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}t^2 + v_A t - 6 = \frac{3}{4}t^2 \Leftrightarrow v_A t = 6 + \frac{9}{4}t^2 \Leftrightarrow v_A = \frac{6}{t} + \frac{9}{4}t \ge 3\sqrt{6}$

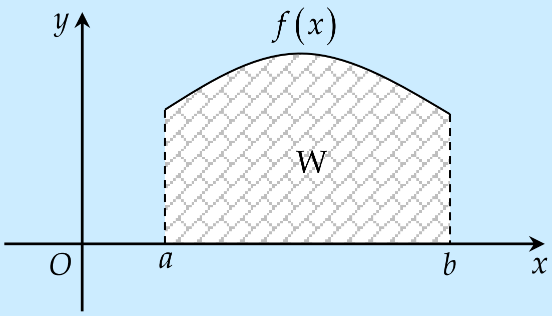
Dấu "=" xảy ra khi $\frac{6}{t} = \frac{9}{4}t \Rightarrow t = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

II. BÀI TOÁN VỀ CÔNG CỦA LỰC TÁC DỤNG VÀO VẬT.

Trong chủ đề này ta sẽ tìm hiểu một ứng dụng khác của tích phân trong các bài toán vật lý đó là tính công của một lực. Dưới đây ta sẽ cùng tìm hiểu lại một số khái niệm của công, lực trong vật lý.

- Nếu một lực không đổi F tác dụng lên vật M dọc theo một khoảng cách (độ dời) d, thì công W sinh ra trong quá trình dịch chuyển bằng tích của lực F và độ dài khoảng cách d mà nó đã tác dụng, ta có công thức $W = F.d$

  Trong đó, lực F được hiểu là tác dụng dọc theo hướng (phương) chuyển động.
- Định nghĩa trên luôn đúng khi lực F không đổi. Tuy nhiên, nhiều trường hợp lực F biến thiên trong suốt quá trình thực hiện công. Trong các tình huống như vậy, người ta thường chia quá trình này thành nhiều phần nhỏ và tính công toàn phần nhờ lấy tổng các công tương ứng với các phần được chia (được tính nhờ phép tính tích phân).
- Giả sử $f(x)$ là lực tác dụng lên vật tại vị trí x, đường đi của lực tác dụng(quỹ đạo của vật được tác dụng lực) tương ứng với trục tọa độ Ox. Khi đó, công toàn phần sinh ra trong cả quá trình chuyển động của vật từ vị trí $x = a$ đến vị trí $x = b$ là $W = \int_a^b f(x)dx$



VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1.

Một lực 40N cần thiết để kéo căng một chiếc lò xo có độ dài tự nhiên từ 10cm đến 15cm. Hãy tính công sinh ra khi kéo lò xo từ độ dài từ 15cm đến 18cm.

A. $5200\,\text{m}$ **B.** $5500\,\text{m}$ **C.** $5050\,\text{m}$ **D.** $5350\,\text{m}$

Lời giải

Ta thấy rằng theo định luật Hooke: *"Khi một lò xo bị biến dạng (nén hoặc giãn) với một độ dài x (x > 0) so với độ dài tự nhiên của lò xo thì lò xo sinh ra một lực đàn hồi có độ lớn bằng* $f(x) = kx$*, trong đó k là hệ số đàn hồi (hoặc độ cứng) của lò xo."*

Ban đầu, lò xo có độ dài tự nhiên 10cm. Dùng một lực 40N kéo giãn lò xo có độ dài 15cm thì lò xo bị kéo dãn một đoạn có độ dài 5cm = 0,05m.

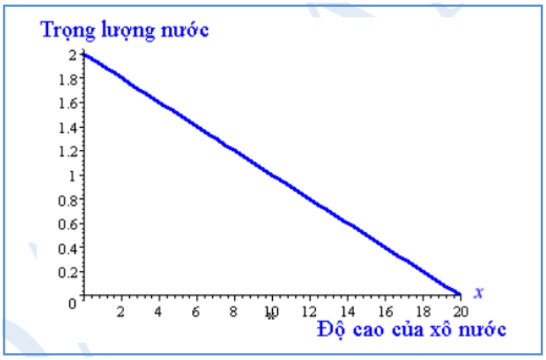
Vậy ta có $f(0,05) = 40 \Leftrightarrow 0,05.k = 40 \Leftrightarrow k = 800$. Suy ra $f(x) = 800x$.

Vậy công sinh ra khi kéo căng lò xo từ 15cm đến 18cm là

$$W=\int_{0,05}^{0,08}800x\,dx=800.\frac{x^2}{2}\Big|_{0,05}^{0,08}=1,56J.$$

Câu 2.

Người thợ hồ nâng một xô nước bị rỉ lên cao 20m với tốc độ cố định. Cho trọng lượng của xô là 3N, trọng lượng ban đầu của nước là 2N. Biết rằng xô nước bị rỉ nên lượng nước trong xô sẽ chảy ra với tốc độ không đổi trong thời gian nâng xô nước lên. Người ta ước tính rằng lượng nước trong xô sẽ thay đổi theo đồ thị là hình bên. Hỏi người thợ hồ đã dùng một công là bao nhiêu để nâng xô nước lên cao 20m, với giả sử rằng bỏ qua trọng lượng sợi dây ?



A. $5200\,m$ **B.** $5500\,m$ **C.** $5050\,m$ **D.** $5350\,m$

Lời giải

Ta thấy rằng trong suốt thời gian đưa xô nước lên độ cao 20m thì trọng lượng của xô không đổi, nhưng nước bị chảy ra liên tục nên trọng lượng nước thay đổi. Vì vậy để tính được công đưa xô nước lên cao thì ta tách làm 2 loại công: Một là công đưa xô lên, hai là công đưa nước lên.

- Vì trọng lượng xô không đổi trong suốt thời gian đưa lên cao nên công cũng không đổi và tính bằng công thức $W_{xô}=P_{xô}.h=3.20=60(Nm)$.
- Vì lượng nước giảm liên tục nên trọng lượng của nước là một hàm số $f(x)$ giảm liên tục phụ thuộc vào quãng đường x mà xô đi được.
- Theo giả thiết đồ thị biểu diễn trọng lượng xô nước là đường thẳng có dạng $f(x)=ax+b$, dựa vào đồ thị ta tìm được phương trình $f(x)=ax+b$.

Dựa vào đồ thị hàm số $f(x)=ax+b$ đi qua 2 điểm $A(0;2),B(20;0)$ nên

$$\begin{cases}a.0+b=2\\a.20+b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2\\a=-\dfrac{1}{10}\end{cases}\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{10}x+2.$$

- Công sinh ra khi đưa nước từ mặt đất lên cao 20 là:

$$\int_0^{20}f(x)dx=\int_0^{20}\left(-\frac{1}{10}x+2\right)dx=\left(-\frac{1}{20}x^2+2x\right)\Big|_0^{20}=20(Nm).$$

Vậy công toàn bộ để đưa cả xô và nước lên cao 20m là $60+20=80\left(\text{Nm}\right)$.

III. CÁC BÀI TOÁN VỀ TĂNG TRƯỞNG, PHÁT TRIỂN.

- Cho hàm số $f\left(x\right)$ biểu diễn cho sự tăng (hay giảm) số lượng của một đối tượng nào đó (số người, vi khuẩn, vi trùng, lượng nước chảy,...).
- Giá trị $f\left(x\right)$ là số lượng của đối tượng đó tại thời điểm x.
- Đạo hàm $f'\left(x\right)$ chính là tốc độ tăng (hay giảm) của đối tượng đó tại thời điểm x.
- Số lượng tăng thêm (hoặc giảm đi) của đối tượng trong khoảng $x\in\left[a;b\right]$ là:

$$\int_a^b f\left(x\right)dx$$

Câu 1.

Một nghiên cứu chỉ ra rằng sau x tháng kể từ bây giờ, dân số của thành phố A sẽ tăng với tốc độ $v\left(x\right)=10+2\sqrt{2x+1}$ (người/tháng). Dân số của thành phố sẽ tăng thêm bao nhiêu trong 4 tháng tới.

A. $5200\,\text{m}$ **B.** $5500\,\text{m}$ **C.** $5050\,\text{m}$ **D.** $5350\,\text{m}$

Lời giải

Phân tích. Giả thiết cho $v\left(x\right)=10+2\sqrt{2x+1}$ hàm biểu thị cho tốc độ tăng dân số trong tháng thứ x. Vậy nguyên hàm của $v\left(x\right)$ chính là hàm số $f\left(x\right)$ biểu thị cho dân số của thành phố sau x tháng kể từ bây giờ.

Đề bài yêu cầu tính số dân tăng thêm của thành phố trong vòng 4 tháng tới. Theo lý thuyết đã nêu thì số dân tăng thêm đó được tính theo công thức $\int_0^4 v\left(t\right)dt=f\left(4\right)-f\left(0\right)$

Chú ý rằng ta có thể tính bằng 2 cách.

- Cách 1 là tìm nguyên hàm $f\left(x\right)$, sau đó tính hiệu số $f\left(4\right)-f\left(0\right)$.
- Cách 2 là tính trực tiếp tích phân $\int_0^4 v\left(t\right)dt$.

Giải. Gọi $f\left(x\right)$ là dân số của thành phố sau x tháng kể từ bây giờ.

Ta có tốc độ thay đổi của dân số là $v\left(x\right)=10+2\sqrt{2x+1}$.

Suy ra $f\left(x\right)=\int\left(10+2\sqrt{2x+1}\right)dx=10x+2\int\sqrt{2x+1}dx$.

Mà $\int\sqrt{2x+1}dx=\frac{1}{2}\int\left(2x+1\right)^{\frac{1}{2}}d\left(2x+1\right)=\frac{1}{3}\left(2x+1\right)^{\frac{3}{2}}+C$.

Do đó $f\left(x\right)=10x+\frac{2}{3}\left(2x+1\right)^{\frac{3}{2}}+C$.

Số dân trong 4 tháng tới là $f\left(4\right)-f\left(0\right)=10.4+\frac{2}{3}\left(2.4+1\right)^{\frac{3}{2}}+C-\left(0+\frac{2}{3}+C\right)\approx 57$ người

Câu 2.

Bài toán 2: Tốc độ thay đổi của số lượng người V (tính bằng ngàn người) tham gia công tác tình nguyện ở nước Mỹ từ năm 2000 đến năm 2006 có thể được mô hình bởi hàm số $V(t)=119,85t^2-30e^t+37,26e^{-t}$ với t là năm (t = 0 ứng với năm 2000) . Hỏi số lượng người tham gia tình nguyện trong giai đoạn trên tăng lên hay giảm đi với số lượng bao nhiêu.

A. $5200\,\text{m}$ **B.** $5500\,\text{m}$ **C.** $5050\,\text{m}$ **D.** $5350\,\text{m}$

Lời giải

Sự chênh lệch của số người tham gia tình nguyện trong giai đoạn từ năm 2000 đến năm 2006 là $\int_0^6 V(t)dt=\int_0^6\left(119,85t^2-30e^t+37,261e^{-t}\right)dt$

$$=\left(\frac{119,85}{3}t^3-30e^t-37,261e^{-t}\right)\Bigg|_0^6=-3473,756166-(-67,261)\approx-3406.$$

Vậy trong khoảng thời gian từ năm 2000 đến năm 2006, số lượng người tham gia công tác tình nguyện đã giảm đi khoảng 3406 người.

Câu 3.

Tốc độ tăng các cặp đôi kết hôn (đơn vị tính: triệu người) của nước Mỹ từ năm 1970 đến năm 2005 có thể được mô hình bởi hàm số $f(t)=1,218t^2-44,72t+709,1$ với t là năm (t = 0 ứng với năm 1970) . Số lượng cặp đôi kết hôn vào năm 2005 là 59513 ngàn người.

a. Tìm một mô hình biểu thị cho số lượng các cặp đôi kết hôn của nước Mỹ.
b. Sử dụng mô hình đó để dự đoán số lượng các cặp đôi kết hôn của nước Mỹ vào năm 2012. Kết quả của bạn liệu có hợp lí? Giải thích vì sao?

A. $5200\,\text{m}$ **B.** $5500\,\text{m}$ **C.** $5050\,\text{m}$ **D.** $5350\,\text{m}$

Lời giải

a) Để tìm một mô hình cho số lượng các cặp đôi kết hôn ta tìm nguyên hàm của $f(t)$

$$F(t)=\int\left(1,218t^2-44,72t+709,1\right)dt=\frac{1,218}{3}t^3-\frac{44,72}{2}t^2+709,1t+C$$
$$=0,406t^3-22,36t^2+709,1t+C$$

- Số lượng các cặp đôi kết hôn vào năm 2005 là 59513 triệu người nên ta có $F(35)=59513\Leftrightarrow 0,406.35^3-22,36.35^2+709,1.35+C=59513\Leftrightarrow C=44678,25$
- Vậy một mô hình cần tìm là $F(t)=0,406t^3-22,36t^2+709,1t+44678,25$

b) Số lượng các cặp đôi kết hôn vào năm 2012 là $F(42)=65097,138$ triệu người

Theo báo cáo của Cục điều tra dân số nước Mỹ thì vào năm 2012 tổng số các cặp đôi kết hôn của nước Mỹ khoảng 61,047 triệu người. So với kết quả lý thuyết thì sự chênh lệch là tạm chấp nhận được.

Câu 4.

Tốc độ phát triển của số lượng vi khuẩn trong hồ bơi được mô hình bởi hàm số $B'(t)=\dfrac{1000}{(1+0,3t)^2}, t\geq 0$, trong đó B(t) là số lượng vi khuẩn trên mỗi ml nước tại ngày thứ t.

Số lượng vi khuẩn ban đầu là 500 con trên mỗi ml nước. Biết rằng mức độ an toàn cho người sử dụng hồ bơi là số vi khuẩn phải dưới 3000 con trên mỗi ml nước. Hỏi sau bao nhiêu ngày thì người ta phải xử lí và thay nước mới cho hồ bơi.

A. $5200\,m$ **B.** $5500\,m$ **C.** $5050\,m$ **D.** $5350\,m$

Lời giải

Số lượng của vi khuẩn tại ngày thứ t được mô hình bởi hàm số $B(t)$ là nguyên hàm của $B'(t)$, ta có $B(t)=\int\dfrac{1000}{(1+0,3t)^2}dt=1000\int(1+0,3t)^{-2}dt=-\dfrac{1000}{0,3(1+0,3t)}+C$.

Số lượng vi khuẩn lúc ban đầu là 500 con trên mỗi ml nước nên

$$B(0)=500\Leftrightarrow -\frac{1000}{0,3(1+0,3.0)}+C=500\Leftrightarrow C=\frac{11500}{3}.$$

Suy ra hàm số biểu thị cho số lượng vi khuẩn tại ngày thứ t là

$$B(t)=-\frac{1000}{0,3(1+0,3t)}+\frac{11500}{3}.$$

Số lượng vi khuẩn dưới 3000 con trên mỗi ml nước thì người bơi vẫn an toàn; và người bơi không an toàn khi $B(t)\geq 3000\Leftrightarrow -\dfrac{1000}{0,3(1+0,3t)}+\dfrac{11500}{3}\geq 3000$

$$\Leftrightarrow -\frac{1000}{0,3(1+0,3t)}\geq -\frac{2500}{3}\Leftrightarrow 1+0,3t\geq 4\Leftrightarrow t\geq 10.$$

Vậy vào ngày thứ 10 thì số lượng vi khuẩn sẽ là 3000 con và hồ bơi không còn an toàn, cần phải thay nước mới.

Câu 5.

Một hồ nước bị ô nhiễm được xử lý bằng một chất diệt khuẩn. Tốc độ phát triển của số lượng vi khuẩn sống sót được mô hình bởi $B'(t)=\dfrac{3000}{(1+0,2t)^2}$, $t\geq 0$ với $B(t)$ là số lượng vi khuẩn trên mỗi ml nước là t là số ngày tính từ khi hồ nước được xử lý. Biết số lượng vi khuẩn ban đầu là 10000 con/ml nước. Sử dụng mô hình này xác định số lượng vi khuẩn sau 5 ngày. Liệu số lượng vi khuẩn có thể vượt 2000 con/ml nước.

A. $5200\,m$ **B.** $5500\,m$ **C.** $5050\,m$ **D.** $5350\,m$

Lời giải

Tốc độ phát triển của số lượng vi khuẩn sống sót được mô hình bởi công thức đạo hàm sau $B'(t)=-\frac{3000}{(1+0,2t)^2}$, $t\ge 0$.

Nguyên hàm của $B'(t)$ là hàm $B(t)$ biểu thị số lượng vi khuẩn sống sót trong ngày thứ t.

Ta có $B(t)=\int\frac{-3000}{(1+0,2t)^2}dt=-3000\int(1+0,2t)^{-2}dt=15000(1+0,2t)^{-1}+C=\frac{15000}{1+0,2t}+C$

Vì số lượng vi khuẩn ban đầu là 10.000 con/ml nước nên có

$$B(0)=10000\Rightarrow 15000+C=10000\Rightarrow C=-5000.$$

Vậy hàm số biểu thị số lượng vi khuẩn sống sót tại ngày thứ t là $B(t)=\frac{15000}{1+0,2t}-5000$.

Số vi khuẩn sau 5 ngày sẽ là $B(5)=2500\text{con}/1\text{ml}$.

Như vậy số lượng vi khuẩn đã vượt qua 2000 con/ml nước.

Câu 6.

Người ta thay nước mới cho 1 bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật có độ sâu là $h_1=280\text{cm}$. Giả sử $h(t)$ là chiều cao (tính bằng cm) của mực nước bơm được tại thời điểm t giây, biết rằng tốc độ tăng của chiều cao mực nước tại giây thứ t là $h'(t)=\frac{1}{500}\sqrt[3]{t+3}$ và lúc đầu hồ bơi không có nước. Hỏi sau bao lâu thì nước bơm được $\frac{3}{4}$ độ sâu của hồ bơi?

Lời giải

Ta có chiều cao $h(t)$ của mực nước bơm được chính là nguyên hàm của tốc độ tăng $h'(t)$ của chiều cao mực nước suy ra $h(t)=\int h'(t)dt=\int\frac{1}{500}\sqrt[3]{t+3}dt=\frac{3}{2000}(t+3)^{\frac{4}{3}}+C$.

Lúc ban đầu (tại $t=0$) hồ bơi không chứa nước, nghĩa là

$$h(t)=0\Leftrightarrow\frac{3}{2000}(0+3)^{\frac{4}{3}}+C=0\Leftrightarrow C=-\frac{3^{\frac{7}{3}}}{2000}.$$

Suy ra mực nước bơm được tại thời điểm t giây là $h(t)=\frac{3}{2000}(t+3)^{\frac{4}{3}}-\frac{3^{\frac{7}{3}}}{2000}$.

Theo giả thiết, lượng nước bơm được bằng $\frac{3}{4}$ độ sâu của hồ bơi nên ta có

$$h(t)=\frac{3}{4}h_1\Leftrightarrow\frac{3}{2000}(t+3)^{\frac{4}{3}}-\frac{3^{\frac{7}{3}}}{2000}=\frac{3}{4}.280\Leftrightarrow(t+3)^{\frac{4}{3}}=140004,33\Leftrightarrow t=7234s.$$

Vậy sau khoảng thời gian 2 giờ 34 giây thì bơm được $\frac{3}{4}$ độ sâu của hồ bơi.

Câu 7.

Trong một đợt xả lũ, nhà máy thủy điện Hố Hô đã xả lũ trong 40 phút với tốc độ lưu lượng nước tại thời điểm t giây là $v(t)=10t+500\left(m^3/s\right)$. Hỏi sau thời gian xả lũ trên thì hồ chứa nước của nhà máy đã thoát đi một lượng nước là bao nhiêu ?

Lời giải

Lượng nước lũ đã xả trong khoảng thời gian 40 phút (2400 giây) sẽ bằng

$$L=\int_0^{2400} v'(t)dt=\int_0^{2400}(10t+500)dt=\left(5t^2+500t\right)\Big|_0^{2400}=3.10^7\left(m^3\right).$$

Vậy trong khoảng thời gian 40 phút, nhà máy đã xả một lượng nước là 30 triệu khối, tức là hồ chứa nước đã thoát đi 30 triệu khối nước.

Câu 8.

Trọng lượng của một bào thai người nặng khoảng 0,04 ounce cho biết (1ounce = 28,3495 gram) sau 8 tuần tuổi. Trong suốt 35 tuần tiếp theo, trọng lượng của bào thai này được dự đoán tăng với tốc độ: $B'(t)=\dfrac{2436e^{-0,193t}}{\left(1+784e^{-0,193t}\right)^2}, 8\le t\le 43$ với B(t) là cân nặng tính bằng ounce và t là thời gian tính bằng tuần. Hãy tính trọng lượng của bào thai sau 25 tuần tuổi.

Lời giải

Theo giả thiết thì trọng lượng của bào thai này được dự đoán tăng với tốc độ là hàm số $B'(t)$ nên $B(t)$ chính là nguyên hàm của $B'(t)$ từ đó suy ra $B(t)=\int\dfrac{24361e^{-0,193t}}{\left(1+784e^{-0,193t}\right)^2}dt$.

Đặt $u=1+784e^{-0,193t}$

Ta có $B\approx-16,1\int\dfrac{du}{u^2}=\dfrac{16,1}{u}+C=\dfrac{16,1}{1+784e^{-0,193t}}+C\Rightarrow B(t)\approx\dfrac{16,1}{1+784e^{-0,193t}}+C$.

Sau 8 tuần tuổi thì bào thai cân nặng khoảng 0,04 ounce nên

$$B(8)=0,04\Rightarrow\frac{16,1}{1+784e^{-0,193.8}}+C=0,04\Rightarrow C=-0,0556$$

Do đó ta có hàm số cân nặng của bào thai là $B(t)\approx\dfrac{16,1}{1+784e^{-0,193t}}-0,0556,\ 8\le t\le 43.$

Cân nặng của bào thai sau 25 tuần tuổi là $B(25)\approx\dfrac{16,1}{1+784e^{-0,193.25}}-0,0556=2,152\text{ounce}$.

IV. CÁC BÀI TOÁN TỔNG HỢP.

Câu 1.

Sau t giờ làm việc một người công nhân có thể sản xuất với tốc độ là $q(t) = 100 + e^{-0,5t}$ đơn vị sản phẩm trong 1 giờ. Giả sử người đó bắt đầu làm việc từ lúc 8 giờ sáng. Hỏi người đó sẽ sản xuất được bao nhiêu đơn vị sản phẩm giữa 9 giờ sáng và 11 giờ trưa ?

Lời giải

Gọi $S(t)$ là số đơn vị sản phẩm mà công nhân sản xuất được sau t giờ tính từ lúc 8 giờ sáng. Ta có $S'(t) = q(t) = 100 + e^{-0,5t}$

Số đơn vị sản phẩm người đó sản xuất được từ 9 giờ sáng $(t = 1)$ đến 11 giờ trưa $(t = 4)$ là

$$\int_1^4 q(t)dt = \int_1^4 \left(100 + e^{-0,5t}\right)dt = \left(100t - 2e^{-0,5t}\right)\Big|_1^4 = 200,76 \text{ đơn vị sản phẩm.}$$

Câu 2.

Qua điều tra các nhà phân tích kinh tế đã nhận định rằng tốc độ tăng trưởng kinh tế (GDP) của một quốc gia sau t năm tính từ đầu năm 2004 là $30 + \frac{1}{2}\sqrt{5+t}$ tỷ USD/năm. Biết rằng GDP của quốc gia đó vào đầu năm 2004 là 100 tỷ USD. Hãy dự đoán GDP của quốc gia đó vào đầu năm 2015.

Lời giải

Nguyên hàm của $q(t) = 30 + \frac{1}{2}\sqrt{5+t}$ là hàm số $S(t)$ mô tả GDP của quốc gia sau t năm (được tính từ năm 2004).

GDP tăng thêm tính từ năm 2004 (t = 0) đến đầu năm 2015 (t = 11) là

$$\int_0^{11} q(t)dt = \int_0^{11}\left(30 + \frac{1}{2}\sqrt{5+t}\right)dt = \left(30t + \frac{(5+t)^{\frac{3}{2}}}{3}\right)\Bigg|_0^{11} = 347,6 \text{ tỷ USD.}$$

Như vậy, tổng giá trị GDP tính đến đầu năm 2015 bằng $347,6 + 100 = 447,6$ tỷ USD.

Bình luận. *Qua bài toán này ta cần lưu ý:*

- Một là, ta cần hiểu đúng ý nghĩa của hàm $S(t) = \int q(t)dt$, đó là sản lượng GDP của quốc gia làm ra tính đến năm thứ t, chứ không phải là sản lượng GDP làm được trong năm thứ t, hai điều đó hoàn toàn khác nhau.
- Hai là, nếu hiểu được $S(t)$ là sản lượng GDP của quốc gia tính đến năm thứ t thì giá trị GDP tính đến đầu năm 2015 sẽ bằng GDP tính đến năm 2004 cộng với lượng GDP tăng thêm từ năm 2004 đến đầu năm 2015.

Tìm hiểu về chi phí cận biên và doanh thu cận biên trong sản xuất kinh tế

Để sản xuất x sản phẩm A, ta cần chi phí là m đồng. Nếu ta tăng sản lượng sản xuất lên 1 đơn vị thành x + 1 sản phẩm thì cần chi phí tương ứng là n đồng. Khi đó, mức tăng chi phí n - m được gọi là chi phí cận biên khi sản xuất x + 1 sản phẩm (tăng từ x lên x + 1 sản phẩm). Ta xem ví dụ minh họa bằng bảng sau:

Số lượng sản phẩm sản xuất	Tổng chi phí (đồng)	Chi phí cận biên(đồng)
0	0	
1	15	15
2	26	11
3	34	8
4	41	7
5	49	8
6	59	10
7	47	12
8	61	14
9	77	16
10	95	18

- Theo bảng trên, khi sản xuất tăng từ 0 đến 1 sản phẩm thì chi phí tăng thêm 15 đồng, suy ra chi phí cận biên của 1 sản phẩm được sản xuất là 15 đồng. Tương tự, khi sản xuất tăng từ 1 đến 2 sản phẩm thì chi phí tăng thêm 11 đồng, đó chính là chi phí cận biên khi sản xuất 2 sản phẩm,...
- Nếu gọi $q(x)$ là **chi phí cận biên** khi sản xuất x sản phẩm thì **nguyên hàm** của $q(x)$ chính là **tổng chi phí** để sản xuất x sản phẩm.
- Số liệu bảng trên là một ví dụ trong thực tế, khi sản xuất tăng từ 1 đến 4 sản phẩm thì chi phí cận biên sẽ giảm nhưng khi số lượng sản phẩm làm ra tăng từ 5 trở lên thì chi phí cận biên bắt đầu tăng trở lại. Một trong những lí do dẫn đến hiện tượng này là khi số lượng sản phẩm tăng từ 1 đến 4 thì công ty sử dụng công nghệ đơn giản nên tiết kiệm được chi phí, nhưng khi số lượng sản phẩm sản xuất tăng cao thì chi phí quản lí sẽ tăng cao.
- Ngoài ra, khi tính toán số lượng sản phẩm cần sản xuất, công ty còn phải dự báo được số lượng sản phẩm bán ra được và doanh thu có tăng thêm nhiều hay ít khi tăng số lượng sản phẩm sản xuất.
- Doanh thu cận biên là mức doanh thu tăng thêm khi tăng lượng bán thêm 1 sản phẩm, ta có ví dụ qua bảng sau:

Số lượng sản phẩm bán được	Đơn giá	Tổng doanh thu	Doanh thu cận biên
0	-	0	
1	21	21	21
2	20	40	19
3	19	57	17
4	18	72	15
5	17	85	13
6	16	96	11
7	15	105	9
8	14	112	7
9	13	117	5
10	12	120	3

- Theo bảng trên, khi tăng số lượng bán từ 1 đến 2 sản phẩm, thì doanh thu tăng từ 21 đồng đến 40 đồng, như vậy mức tăng thêm 40 - 21 = 19 đồng gọi là doanh thu cận biên khi bán được 2 sản phẩm, tương tự doanh thu cận biên khi bán được 4 sản phẩm là 15 đồng.

Gọi $f(x)$ *là hàm doanh thu cận biên khi bán được x sản phẩm, khi đó nguyên hàm của* $f(x)$ *chính là tổng doanh thu khi bán được x sản phẩm.*

- Trong thực tế không phải sản xuất càng nhiều sản phẩm thì doanh thu cận biên và tổng doanh thu sẽ càng cao, mà nó phụ thuộc vào nhu cầu có khả năng thanh toán của người tiêu dùng. Mặt khác, nhu cầu có khả năng thanh toán của người tiêu dùng lại tùy thuộc vào giá sản phẩm, nếu giá sản phẩm thấp thì người tiêu dùng sẽ mua nhiều, còn giá sản phẩm tăng cao thì người tiêu dùng sẽ mua ít lại. Vì vậy, một doanh nghiệp thường hạ giá bán khi số lượng sản phẩm bán ra tăng lên, điều này dẫn đến mối quan hệ giữa chi phí cận biên và doanh thu cận biên, đồng thời ảnh hưởng đến số lượng sản phẩm cần sản xuất.
- Để hiểu rõ hơn điều mới nói, chúng ta quan sát cả 2 bảng trên, khi số sản phẩm tăng lên 2 thì chi phí tăng thêm 11 đồng, doanh thu tăng thêm 19 đồng, vậy công ty có lời thêm 19 - 11 = 8 đồng, điều này khuyến khích công ty sản xuất 2 sản phẩm. Khi tăng số lượng sản phẩm từ 5 đến 6 thì chi phí tăng thêm 10 đồng, doanh thu tăng thêm 11 đồng, khi đó công ty chỉ lời thêm 11 - 10 = 1 đồng, thấp hơn nhiều so với mức tăng từ 1 lên 2 sản phẩm. Và khi tăng số lượng sản phẩm từ 7 lên 8 sản phẩm thì chi phí tăng thêm 14 đồng, nhưng doanh thu chỉ tăng thêm 7 đồng, vậy doanh thu đã giảm đi 7 - 14 = -7 đồng. Như vậy , công ty sẽ tính toán số lượng sản phẩm sản xuất sao cho doanh thu cận biên lớn hơn chi phí cận biên, thậm chí mức

chênh lệch giữa doanh thu cận biên và chi phí cận biên đủ lớn để công ty "có động lực" sản xuất nhiều sản phẩm.

Câu 3.

Một công ty sản xuất sản phẩm A, giả sử chi phí cận biên khi x sản phẩm được sản xuất là $q(x)=x^3-6x^2+40$ USD/ sản phẩm. Hỏi tổng chi phí sản xuất sẽ tăng lên bao nhiêu nếu sản phẩm sản xuất ra tăng từ 3 sản phẩm đến 7 sản phẩm ?

Lời giải

Gọi $S(x)$ là hàm tổng chi phí khi sản xuất x sản phẩm, ta có $S'(x)=q(x)$

Chi phí tăng thêm khi tăng sản lượng sản xuất từ 3 sản phẩm đến 7 sản phẩm là

$$\int_3^7 q(x)dx=\int_3^7\left(x^3-6x^2+40\right)dx=\left.\left(\frac{x^4}{4}-2x^3+40x\right)\right|_3^7=108\text{ USD}.$$

Bình luận. *Qua bài toán này ta cần lưu ý:*

- Để giải được bài toán này ta cần hiểu rõ khái niệm chi phí cận biên là mức chi phí thay đổi trong tổng chi phí khi sản xuất tăng thêm 1 đơn vị sản phẩm.
- Nguyên hàm của hàm chi phí cận biên $q(x)$ chính là hàm tổng chi phí $S(x)$ khi sản xuất x đơn vị sản phẩm.

Câu 4.

Một công ty có doanh thu cận biên ở mỗi mức sản lượng x được xác định dưới dạng hàm số $f(x)=\frac{24}{x+1}(x>0)$, với x là số lượng sản phẩm được bán ra. Hỏi tổng doanh thu của công ty khi bán ra 100 sản phẩm là bao nhiêu ?

Lời giải

Hàm tổng doanh thu $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ nên ta có

$$F(x)=\int f(x)dx=\int\left(\frac{24}{x+1}\right)dx=24\ln|x+1|+C.$$

Hiển nhiên rằng tổng doanh thu sẽ bằng 0 khi số lượng sản phẩm bán ra là bằng 0

$$F(0)=0\Leftrightarrow 24\ln|0+1|+C=0\Leftrightarrow C=0\Rightarrow F(x)=24\ln|x+1|.$$

Vậy khi 100 sản phẩm được bán ra thì doanh thu sẽ là

$$F(100)=24\ln|x+1|=110,76 \text{ đơn vị tiền tệ.}$$

Hàm doanh thu cận biên $f(x)=58-x$.

Câu 5.

Một doanh nghiệp sản xuất mặt hàng với chi phí cận biên được mô tả bởi hàm số $f(x)=\frac{1}{10}\left(x^2-16x+93\right)$, với x là số sản phẩm sản xuất. Giả sử rằng doanh nghiệp bán được hết số lượng sản phẩm sản xuất được. Biết rằng doanh thu cận biên được mô tả bởi hàm số $g(x)=\left(\frac{4}{5}\right)^{x-8}+5$, với x là số lượng sản phẩm được bán ra. Giả sử rằng tổng chi phí khi chưa sản xuất sản phẩm nào là 0 đồng và tổng doanh thu khi chưa bán được sản phẩm nào là 0 đồng.

a) Hỏi khi sản xuất 8 sản phẩm và bán hết thì doanh nghiệp thu được lợi nhuận là bao nhiêu ?

b) Lập bảng tính chi phí cận biên và doanh thu cận biên khi sản xuất và bán được số lượng từ 10 đến 18 sản phẩm. Hỏi doanh nghiệp có nên tăng sản lượng lên 15 sản phẩm hay không ?

Lời giải

Nguyên hàm của $f(x)$ là hàm số $F(x)$ tổng chi phí khi sản xuất x sản phẩm

$$F(x)=\int f(x)dx=\int\frac{1}{10}\left(x^2-16x+93\right)dx=\frac{1}{10}\left(\frac{x^3}{3}-8x^2+93x\right)+C.$$

Vì $F(0)=0\Leftrightarrow\frac{1}{10}\left(\frac{0^3}{3}-8.0^2+93.0\right)+C=0\Leftrightarrow C=0$. Suy ra $F(x)=\frac{1}{10}\left(\frac{x^3}{3}-8x^2+93x\right)$.

Nguyên hàm của hàm doanh thu cận biên $g(x)=\left(\frac{4}{5}\right)^{x-8}+5$ là hàm tổng doanh thu $G(x)$

Ta có $G(x)=\int g(x)dx=\int\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{x-8}+5\right]dx=\frac{1}{\ln\frac{4}{5}}\left(\frac{4}{5}\right)^{x-8}+5x+C$.

Kết hợp điều kiện ban đầu $G(0)=0$ suy ra $\frac{1}{\ln\frac{4}{5}}\left(\frac{4}{5}\right)^{-8}+5.0+C=0\Leftrightarrow C=-\frac{1}{\ln\frac{4}{5}}\left(\frac{4}{5}\right)^{-8}$

$$\Rightarrow G(x)=\frac{1}{\ln\frac{4}{5}}\left(\frac{4}{5}\right)^{x-8}+5x-\frac{1}{\ln\frac{4}{5}}\left(\frac{4}{5}\right)^{-8}.$$

Lợi nhuận khi sản xuất và bán hết 8 sản phẩm là $G(8)-F(8)=21,96$ đồng.

b) Giả sử rằng số sản phẩm bán được bằng số sản phẩm sản xuất, ta có bảng sau

Số lượng sản phẩm	Chi phí cận biên	Doanh thu cận biên	Lợi nhuận tăng thêm
10	3,3	5,64	**2,34**
11	3,8	5,51	**1,71**
12	4,5	5,41	**0,91**
13	5,4	5,33	**-0,07**
14	6,5	5,26	**-1,24**
15	7,8	5,21	**-2,59**
16	9,3	5,17	**-4,13**
17	11	5,13	**-5,87**
18	12,9	5,11	**-7,79**

Quan sát bảng số liệu trên, khi số lượng sản phẩm sản xuất và bán ra tăng đến 13 sản phẩm thì **mức tăng lợi nhuận bị âm**. Như vậy, doanh nghiệp chỉ nên sản xuất tối đa 12 sản phẩm, không nên sản xuất đến 15 sản phẩm.

Câu 6.

Tại 1 công ty, giá bán P của một đơn vị sản phẩm của một mặt hàng phụ thuộc vào số lượng sản phẩm x được bán. Ước tính rằng nếu sản phẩm được bán ra với tốc độ thay đổi của giá mỗi sản phẩm được tính theo công thức $\frac{-214x}{\sqrt{24+x^2}}$ (USD/sản phẩm). Hãy xác định giá khi 10 sản phẩm bán ra, biết nếu rằng một sản phẩm bán ra giá bán sẽ là 5600 (USD).

Lời giải

Gọi x là số sản phẩm bán ra và $P(x)$ là giá bán của mỗi sản phẩm

Theo đề ta có $P'(x)=\frac{-214x}{\sqrt{24+x^2}} \Rightarrow P(x)=\int P'(x)dx=\int \frac{-214x}{\sqrt{24+x^2}}dx=-214\int \frac{x}{\sqrt{24+x^2}}dx$.

Đặt $t=24+x^2 \Rightarrow dt=2xdx \Rightarrow P(x)=-214\int \frac{1}{2\sqrt{t}}dt=-214\sqrt{t}+C=-214\sqrt{24+x^2}+C$.

Nếu chỉ có 1 sản phẩm được bán ra thì giá là

$$P(1)=5600 \Leftrightarrow 5600=-214\sqrt{24+1}+C \Leftrightarrow C=6670.$$

Vậy $P(x)=-214\sqrt{24+x^2}+6670$. Giá bán mỗi sản phẩm khi 10 sản phẩm được bán ra là

$$P(10)=-214\sqrt{24+10^2}+6670=4287 \text{ USD}.$$

Câu 7.

Tập đoàn dầu khí Việt Nam PVC dự định đầu tư một khu sản xuất, chế biến dầu thô tại Quảng Ngãi. Giả sử sau t năm đầu tư, dự án đầu tư lần một sẽ phát sinh lợi nhuận với tốc độ $P_1(t) = 50 + t^2$ trăm đô la/năm, Tiếp sau đó dự án lần hai sẽ phát sinh lợi nhuận với tốc độ $P_2(t) = 200 + 5t$ trăm đô la/năm. Biết sau thời gian t năm thì tốc độ lợi nhuận của dự án hai bằng một nửa với tốc độ lợi nhuận với dự án một. Tính lợi nhuận vượt thực tế cho khoảng thời gian trên?

Lời giải

Khoảng thời gian để tốc độ sinh lợi nhuận để dự án hai bằng một nửa dự án lần một khi:

$$P_1(t) = 2P_2(t) \Leftrightarrow 50 + t^2 = 400 + 10t$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 10t - 350 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 5 + 5\sqrt{15} \\ t = 5 - 5\sqrt{15} \end{array}\right. \Rightarrow t = 5 + 5\sqrt{15} \text{ năm.}$$

Lợi nhuận vượt trong khoảng thời gian $0 \le t \le 5 + 5\sqrt{15}$ sẽ xác định bằng tích phân sau:

$$L = \int_0^{5+5\sqrt{15}} \left[P_2(t) - P_2(t)\right]dt = \int_0^{5+5\sqrt{15}} \left[(400 + 10t) - (50 + t^2)\right]dt$$

$$= \int_0^{5+5\sqrt{15}} (350 + 10t - t^2)dt = \left(350t + 5t^2 - \frac{1}{3}t^3\right)\Bigg|_0^{5+5\sqrt{15}} = 6674.6$$

Câu 8.

Trong mạch máy vi tính, cường độ dòng điện (đơn vị mA) là một hàm số theo thời gian t như sau: $i = 0.3 - 0.2t$. Hỏi tổng điện tích đi qua một điểm trong mạch trong 0.05(s) là bao nhiêu?

Lời giải

Ta có biểu thức tọa độ q như sau $q = \int idt = \int (0.3 - 0.2t)dt = 0.3t - 0.1t^2 + K$.

Khi $t = 0 \Rightarrow q = 0 \Rightarrow K = 0.$ Vậy ta có: $q = 0.3t - 0.1t^2$

$$\Rightarrow q_{t=0.05} = 0.3 \times 0.05 - 0.1 \times (0.05)^2 = 0.01475(\text{mC})$$

(Đơn vị đo là mili-coulomb vì cường độ dòng điện *i* là mA)

Chọn C.

Câu 9.

Hiệu điện thế đi qua tụ điện có điện dung 8.5(nF) đặt trong mạch thu sóng FM gần bằng 0. Nếu cường độ dòng điện $i = 0.042t(\text{mA})$ nạp vào tụ. Tìm hiệu điện thế sau $2\mu s$.

Lời giải

Ta có: hiệu điện thế V_C có biểu thức như sau $V_C = \frac{1}{C}\int idt$.

Ta lưu ý các đại lượng vật lý sau $\begin{cases} 1nF = 10^{-9}F \\ 1\mu s = 10^{-6}s \\ 0.042t(mA) = 0.042\times 10^{-3}t(A) \end{cases}$

Ta có $V_C = \dfrac{0.042\times 10^{-3}}{8.5\times 10^{-9}}\int t dt = 4.94\times 10^3\dfrac{t^2}{2} + K = 2.47\times 10^3 t^2 + K$.

Theo giả thiết: $t = 0 \Rightarrow V_C = 0 \Rightarrow K = 0 \Rightarrow V_C = 2.47\times 10^3 t^2$.

Khi $t = 2\mu s$, ta sẽ được $V_C = 2.47\times 10^3\left(2\times 10^{-6}\right)^2 = 9.882\times 10^{-9} = 9.88(nV)$.

Câu 10.

Trong mạch các máy tivi, cường độ dòng điện (đơn vị mA) là một biểu thức hàm số theo thời gian t cho như sau: $i = 0.5 - 0.1t$. Hỏi điện tích đi qua một điểm trong mạch trong thời gian 0.03(s) là bao nhiêu?

Lời giải

Ta có biểu thức điện tích q là $q = \int i dt = \int (0.5 - 0.1t) dt = 0.5t - 0.05t^2 + K$.

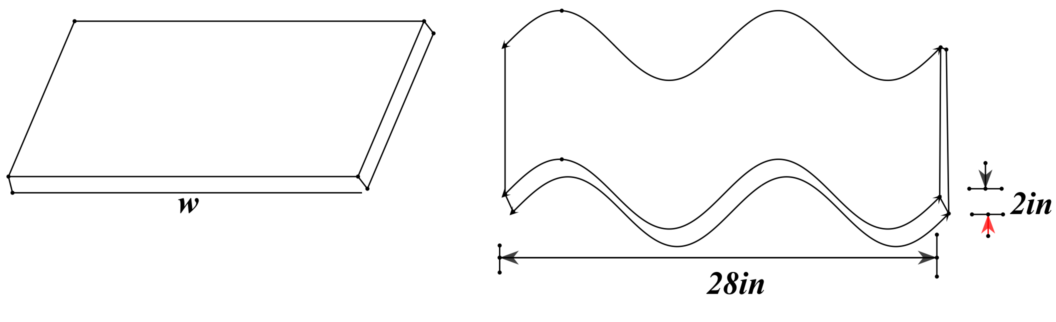
Khi $t = 0, q = 0 \to K = 0$. Vậy ta được $q = 0.5t - 0.05t^2$

$$\Rightarrow q_{t=0.03} = 0.5\times 0.03 - 0.05\times(0.03)^2 = 0015(mC)$$

Câu 11.

Một nhà sản xuất tấm lợp kim loại bằng tôn có chiều rộng 28inch và cao 2inch, bề mặt tấm lợp được dàn bằng máy theo phương trình máy tính lập trình trước mà tập hợp các điểm trên bề mặt tấm lợp đều thuộc đồ thị của hàm số $y = \sin\dfrac{\pi x}{7}$. Từ một tấm phôi kim loại phẳng có chiều dài w. Tính chiều dài cần thiết của tấm phôi kim loại để chế tạo được tấm lợp theo yêu cầu trên, biết rằng độ dài của đường cong $y = f(x)$ trên đoạn [a;b] được xác định bởi công thức $L = \int_0^b \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2} dx$

Lời giải



Tấm lợp có độ dài 28inch và các điểm trên mặt tấm lợp thuộc đồ thị $y = \dfrac{\pi x}{7}$ nên ta có thể chọn trục Ox sao cho O nằm ở mép đầu của tấm lợp, điểm còn lại ở mép bên kia sẽ có hoành độ là 28.

Ta có $y'=\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi x}{7}$ do đó: $w=\int\limits_0^{28}\sqrt{1+\left(\frac{\pi}{7}+\cos\frac{\pi x}{7}\right)^2}dx$.

Chọn C.

Câu 12.

Một nhà nghiên cứu ước tính rằng sau t giờ kể từ 0h đêm, nhiệt độ của thành phố Hồ Chí Minh được cho bởi hàm $C(t)=40-\frac{2}{3}(t-10)^2$ (độ C) với $0\le t\le 24$. Nhiệt độ trung bình của thành phố từ 8h sáng đến 5h chiều là?

Lời giải

Nhiệt độ trung bình từ a giờ đến b giờ tính theo công thức $\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b\left[C(t)\right]dt$.

Áp dụng vào bài ta có nhiệt độ trung bình cần tính là

$$\frac{1}{8-5}\int\limits_5^8\left[C(t)\right]dt=\frac{1}{8-5}\int\limits_5^8\left[40-\frac{2}{3}(t-10)^2\right]dt=31,33\ .$$

Câu 13.

Bến xe Quyết Thắng quyết định sẽ đầu tư một khu trung tâm thương mại Quyết Thắng Mart tại trung tâm Thị trấn Vạn Giã huyện Vạn Ninh, tỉnh Khánh Hòa. Giả sử như sau n năm đầu tư, lợi nhuận phát sinh trong lần đầu tư đầu tiên với tốc độ là $P_1(n)=2n^2+5$ trăm đô la/năm, tiếp sau đó là dự án đầu tư lần hai thì phát sinh lợi nhuận có tốc độ $P_2(n)=20n+170$ trăm đô la/năm. Tính lợi nhuận vượt thực tế cho khoảng thời gian trên, biết sau thời gian n năm thì tốc độ lợi nhuận của lần đầu tư hai gấp 10 lần tốc độ lợi nhuận lần đầu tiên.?

Lời giải

Khoảng thời gian để tốc độ lợi nhuận của dự án hai gấp 10 lần tốc độ lợi nhuận dự án đầu tiên $P_2(n)=10P_1(n)\Leftrightarrow 20n+170=10\left(2n^2+5\right)$

$$\Leftrightarrow 20n^2-20n-120=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=3\\ n=-2\end{array}\right.\Rightarrow n=3$$

Lợi nhuận vượt trong khoảng thời gian trên $0\le n\le 3$ sẽ được xác định bằng tích phân sau:

$$I=\int\limits_0^3\left[P_2(n)-P_1(n)\right]dn=\int\limits_0^3\left[(170+20n)-\left(2n^2+5\right)\right]dn$$

$$=\int\limits_0^3\left(165+20n-2n^2\right)dn=\left(165n+10n^2-\frac{2}{3}n^3\right)\Bigg|_0^3=567.$$

Câu 14.

Một hạt electron có điện tích âm là $1,6.10^{-19}C$. Người ta tiến hành tách hai electron từ $1pm$ đến $4pm$. Hỏi công sinh ra là bao nhiêu?

Lời giải

Ta nhắc lại đơn vị "pm" là đơn vị đo pico-metre, hay $10^{-12}\left(\text{metre}\right)$.

Ta nêu ra các đại lượng $\begin{cases} a = 1\times10^{-12}\,\text{m} \\ b = 4\times10^{-12}\,\text{m} \\ k = 9\times10^{9} \\ q_1 = q_2 = 1.6\times10^{-19}\,\text{C} \end{cases}$

Lực tương tác giữa hai điện tích là $F(x) = k\dfrac{q_1q_2}{x^2}$ với x là khoảng cách giữa hai điện tích.

Vậy ta được công $A = \int\limits_a^b \dfrac{kq_1q_2}{x^2}dx$.

Thay vào ta có $A = \int\limits_{1\times10^{-12}}^{4\times10^{-12}} \dfrac{\left(9.10^{9}\right)\left(-1.6\times10^{-19}\right)^2}{x^2}dx = \left(2,304\times10^{-28}\right)\left(\dfrac{-1}{x}\right)\Bigg|_{1.10^{-12}}^{4.10^{-12}} = 1,728.10^{-16}\left(\text{J}\right)$.

Chọn B.

Câu 15.

Qua theo dõi diễn biến sản xuất lúa gạo ở huyện V từ đầu năm đến nay, tổng sản lượng lúa của huyện V đang ở vụ Hè-Thu được mô tả bởi $T_H\left(x\right) = 175x^2 + 275$ (tấn) và chỉ bằng 75% so với chỉ tiêu của vụ Đông-Xuân $T_D\left(x\right) = 100x^2 + 400x + 900$ (tấn). tính sản lượng thực tế trong thời gian sản xuất, biết x là số tháng sản xuất $\left(1 \le x \le 12\right)$

Lời giải

Thời gian sản xuất để tổng lượng lúa của huyện V đang ở vụ Hè-Thu chỉ bằng 75% so với chỉ tiêu của vụ Đông-Xuân $T_H\left(x\right) = 75\%T_D\left(x\right) \Leftrightarrow 175x^2 + 275 = 0,75\left(100x^2 + 400x + 900\right)$

$$\Leftrightarrow 100x^2 - 300x - 400 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -1 \end{array}\right. \Rightarrow x = 4$$

Sản lượng thực tế trong thời gian sản xuất $1 \le x \le 4$ của 2 vụ mùa sẽ được xác định bằng tích phân sau:

$$J = \int\limits_1^4 \left[T_D\left(x\right) - T_H\left(x\right)\right]dx = \int\limits_1^4 \left[\left(100x^2 + 400x + 900\right) - \left(175x^2 + 275\right)\right]dx$$

$$= \int\limits_1^4 \left(625 + 400x - 75x^2\right)dx = \left(625x + 200x^2 - 25x^3\right)\Big|_1^4 = 3300$$

Câu 16.

Công ty Acos một dự án đầu tư, sau thời gian t (năm) kể từ khi bắt đầu dự án cho lợi nhuận $K\left(t\right)$ và tốc độ sinh lợi nhuận là $K'\left(t\right) = 100\left(t^3 + t^2\right)$ (triệu đồng/năm). Tính lợi nhuận công ty A thu về từ dự án này ở năm thứ 10?

Lời giải

Ta có $K\left(t\right) = \int 100\left(t^3 + t^2\right)dt = 25t^4 + \dfrac{100}{3}t^3 + C$, lúc bắt đầu dĩ nhiên lợi nhuận bằng 0 nên

$$K(0)=0\Rightarrow C=0\Rightarrow K(t)=\int 100\left(t^3+t^2\right)dt=25t^4+\frac{100}{3}t^3.$$

Lợi nhuận mà công ty A thu về kể từ khi bắt đầu đến năm thứ 10 là $K(10)=283333$ triệu.

Câu 17.

Công suất điện p tạo ra từ một điện trở nào đó xác định bởi $p=3\int\frac{\sin(\pi t)}{2+\cos(\pi t)}dt$. với t là thời gian. Hãy biểu diễn p là một hàm số theo t.

Lời giải

Ta có $p=3\int\frac{\sin(\pi t)}{2+\cos(\pi t)}dt$.

Đặt $u=2+\cos\pi t\Rightarrow du=-\pi\sin\pi t$. Vậy ta có

$$p=3\int\frac{\sin(\pi t)}{2+\cos(\pi t)}dt=-\frac{3}{\pi}\int\frac{-\pi\sin\pi t}{2+\cos(\pi t)}dt=-\frac{3}{\pi\left(\ln\left(2+\cos(\pi t)\right)\right)}+K$$

Vậy $p=-\frac{3}{\pi}\left(\ln\left(2+\cos\pi t\right)\right)+K$.

Câu 18.

Người ta đặt vào đoạn mạch một hiệu điện thế xoay chiều $u=U_0\sin\frac{2\pi}{T}t$. Khi đó trong mạch có dòng điện xoay chiều $i=I_0\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)$ với φ là độ lệch giữa dòng điện và hiệu điện thế. Hãy tính công của dòng điện xoay chiều thực hiện trên đoạn mạch đó trong thời gian một chu kì.

Lời giải

Ta có $A=\int_0^T u.idt=\int_0^T U_0I_0\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)\sin\frac{2\pi}{T}tdt$

$$=U_0I_0\int_0^T\frac{1}{2}\left(\cos\varphi-\cos\left(\frac{4\pi}{T}t+\varphi\right)\right)dt=\frac{U_0I_0}{2}\int_0^T\left(\cos\varphi-\cos\left(\frac{4\pi}{T}t+\varphi\right)\right)dx$$

$$=\frac{U_0I_0}{2}\left(t.\cos\varphi-\frac{T}{4\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{T}t+\varphi\right)\right)\Bigg|_0^T=\frac{U_0I_0}{2}T.\cos\varphi.$$

Câu 19.

Người ta tiến hành một thí nghiệm. Cho một dòng điện xoay chiều có phương trình $i=I_0\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)$ chạy qua một mạch có điện trở thuần R. Hãy tính nhiệt lượng Q tỏa ra trên mạch đó trong thời gian chu kỳ T.

Lời giải

Để tính nhiệt lượng Q tỏa ra ta phải tính tích phân cận từ t = 0 đến t = T.

Ta có $Q = \int_0^T R.i^2 dt = \int_0^T RI_0^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)dt = RL_0^2 \int_0^T \frac{1 - \cos 2\left(\frac{2\pi}{T} + \varphi\right)}{2}dt$

$$= \frac{RI_0^2}{2}\left(t - \frac{T}{4\pi}\sin 2\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)\right)\Bigg|_0^T = \frac{RI_0^2}{2}T.$$

Câu 20.

Một công ty sở hữu một loại máy, biết rằng sau thời gian t năm thì nó sinh ra doanh thu $R(t)$ có tốc độ doanh thu là $R'(t) = 5000 - 20t^2$ (đô la/năm). Biết chi phí hoạt động và chi phí bảo dưỡng của máy sau t năm là $C(t)$ có tốc độ là $C'(t) = 2000 + 10t^2$ (đô la/năm). Hỏi sau bao nhiêu năm thì máy không còn sinh lãi nữa. Tính tiền lãi thực sinh ra của máy trong khoảng thời gian từ lúc bắt đầu đến khi máy không còn sinh lãi.

Lời giải

Lợi nhuận mà máy sinh ra sau t năm hoạt động là $P(t) = R(t) - C(t)$

Tốc độ lợi nhuận sau t năm là

$$P'(t) = R'(t) - C'(t) = \left(5000 - 20t^2\right) - \left(2000 + 10t^2\right) = 3000 - 30t^2 .$$

Việc máy không còn sinh lãi nữa khi

$$P'(t) = 0 \Leftrightarrow 3000 - 30t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 100 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 10 \\ t = -10(\text{loai}) \end{array}\right. .$$

Vậy sau 10 năm thì việc sinh lợi của máy không còn nữa.

Như vậy tiền lãi thực trên khoảng thời gian $0 \le t \le 10$ là $P(10) - P(0)$

Được tính bằng tích phân

$$P(10) - P(0) = \int_0^{10} P'(t)dt = \int_0^{10}\left(3000 - 30t^2\right)dt = \left(3000t - 10t^3\right)\Big|_0^{10} = 20000 \text{ đô.}$$

Câu 21.

Một người bán tạp hóa nhận một kiện hàng gồm 10.000 kg gạo và số gạo sẽ bán hết trong vòng 5 tháng, với tốc độ 2000 kg/tháng. Nếu chi phí lưu trữ của 1 cent/kg/tháng, thì người đó phải trả bao nhiêu chi phí lưu trữ trong vòng 5 tháng?

Lời giải

Gọi $SS(t)$ là tổng chi phí lưu trữ (đô la) sau t tháng. Vì gạo được bán với tốc độ không đổi 2000kg/tháng, số kg gạo được lưu trữ sau t tháng là $10000 - 2000t$.

Vì chi phí lưu trữ là 1 cent/kg/ tháng, nên tốc độ thay đổi chi phí theo thời gian

$S'(t) =$ (chi phí hằng tháng/kg). (Số kg)= 0,01(10000-2000t).

Do đó, $S(t)$ là một nguyên hàm của $0,01(10000 - 2000t) = 100 - 20t$, tức là

$$S(t) = \int S'(t)dt = \int(100 - 20t)dt = 100t - 10t^2 + C .$$

Ta lại có, thời điểm hàng gửi tới (khi t = 0) thì không có chi phí lưu trữ, vì vậy

$$0 = 100\times 0 - 10\times 0^2 \Rightarrow C = 0$$

Vậy $S(t) = 100t - 10t^2$.

Do đó tổng chi phí trong 5 tháng tới là $S(5) = 100\times 5 - 10\times 5^2 = 25$ đô la.

Câu 22.

Tại một nhà máy nào đó, người ta ước tính rằng khi sản xuất và bán q sản phẩm thì doanh thu cận biên là $-4q + 4000(\text{USD / đvsp})$ và chi phí cận biên là $2q - 1200(\text{USD / đvsp})$. Biết rằng khi sản xuất và bán ra 5 đơn vị sảm phẩm thì lợi nhuận thu được là 50000(USD). Hãy biểu diễn hàm lợi nhuận và nhà sản xuất nên sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất và tìm lợi nhuận lớn nhất đó?

Lời giải

Gọi $P(q)$ là tổng lợi nhuận của sản phẩm khi sản xuất q sản phẩm.

Ta có tốc độ thay đổi doanh thu là $P'(q) = -4q + 4000 - (2q - 1200) = -6q + 5200$.

$$\Rightarrow P(q) = \int P'(q)dq = \int(-6q + 5200)dq = -3q^2 + 5200q + C$$

Ta lại có, lợi nhuận khi sản xuất ra 5 đơn vị sản phẩm là 50000 USD, nên

$$P(5) = 50000 \Rightarrow C = 24075$$

Vậy ta có hàm tổng lợi nhuận của công ty là:

$$P(q) = -3q^2 + 5200q + 24075 \Rightarrow P'(x) = -6q + 5200 = 0 \Rightarrow q = 886,7$$

Vậy để lợi nhuận công ty lớn nhất thì công ty phải sản xuất 866,7 (đvsp) và khi đó lợi nhuận lớn nhất là $P(866,7)$.

CHƯƠNG 9

CÁC BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC TÍCH PHÂN

Các bài toán bất đẳng thức tích phân được giới thiệu trong phần này nhất là phần sử dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* đa phần chỉ mang tính tính tham khảo, **không đi sâu** do đây là chương trình liên quan tới toán cao cấp của bậc đại học, chỉ nên học phần 1 và phần 2!

PHÂN TÍCH BÌNH PHƯƠNG

Với dạng toán này ta cần chú ý tới những kiến thức sau đây:

Với $f(x), g(x)$ là các hàm liên tục trên $[a;b](a<b)$ ta có:

- $\int_a^b (f(x))^{2n}dx \ge 0$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow f(x)\equiv 0 \forall x\in[a;b]$
- $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\ge 0\forall x\in[a;b] \\ f(x)\le 0\forall x\in[a;b]\end{cases}$
- Công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn *prabol* và một đường thẳng:

$$I^2=\left(\int_{x_1}^{x_2}|ax^2+bx+c|dx\right)^2=\frac{\Delta^3}{36a^4}$$

Với x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $ax^2+bx+c=0$.

Câu 1.

Cho 2 số thực a,b thỏa mãn $a<b, a+b=ab+4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tích phân $I=\int_a^b |x^2-(a+b)+ab|dx$

A. $4\sqrt{3}$ **B.** 12 **C.** $2\sqrt{3}$ **D.** 48

Lời giải

Đây chỉ là bài tập mở đầu áp dụng công thức thôi do a,b đã là nghiệm của phương trình bậc 2 trong dấu trị tuyệt đối rồi!

Ta có:

$$I^2=\left(\int_a^b|x^2-(a+b)x+ab|dx\right)^2=\frac{\Delta^3}{36}$$

$$=\frac{\left((a+b)^2-4ab\right)^3}{36}=\frac{\left((ab+4)^2-4ab\right)^3}{36}=\frac{\left((ab+2)^2+12\right)^2}{36}\ge 48$$

Chọn ý **D.**

Câu 2.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$ và $\int_0^1 (f'(x))^2 dx = -7\int_0^1 x^3 f'(x)dx - \frac{7}{4}$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x)dx$.

A. $\frac{7}{5}$ **B.** $\frac{7}{4}$ **C.** $\frac{7}{8}$ **D.** $\frac{7}{10}$

Lời giải

Thoạt nhìn thì bài toán này có vẻ khá là rắc rối, nhưng hãy chú ý nếu coi $f'(x)$ là ẩn thì ta thấy bóng dáng của tam thức bậc 2, đến đây ta sẽ giải quyết bài toán như sau:

Biến đổi giả thiết ta được:

$$\int_0^1 (f'(x))^2 dx = -7\int_0^1 x^3 f'(x)dx - \frac{7}{4}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \left(f'(x)+\frac{7}{2}x^3\right)^2 dx - \int_0^1 \left(\frac{7x^3}{2}\right)^2 dx = \frac{-7}{4}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \left(f'(x)+\frac{7}{2}x^3\right)^2 dx = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{7x^3}{2}\ \forall x\in[0;1] \Rightarrow f(x) = \frac{-7x^4}{8}+C$$

Mặt khác ta lại có $f(1)=0 \Rightarrow C=\frac{7}{8} \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \frac{7}{10}$.

Chọn ý **D.**

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương liên tục trên đoạn $[0;1]$, $f(1)-f(0)\ge 1$ và $\int_0^1 f'(x)\left[3f^2(x)+2\right] \ge \int_0^1 2\sqrt{6f'(x)}f(x)dx$. Tích phân $\int_0^1 f^3(x)dx$ bằng

A. $\frac{2\sqrt{21}}{9}$ **B.** $\frac{2\sqrt{7}}{3}$ **C.** $\frac{2\sqrt{21}}{9}-1$ **D.** $\frac{2\sqrt{7}}{3}-1$

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(1)-f(0)=1$ thỏa mãn $2\int_0^1 \sqrt{f'(x)}f(x)dx \ge \int_0^1 f'(x)\left(f^2(x)+1\right)dx$. Tích phân $\int_0^1 \left[f(x)\right]^3 dx$ bằng?

A. $\frac{3}{2}$ **B.** $\frac{5\sqrt{33}}{18}$ **C.** $\frac{5\sqrt{33}+54}{18}$ **D.** $\frac{5\sqrt{33}-27}{18}$

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $4f(1)=f(0)$ và $\int_0^1 f^2(x)dx - 3\int_0^1 f(x)dx = 2\int_0^1 \sqrt{(3x+1)f'(x)}f(x)dx$. Tính $f(0)$?

A. $-\frac{9}{\ln 4}$ **B.** $-\frac{15}{\ln 4}$ **C.** $-\frac{3}{\ln 4}$ **D.** $-\frac{5}{\ln 4}$

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương liên tục trên đoạn $[0;2]$ thỏa mãn $6\int_0^2 \sqrt{f'(x)}f(x)dx \ge 2\int_0^2 f'(x)f^2(x)dx + 9$. Tích phân $\int_0^2 f^3(x)dx$ bằng

A. $\frac{29}{3}$ **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** 2 **D.** 29

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện $\int_0^1\left[f^2(x)+2\ln^2\frac{2}{e}\right]dx=2\int_0^1 f(x)\ln(x+1)dx$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\ln\frac{e}{4}$ **B.** $\ln\frac{4}{e}$ **C.** $\ln\frac{e}{2}$ **D.** $\ln\frac{2}{e}$

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=1$ và $3\int_0^1\left(f'(x)f^2(x)+\frac{1}{9}\right)dx\le 2\int_0^1\sqrt{f'(x)}f(x)dx$. Tính tích phân $\int_0^1[f(x)]^3dx$

A. $\frac{3}{2}$ **B.** $\frac{5}{4}$ **C.** $\frac{5}{6}$ **D.** $\frac{7}{6}$

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x)+2\sqrt{2}f(x)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]dx=-\frac{\pi+2}{2}$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** 0 **C.** 2 **D.** $\sqrt{2}$

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ và thỏa mãn điều kiện $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x)-2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]dx=\frac{2-\pi}{2}$. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$.

A. 1 **B.** 0 **C.** $\frac{\pi}{4}$ **D.** $\frac{\pi}{2}$

Chú ý xem lời giải ví dụ 1 để vận dụng!

Câu 3.

Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn $f(1)=e.f(0)=e$ và $\int_0^1\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2dx\le 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f\left(\frac{1}{2}\right)=e^2$ **B.** $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}$ **C.** $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2e}$ **D.** $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2e}$

Lời giải

Đây là một bài toán tương đối khó có dạng hơi hơi giống với các bài toán ở phần 5! Ta hãy để ý rằng $\int_0^1\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|\Big|_0^1=\ln\frac{f(1)}{f(0)}=\ln e=1$. Đến đây ta có định hướng giải bài toán này bằng phương pháp hệ số bất định như sau.

Giả sử tồn tại một số a thỏa mãn:

$$\int_0^1\left(\frac{f'(x)}{f(x)}-a\right)^2dx=0\Leftrightarrow\int_0^1\left[\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2-2a\frac{f'(x)}{f(x)}+a^2\right]dx=0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 dx = \int_0^1 \left[2a\frac{f'(x)}{f(x)} - a^2\right] dx = 2a - a^2$$

Mà theo giả thiết ta có $\int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 dx \le 1 \Rightarrow 2a - a^2 \le 1 \Leftrightarrow (a-1)^2 \le 0 \Leftrightarrow a = 1$

Vậy khi đó giả thiết bài toán sẽ được biến đổi tương đương:

$$\int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 dx \le 1 \Leftrightarrow \int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)} - 1\right)^2 dx \le 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \Rightarrow f(x) = ke^x$$

Ta có $f(1) = e.f(0) = e$ nên $k = 1 \Rightarrow f(x) = e^x \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e}$.

Chọn ý **B.**

Câu 4.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $\int_0^1 [f(x)]^2 dx = 4$ và $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = 1$. Giá trị của tích phân $\int_0^1 [f(x)]^3 dx$ bằng?

A. 1. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 80.

Lời giải

Ở đây các hàm xuất hiện dưới dấu tích phân là $[f(x)]^2$, $xf(x)$, $f(x)$ nên ta sẽ nảy ra ý tưởng liên kết với bình phương $[f(x) + \alpha x + \beta]^2$.

Với mỗi số thực α, β ta có:

$$\int_0^1 [f(x) + \alpha x + \beta]^2 dx = \int_0^1 [f(x)]^2 dx + 2\int_0^1 (\alpha x + \beta) f(x) dx + \int_0^1 (\alpha x + \beta)^2 dx$$

$$= 4 + 2(\alpha + \beta) + \frac{\alpha^2}{3} + \alpha\beta + \beta^2.$$

Ta cần tìm α, β sao cho $\int_0^1 [f(x) + \alpha x + \beta]^2 dx = 0$ hay $4 + 2(\alpha + \beta) + \frac{\alpha^2}{3} + \alpha\beta + \beta^2 = 0$

$\Leftrightarrow \alpha^2 + (3\beta + 6)\alpha + 3\beta^2 + 6\beta + 12 = 0.$ Để tồn tại α thì $\Delta = (3\beta + 6)^2 - 4(3\beta^2 + 6\beta + 12) \ge 0$

$$\Leftrightarrow -3\beta^2 + 12\beta - 12 \ge 0 \Leftrightarrow -3(\beta - 2)^2 \ge 0 \Leftrightarrow \beta = 2 \Rightarrow \alpha = -6.$$

Vậy $\int_0^1 [f(x) - 6x + 2]^2 dx = 0 \Rightarrow f(x) = 6x - 2,\ \forall x \in [0;1] \Rightarrow \int_0^1 [f(x)]^3 dx = 10.$

Chọn ý **C.**

Câu 5.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=0$ đồng thời $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$ và $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng?

A. 1. **B.** $\frac{7}{5}$ **C.** $\frac{7}{4}$ **D.** 4

Đề minh họa THPT Quốc Gia 2018

Lời giải

Đây là một câu từng xuất hiện trong đề minh họa THPT Quốc Gia 2018 của bộ và sau đó đã trở thành một trào lưu trong các đề thi thử và thậm chí đến đề khảo thí chất lượng của bộ cũng đã từng xuất hiện bài toán này, tuy nhiên các cách giải trên mạng đa phần là sử dụng đến bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* tuy nhiên đây có lẽ không phải ý tưởng ra đề của Bộ bởi đây là kiến thức bậc Đại học. Dưới đây là sẽ tiếp cận bài toán bằng kiến thức của bậc THPT.

Ý tưởng của bài toán vẫn là đưa về bình phương tuy nhiên hàm dưới dấu tích phân là $[f'(x)]^2$, $x^2 f(x)$ không có mối liên hệ với nhau. Vậy làm sao để làm xuất hiện bình phương đây? Có $f'(x)$ đang ở dạng bình phương thì ta sẽ nghĩ ngay đến việc sử dụng tích phân từng phần cho $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}$ ta được: $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{x^3}{3} f(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 x^3 f'(x) dx$.

Kết hợp với giả thiết $f(1)=0$, ta suy ra $\int_0^1 x^3 f'(x) dx = -1$.

Bây giờ giả thiết được đưa về $\begin{cases} \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7 \\ \int_0^1 x^3 f'(x) dx = -1 \end{cases}$. Hàm dưới dấu tích phân bây giờ là $[f'(x)]^2$, $x^3 f'(x)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $[f'(x)+\alpha x^3]^2$.

Với mỗi số thực α ta có :

$$\int_0^1 [f'(x)+\alpha x^3]^2 dx = \int_0^1 [f'(x)]^2 dx + 2\alpha\int_0^1 x^3 f'(x) dx + \alpha^2 \int_0^1 x^6 dx = 7 - 2\alpha + \frac{\alpha^2}{7} = \frac{1}{7}(\alpha-7)^2.$$

Ta cần tìm α sao cho $\int_0^1 [f'(x)+\alpha x^3]^2 dx = 0$ hay $\frac{1}{7}(\alpha-7)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 7$.

Vậy $\int_0^1 [f'(x)+7x^3]^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = -7x^3, \forall x \in [0;1] \Rightarrow f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + C$

$$\Rightarrow C = \frac{7}{4} \Rightarrow f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + \frac{7}{4} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{7}{5}.$$

Chọn ý **B.**

Câu 6.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn đồng thời $f(1)=0$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{3}{2} - 2\ln 2$ và $\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx = 2\ln 2 - \frac{3}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng?

A. $\frac{1-\ln 2}{2}$. **B.** $\frac{1-2\ln 2}{2}$. **C.** $\frac{3-2\ln 2}{2}$. **D.** $\frac{3-4\ln 2}{2}$.

Lời giải

Thoạt nhìn thì ta sẽ thấy bài này tương tự bài trước vẫn phải làm xuất hiện $f'(x), (f'(x))^2$, cùng biến đổi để xem có như bài trước không nhé!

Như các bài trước, ta biến đổi $\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx = 2\ln 2 - \frac{3}{2}$ để làm xuất hiện $f'(x)$ bằng cách tích phân từng phần. Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = \frac{1}{(x+1)^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = -\frac{1}{x+1} \end{cases}$.

Khi đó ta được:

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx = -\frac{f(x)}{x+1}\Bigg|_0^1 + \int_0^1 \frac{f'(x)}{x+1} dx = -\frac{f(1)}{2} + \frac{f(0)}{1} + \int_0^1 \frac{f'(x)}{x+1} dx$$

Tới đây ta bị vướng $f(0)$ vì giả thiết không cho. Do đó ta sẽ thêm bớt hằng số như sau:

$$\begin{cases} u = f(x) \\ dv = \frac{1}{(x+1)^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = -\frac{1}{x+1} + k \end{cases} \text{ với } k \text{ là hằng số.}$$

Khi đó kết hợp với $f(1) = 0$ ta được:

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx = \left(-\frac{1}{x+1} + k\right) f(x)\Bigg|_0^1 - \int_0^1 \left(-\frac{1}{x+1} + k\right) f'(x) dx$$

$$= -(-1+k) f(0) - \int_0^1 \left(-\frac{1}{x+1} + k\right) f'(x) dx$$

Ta chọn k sao cho $-1 + k = 0 \Leftrightarrow k = 1$

Khi đó: $2\ln 2 - \frac{3}{2} = \int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx = -\int_0^1 \frac{x}{x+1} f'(x) dx \Rightarrow \int_0^1 \frac{x}{x+1} f'(x) dx = \frac{3}{2} - 2\ln 2$.

Hàm dưới dấu tích phân là $[f'(x)]^2$, $\frac{x}{x+1} f'(x)$ nên ta cần có $\left[f'(x) + \alpha \frac{x}{x+1}\right]^2$.

Ta tìm được $\alpha = -1 \Rightarrow f'(x) = \frac{x}{x+1} \Rightarrow f(x) = \int \frac{x}{x+1} dx = x - \ln|x+1| + C$

$$\Rightarrow C = \ln 2 - 1 \Rightarrow f(x) = x - \ln(x+1) + \ln 2 - 1. \text{ Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \frac{1 - 2\ln 2}{2}$$

Chọn ý **B.**

CÂN BẰNG HỆ SỐ VÀ BẤT ĐẲNG THỨC AM – GM

Trong phần này ta sẽ tiếp cận một số bài toán khó hơn phải sử dụng đến bất đẳng thức AM – GM và các kỹ thuật cân bằng hệ số trong bất đẳng thức. Đầu tiên nhắc lại bất đẳng thức AM – GM.

Cho 2 số thực dương a,b thì ta luôn có $a+b\ge 2\sqrt{ab}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b$

Câu 1.

Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=ef(0)$ và $\int_0^1 \frac{dx}{f^2(x)}+\int_0^1 [f'(x)]^2 dx \le 2.$ Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $f(1)=\sqrt{\frac{2e}{e-1}}$ **B.** $f(1)=\frac{2(e-2)}{e-1}$ **C.** $f(1)=\sqrt{\frac{2e^2}{e^2-1}}$ **D.** $f(1)=\sqrt{\frac{2(e-2)}{e-1}}$

Lời giải

Lướt nhìn qua bài toán này thì khá là "hãi" nhưng tuy nhiên hai tích phân đang ở cùng cận nên ta sẽ đưa nó vào cùng một tích phân và sử dụng bất đẳng thức AM – GM như sau:

$$\int_0^1 \frac{dx}{f^2(x)}+\int_0^1 [f'(x)]^2 dx=\int_0^1\left[\frac{1}{f^2(x)}+[f'(x)]^2\right]dx \overset{AM-GM}{\ge} 2\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}dx$$

$$=2\ln|f(x)|\Big|_0^1=2\ln|f(1)|-2\ln|f(0)|=2\ln\left|\frac{f(1)}{f(0)}\right|=2\ln e=2.$$

Mặt khác theo giả thiết ta lại có:

$$\int_0^1 \frac{dx}{f^2(x)}+\int_0^1 [f'(x)]^2 dx\le 2\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{f(x)}\Leftrightarrow f(x)f'(x)=1$$

$$\Rightarrow \int f(x)f'(x)dx=\int xdx\Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2}=x+C\Rightarrow f(x)=\sqrt{2x+2C}.$$

Ta có: $f(1)=ef(0)$ nên ta có $\sqrt{2+2C}=e\sqrt{2C}\Leftrightarrow 2+2C=e^2 2C\Leftrightarrow C=\frac{1}{e^2-1}$

$$\Rightarrow f(x)=\sqrt{2x+\frac{2}{e^2-1}}\Rightarrow f(1)=\sqrt{2+\frac{2}{e^2-1}}=\sqrt{\frac{2e^2}{e^2-1}}.$$

Chọn ý **C.**

Câu 2.

Cho hàm số $f(x)>0$ và có đạo hàm $f'(x)>0$ liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(0)=1$ và $\int_0^1\left[f^3(x)+4\left[f'(x)\right]^3\right]dx\le 3\int_0^1 f'(x)f^2(x)dx$. Tính $I=\int_0^1 f(x)dx$

A. $I=2\left(\sqrt{e}-1\right)$. **B.** $I=2\left(e^2-1\right)$. **C.** $I=\dfrac{\sqrt{e}-1}{2}$. **D.** $I=\dfrac{e^2-1}{2}$.

Lời giải

Bài toán này là một bài toán khó nhưng tuy nhiên nếu biết về bất đẳng thức AM – GM thì nó trở lên khá là đơn giản

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ cho ba số dương ta có

$$f^3(x)+4\left[f'(x)\right]^3=4\left[f'(x)\right]^3+\frac{f^3(x)}{2}+\frac{f^3(x)}{2}$$

$$\ge 3\sqrt[3]{4\left[f'(x)\right]^3.\frac{f^3(x)}{2}.\frac{f^3(x)}{2}}=3f'(x)f^2(x)$$

$$\Rightarrow\int_0^1\left[f^3(x)+4\left[f'(x)\right]^3\right]dx\ge 3\int_0^1 f'(x)f^2(x)dx.$$

Mặt khác theo giả thiết ta có:

$$\int_0^1\left[f^3(x)+4\left[f'(x)\right]^3\right]dx\le 3\int_0^1 f'(x)f^2(x)dx\Rightarrow 4\left[f'(x)\right]^3=\frac{f^3(x)}{2}=\frac{f^3(x)}{2}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{2}f(x)$$

$$\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{2}\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\frac{1}{2}\int dx\Rightarrow\ln\left|f(x)\right|=\frac{1}{2}x+C\Rightarrow f(x)=e^{\frac{1}{2}x+C}.$$

Ta có: $f(0)=1\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=e^{\frac{1}{2}x}\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx=2\left(\sqrt{e}-1\right)$.

Nhận xét. Đây là hướng tiếp cận theo bất đẳng thức AM – GM tuy nhiên ta còn một cách khác có thể sẽ nhanh hơn tẹo. Để ý nếu ta coi a,b lần lượt là $f(x),f'(x)$ thì ta sẽ có được đa thức thuần nhất bậc 3. Cụ thể ta có:

$$f(a,b)=a^3+4b^3-3a^2b=(a+b)(a-2b)^2\ge 0$$

Khi đó giả thiết tương đương:

$$\int_0^1\left[f^3(x)+4\left[f'(x)\right]^3\right]dx\le 3\int_0^1 f'(x)f^2(x)dx\Leftrightarrow\int_0^1\left(f(x)+f'(x)\right)\left(f(x)-2f'(x)\right)^2dx\le 0$$

Mặt khác $f(x)>0$, $f'(x)>0$ nên dấu “=” xảy ra khi $f(x)=2f'(x)$.

Đến đây bài toán lại trở nên bình thường!

Chọn ý **A.**

TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC

Câu 3.

Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương trên $[0;1]$, có đạo hàm dương và tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $\int_0^1 \sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}dx \ge 1$ và $f(0)=1,\ f(1)=e^2$. Tính giá trị của $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

A. $f\left(\frac{1}{2}\right)=1.$ **B.** $f\left(\frac{1}{2}\right)=4.$ **C.** $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}.$ **D.** $f\left(\frac{1}{2}\right)=e.$

Lời giải

Cách làm chung của các bài toán thế này là từ giả nếu bài toán cho là lớn hơn hoặc bằng thì ta phải chỉ ra dấu nhỏ hơn hoặc bằng và ngược lại. Bài toán này cũng như thế, ta cần chỉ ra được $\int_0^1 \sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}dx \le 1$ bằng các đánh giá cơ bản.

Hàm dưới dấu tích phân là: $\sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}=\sqrt{x}.\sqrt{\frac{f'(x)}{f(x)}},\ \forall x\in[0;1].$

Điều này khiến ta nảy ra ý tưởng đánh giá:

$$\sqrt{x}.\sqrt{\frac{f'(x)}{f(x)}}\le ax+\frac{b.f'(x)}{f(x)},$$

Muốn vậy ta phải đánh giá theo $AM-GM$ như sau:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}+mx\ge 2\sqrt{m}.\sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}} \text{ với } m\ge 0 \text{ và } x\in[0;1].$$

Do đó ta cần tìm tham số $m\ge 0$ sao cho: $\int_0^1\left[\frac{f'(x)}{f(x)}+mx\right]dx\ge 2\sqrt{m}.\int_0^1\sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}dx$ hay:

$$\ln|f(x)|\Big|_0^1+m\frac{x^2}{2}\Big|_0^1\ge 2\sqrt{m}.1\Leftrightarrow \ln|f(1)|-\ln|f(0)|+\frac{m}{2}\ge 2\sqrt{m}\Leftrightarrow 2-0+\frac{m}{2}\ge 2\sqrt{m}$$

Để dấu "=" xảy ra thì ta cần có $2-0+\frac{m}{2}=2\sqrt{m}\Leftrightarrow m=4.$

Với $m=4$ thì ta có:

$$\int_0^1\left[\frac{f'(x)}{f(x)}+4x\right]dx=4\ge 4.\int_0^1\sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}dx\Rightarrow \int_0^1\sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}dx\le 1$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{f'(x)}{f(x)}=4x\Rightarrow \int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int 4xdx\Leftrightarrow \ln|f(x)|=2x^2+C\Rightarrow f(x)=e^{2x^2+C}.$

Theo giả thiết $\begin{cases}f(0)=1\\ f(1)=e^2\end{cases}\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=e^{2x^2}\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}.$

Cách 2. Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có:

$$1^2 \le \left(\int_0^1 \sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}dx\right)^2 = \left(\int_0^1 \sqrt{x}.\sqrt{\frac{f'(x)}{f(x)}}dx\right)^2 \le \int_0^1 xdx.\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \frac{1}{2}.\ln\frac{f(1)}{f(0)} = 1.$$

Vậy đẳng thức xảy ra nên ta có $\frac{f'(x)}{f(x)} = kx,$ thay vào $\int_0^1 \sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}dx = 1$ ta được $k = 4.$

Suy ra $\frac{f'(x)}{f(x)} = 4x.$ Đến đây lời giải giống như trên.

P/s: Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta sẽ tìm hiểu ở phần sau!

Chọn ý **C.**

Câu 4.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1],$ thỏa mãn $\int_0^1 [f(x)f'(x)]^2 dx \le 1$ và $f(0) = 1,\ f(1) = \sqrt{3}.$ Tính giá trị của $f\left(\frac{1}{2}\right)$

A. $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}.$ **B.** $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3.$ **C.** $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e}.$ **D.** $f\left(\frac{1}{2}\right) = e.$

Lời giải

Nhận thấy bài này dấu "$\le$" nên cần phải đánh giá theo chiều ngược lại, chú ý tới bài toán liên quan tới $f'(x), f(x),$ nếu ta đánh giá được $[f(x)f'(x)]^2$ về $f(x)f'(x)$ thì bài toán coi như được giải quyết. Muốn vậy ta phải đánh giá theo AM – GM như sau:

$$[f(x)f'(x)]^2 + m \ge 2\sqrt{m}.f(x)f'(x) \text{ với } m \ge 0.$$

Do đó ta cần tìm tham số $m \ge 0$ sao cho:

$$\int_0^1 \left([f(x)f'(x)]^2 + m\right)dx \ge 2\sqrt{m}\int_0^1 f(x)f'(x)dx$$

Hay $1 + m \ge 2\sqrt{m}.\left.\frac{f^2(x)}{2}\right|_0^1 \Leftrightarrow 1 + m \ge 2\sqrt{m}$

Để dấu "=" xảy ra thì ta cần có $1 + m = 2\sqrt{m} \Leftrightarrow m = 1.$

Khi đó ta được:

$$\int_0^1 [f(x)f'(x)]^2 dx + 1 = \int_0^1 [f(x)f'(x)]^2 dx + \int_0^1 1dx$$

$$= \int_0^1 \left([f(x)f'(x)]^2 + 1\right)dx \ge 2\int_0^1 (f(x)f'(x))dx = 2$$

Dấu "=" xảy ra khi $[f(x)f'(x)]^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)f'(x) = 1 \\ f(x)f'(x) = -1 \end{array}\right.$.

- Nếu $f(x)f'(x)=-1 \Rightarrow \int_0^1 f(x)f'(x)dx = -\int_0^1 dx \Leftrightarrow \left.\frac{f^2(x)}{2}\right|_0^1 = -x|_0^1 \Leftrightarrow 1=-1$ (vô lý)
- Nếu $f(x)f'(x)=1 \Rightarrow \int f(x)f'(x)dx = \int dx \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} = x + C \Rightarrow f(x) = \sqrt{2x+2C}.$

Theo giả thiết $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow C = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \sqrt{2x+1} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}.$

Cách 2. Ta có $\int_0^1 f(x)f'(x)dx = \left.\frac{f^2(x)}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}\left[f^2(1)-f^2(0)\right] = 1.$

Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có:

$$1^2 = \left(\int_0^1 1.f(x)f'(x)dx\right)^2 \le \int_0^1 1^2 dx.\int_0^1 \left[f(x)f'(x)\right]^2 dx \le 1.1 = 1.$$

Vậy đẳng thức xảy ra nên ta có $f'(x)f(x)=k,$ thay vào $\int_0^1 f(x)f'(x)dx = 1$ ta được $k=1.$ Suy ra $f'(x)f(x)=1.$ Đến đây làm tiếp như trên!

P/s: Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta sẽ tìm hiểu ở phần sau!

Chọn ý **A.**

Câu 5.

Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[1;2],$ thỏa mãn $\int_1^2 \frac{\left[f'(x)\right]^2}{xf(x)}dx \le 24$ và $f(1)=1,\ f(2)=16.$ Tính giá trị của $f\left(\sqrt{2}\right).$

A. $f\left(\sqrt{2}\right)=1.$ **B.** $f\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}.$ **C.** $f\left(\sqrt{2}\right)=2.$ **D.** $f\left(\sqrt{2}\right)=4.$

Lời giải

Chắc rằng qua 4 ví dụ ở trên ta đã phần nào hình dung và nắm được ý tưởng và phương pháp làm dạng này rồi, bài cuối cùng sẽ không đi phân tích mà đi luôn vào lời giải!

Hàm dưới dấu tích phân là $\frac{\left[f'(x)\right]^2}{xf(x)} = \frac{1}{x}.\frac{\left[f'(x)\right]^2}{f(x)}.$ Điều này làm ta liên tưởng đến đạo hàm đúng $\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$, muốn vậy ta phải đánh giá theo $AM-GM$ như sau:

$$\frac{\left[f'(x)\right]^2}{xf(x)} + mx \ge 2\sqrt{m}\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} \text{ với } m \ge 0 \text{ và } x \in [1;2].$$

Do đó ta cần tìm tham số $m \ge 0$ sao cho $\int_1^2 \left(\frac{\left[f'(x)\right]^2}{xf(x)} + mx\right)dx \ge 2\sqrt{m}\int_1^2 \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx$ hay:

CHINH PHỤC OLYMPIC TOÁN

$$24+\frac{2m}{3}\ge 4\sqrt{m}\sqrt{f(x)}\Big|_1^2 \Leftrightarrow 24+\frac{2m}{3}\ge 4\sqrt{m}\left[\sqrt{f(2)}-\sqrt{f(1)}\right]\Leftrightarrow 24+\frac{2m}{3}\ge 12\sqrt{m}\Leftrightarrow m=16.$$

Để dấu "=" xảy ra thì ta cần có $24+\frac{2m}{3}=12\sqrt{m}\Leftrightarrow m=16.$

Với $m=16$ thì đẳng thức xảy ra nên $\frac{\left[f'(x)\right]^2}{xf(x)}=16x\Rightarrow \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=2x$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}dx=\int 2xdx\Leftrightarrow \sqrt{f(x)}=x^2+C\Rightarrow f(x)=\left(x^2+C\right)^2$$

Theo giả thiết $\begin{cases} f(1)=1 \\ f(2)=16 \end{cases}\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=x^4\Rightarrow f\left(\sqrt{2}\right)=4.$

> ***Cách 2.*** Ta có $\int_1^2 \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx=2.\int_1^2 \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}dx=2\sqrt{f(x)}\Big|_1^2=2\left[\sqrt{f(2)}-\sqrt{f(1)}\right]=6.$
>
> Theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có
>
> $$6^2=\left(\int_1^2 \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx\right)^2=\left(\int_1^2 \sqrt{x}.\frac{f'(x)}{\sqrt{xf(x)}}dx\right)^2\le \int_1^2 xdx.\int_1^2 \frac{\left[f'(x)\right]^2}{xf(x)}dx\le \frac{x^2}{2}\Big|_1^2.24=36$$
>
> Vậy đẳng thức xảy ra nên ta có $\frac{f'(x)}{\sqrt{xf(x)}}=k\sqrt{x}\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}=kx$ thay vào $\int_1^2 \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx=6$
>
> ta được $k=4.$ Suy ra $\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}=4x.$ Đến đây làm tiếp như trên!

Chọn ý **D.**

BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY – SCHWARZ CHO TÍCH PHÂN

Nhìn chung thì các bài toán này chưa gặp thì sẽ thấy nó lạ và rất khó, tuy nhiên nếu đã gặp và làm quen rồi thì bài toán này trở nên tương đối dễ, có thể dễ hơn 2 dạng toán trên !

- Bất đẳng thức *Cauchy - Schwarz* cho tích phân

Cho $f(x),g(x):[a,b]\to\mathbb{R}$ là các hàm khả tích trên đoạn $[a;b]$ khi đó ta luôn có :

$$\int_a^b f^2(x)dx.\int_a^b g^2(x)dx\ge\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $f(x)=kg(x)$ với số thực $k\ne 0$.

Chứng minh

Với mọi $t\in\mathbb{R}$ xét bình phương ta luôn có $\int_a^b \left(t.f(x)+g(x)\right)^2 dx\ge 0$

Điều này tương đương với :

$$h(t)=\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)t^2+2\left(\int_a^b f(x).g(x)dx\right)t+\int_a^b g^2(x)dx\ge 0\forall t\in\mathbb{R}$$

+ Trường hợp 1 : $\int_a^b f^2(x)dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ bất đẳng thức đã cho là đẳng thức.

+ Trường hợp 2 : $\int_a^b f^2(x)dx > 0$, đây là tam thức bậc 2 hệ số *a* dương và luôn không âm, tức biệt số *delta* luôn không dương. Tương đương :

$$\Delta' = \left(\int_a^b f(x).g(x)dx\right)^2 - \int_a^b f^2(x)dx.\int_a^b g^2(x)dx \le 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\int_a^b f(x).g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx.\int_a^b g^2(x)dx$$

Đến đây ta có điều phải chứng minh !

- Bất đẳng thức *Holder* cho tích phân

Cho $f(x), g(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ là các hàm khả tích trên đoạn $[a;b]$ khi đó ta luôn có :

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

Trong đó p,q là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.

Câu 1.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1) = 0$ đồng thời $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$ và $\int_0^1 x^2 f(x)dx = \frac{1}{3}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng?

A. 1. **B.** $\frac{7}{5}$ **C.** $\frac{7}{4}$ **D.** 4

Đề minh họa THPT Quốc Gia 2018

Lời giải

Bài toán này ta đã được gặp ở phần phân tích bình phương rồi, giờ ta sẽ tìm hiểu một cách tiếp cận khác bằng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz. Chú ý là bất đẳng thức Cauchy - Schwarz cho tích phân thì luôn phải có một lượng bình phương cho nên ta không được biến đổi giả thiết $(f'(x))^2$, tuy duy vẫn như phần trước, ta phải làm xuất hiện $f'(x)$ ở giả thiết thứ 2.

Tích phân từng phần cho $\int_0^1 x^2 f(x)dx = \frac{1}{3}$ ta được:

$$\int_0^1 x^2 f(x)dx = \frac{x^3}{3}f(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 x^3 f'(x)dx \Leftrightarrow \int_0^1 x^3 f'(x)dx = -1.$$

Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có :

$$\left(\int_0^1 x^3 f'(x)dx\right)^2 \le \int_0^1 x^6 dx.\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 1 \Rightarrow -1 \le \int_0^1 x^3 f'(x)dx \le 1$$

Vậy dấu "=" xảy ra khi $f'(x) = kx^3$. Thế ngược lại ta tìm được $k = -7$

Vậy $f'(x) = -7x^3, \forall x \in [0;1] \Rightarrow f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + C$

$$\Rightarrow C=\frac{7}{4}\Rightarrow f(x)=-\frac{7}{4}x^4+\frac{7}{4}\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx=\frac{7}{5}.$$

Chọn ý **B.**

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$ thỏa mãn $f(-1)=0,\int_{-1}^{1}x^2f(x)dx=\frac{16}{3}$ và $\int_{-1}^{1}(f'(x))^2dx=112$, tính tích phân $I=\int_{-1}^{1}f(x)dx$.

A. $\frac{168}{5}$ **B.** $\frac{35}{2}$ **C.** $\frac{35}{4}$ **D.** $\frac{84}{5}$

Câu 2: Cho hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện $\int_0^1(f'(x))^2dx=\int_0^1(x+1)e^xf(x)dx=\frac{e^2-1}{4}$ và $f(1)=0$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x)dx$.

A. $\frac{e-1}{2}$ **B.** $\frac{e^2}{4}$ **C.** $e-2$ **D.** $\frac{e}{2}$

Câu 3: Cho hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=0,f(1)=1$ và $\int_0^1[f'(x)]^2\sqrt{x^2+1}\,dx=\frac{1}{1+\ln 2}$. Tích phân $\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}dx$ bằng

A. $\frac{1}{2}\ln^2\left(1+\sqrt{2}\right)$ **B.** $\frac{-1+\sqrt{2}}{2}\ln^2\left(1+\sqrt{2}\right)$

C. $\frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ **D.** $\left(-1+\sqrt{2}\right)\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

Câu 4: Cho hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$ và đồng thời $\int_0^1 x.f(x)dx=\frac{4}{15}$ và $\int_0^1[f'(x)]^2dx=\frac{49}{45}$. Tính $\int_0^1[f(x)]^2dx$

A. $\frac{2}{9}$ **B.** $\frac{1}{6}$ **C.** $\frac{4}{63}$ **D.** 1

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$,$\int_0^1(f'(x))^2dx=\frac{9}{5}$ và $\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)dx=\frac{2}{5}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{1}{4}$ **B.** $\frac{1}{5}$ **C.** $\frac{3}{4}$ **D.** $\frac{3}{5}$

Câu 6: Cho hàm $f(x)$liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1(f'(x))^2dx=\int_0^1 e^xf(x)dx=\frac{e^2-1}{4}$ và $ef(1)=f(0)$. Tính tích phân $\int_0^1 f^2(x)dx$.

A. $e-2$ **B.** $e-1$ **C.** $2e-3$ **D.** $2e-1$

TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(0)+f(1)=0$. Biết rằng $\int_0^1 f^2(x)dx=\frac{1}{2}, \int_0^1 f'(x)\cos\pi x dx=\frac{\pi}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{3\pi}{2}$ **B.** $\frac{2}{\pi}$ **C.** π **D.** $\frac{1}{\pi}$

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$. Biết $\int_0^1 f^2(x)dx=3$ và $\int_0^1 f'(x)\sin\pi x dx=\pi$. Tích phân $\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx$ bằng

A. $\frac{3\pi}{2}$ **B.** $\frac{2}{\pi}$ **C.** $-\frac{6}{\pi}$ **D.** $\frac{1}{\pi}$

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx=\frac{\pi^2}{8}$, $\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right).f(x)dx=\frac{1}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{\pi}{2}$ **B.** π **C.** $\frac{1}{\pi}$ **D.** $\frac{2}{\pi}$

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$, và thỏa mãn $f(1)=1$, $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx=9$ và $\int_0^1 x^3 f(x)dx=\frac{1}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{5}{2}$ **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** $\frac{7}{4}$ **D.** $\frac{6}{5}$

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left[f'(x)\right]^2 dx=\frac{\pi}{4}$ và $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x.f(x)dx=\frac{\pi}{4}$. Tính $f(2018\pi)$

A. -1 **B.** 0 **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 1

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ có đạo liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn điều kiện $f(2)=0$ $\int_1^2 (x-1)^2 f(x)dx=-\frac{1}{3}$ và $\int_1^2 \left[f'(x)\right]^2 dx=7$. Tích phân $\int_1^2 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{7}{5}$ **B.** $\frac{-7}{5}$ **C.** $\frac{-7}{20}$ **D.** $\frac{7}{20}$

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 x.f^2(x)dx=\int_0^1 x^2.f(x)dx-\frac{1}{16}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng?

A. $\frac{1}{5}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** $\frac{2}{5}$

Chú ý xem lời giải ví dụ 1 để vận dụng!

Câu 2.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;\pi]$, thỏa mãn $\int_0^\pi f(x)dx = \int_0^\pi \cos x f(x)dx = 1$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^\pi f^2(x)dx$ bằng?

A. $\frac{2}{\pi}$. **B.** $\frac{3}{\pi}$. **C.** $\frac{4}{\pi}$. **D.** $\frac{3}{2\pi}$.

Lời giải

Nhìn cách phát biểu của bài toán tương đối giống với bài trên, nếu áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có :

$$1 = \left(\int_0^\pi \cos x.f(x)dx\right)^2 \le \int_0^\pi \cos^2 xdx.\int_0^\pi f^2(x)dx = \frac{\pi}{2}.\int_0^\pi f^2(x)dx.$$

Suy ra $\int_0^\pi f^2(x)dx \ge \frac{2}{\pi}$ đến đây sẽ có nhiều bạn khoanh **A.**

Chú ý rằng dấu "=" xảy ra khi $f(x) = k\cos x$ thay vào $\int_0^\pi f(x)dx = 1$ ta được:

$$1 = \int_0^\pi f(x)dx = k\int_0^\pi \cos xdx = k.\sin x\Big|_0^\pi = 0$$

Điều này là vô lý! Vậy lời giải đúng của ta sẽ cần phải sử dụng tới phương pháp biến thiên hằng số. Ta có $\int_0^\pi f(x)dx = \int_0^\pi \cos xf(x)dx = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = \int_0^\pi a\cos xf(x)dx \\ b = \int_0^\pi bf(x)dx \end{cases}$ với $\begin{cases} a, b \in \mathbb{R} \\ a^2 + b^2 > 0 \end{cases}$

Theo *Cauchy – Schwarz ta có :*

$$(a+b)^2 = \left(\int_0^\pi (a\cos x + b)f(x)dx\right)^2 \le \int_0^\pi (a\cos x + b)^2 dx\int_0^\pi f^2(x)dx$$

Lại có $\int_0^\pi (a\cos x + b)^2 dx = \frac{1}{2}\pi(a^2 + 2b^2)$. Suy ra $\int_0^\pi f^2(x)dx \ge \frac{2(a+b)^2}{\pi(a^2+2b^2)}$ với $\begin{cases} a, b \in \mathbb{R} \\ a^2 + b^2 > 0 \end{cases}$

Do đó $\int_0^\pi f^2(x)dx \ge \frac{2}{\pi}.\max\left\{\frac{(a+b)^2}{a^2+2b^2}\right\} = \frac{3}{\pi}$

Chọn ý **B.**

Nhận xét:

- Ta nhân thêm a, b vào giả thiết được gọi là phương pháp biến thiên hằng số.

- Cách tìm giá trị lớn nhất của $P=\dfrac{(a+b)^2}{a^2+2b^2}$ ta làm như sau:

+ Nếu $b=0\Rightarrow P=1$ (chính là đáp án sai mà mình đã làm ở trên)

+ Nếu $b\neq 0\Rightarrow P=\dfrac{(a+b)^2}{a^2+2b^2}=\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2+2\dfrac{a}{b}+1}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2+2}=\dfrac{t^2+2t+1}{t^2+2}\left(t=\dfrac{a}{b}\right)$

Tới đây ta đạo hàm hoặc dùng MODE 7 dò tìm. Kết quả thu được GTLN của P bằng $\dfrac{3}{2}$ khi $t=2\Rightarrow\dfrac{a}{b}=2\Leftrightarrow a=2b.$

Vậy dấu "=" để bài toán xảy ra khi $\begin{cases}a=2b\\ f(x)=b(2\cos x+1)\end{cases}$

Thay ngược lại điều kiện, ta được: $\int\limits_0^{\pi} b(2\cos x+1)dx=1\Leftrightarrow b=\dfrac{1}{\pi}\Rightarrow f(x)=\dfrac{2\cos x+1}{\pi}$

Lúc này $\int\limits_0^{\pi} f^2(x)dx=\int\limits_0^{\pi}\left(\dfrac{2\cos x+1}{\pi}\right)dx=\dfrac{3}{\pi}$

Cách khác. *Đưa về bình phương*

Hàm dưới dấu tích phân là $f^2(x),f(x),\cos x.f(x)$ nên ta liến kết với $\left(f(x)+\alpha\cos x+\beta\right)^2$

Với mỗi số thực $\alpha,\ \beta$ ta có:

$$\int\limits_0^{\pi}\left(f(x)+\alpha\cos x+\beta\right)^2dx=\int\limits_0^{\pi}f^2(x)dx+2\int\limits_0^{\pi}(\alpha\cos x+\beta)f(x)dx+\int\limits_0^{\pi}(\alpha\cos x+\beta)^2dx$$

$$=\int\limits_0^{\pi}f^2(x)dx+2(\alpha+\beta)+\frac{\pi}{2}\alpha^2+\pi\beta^2$$

Ta cần tìm $\alpha,\ \beta$ sao cho $2(\alpha+\beta)+\dfrac{\pi}{2}\alpha^2+\pi\beta^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Ta có:

$$2(\alpha+\beta)+\frac{\pi}{2}\alpha^2+\pi\beta^2=\frac{\pi}{2}\left(\alpha+\frac{2}{\pi}\right)^2+\pi\left(\beta+\frac{1}{\pi}\right)^2-\frac{3}{\pi}\geq-\frac{3}{\pi}$$

Vậy với $\alpha=-\dfrac{2}{\pi};\beta=-\dfrac{1}{\pi}$ thì ta có: $\int\limits_0^{\pi}\left[f(x)-\dfrac{2}{\pi}\cos x-\dfrac{1}{\pi}\right]^2dx=\int\limits_0^{\pi}f^2(x)dx-\dfrac{3}{\pi}$

Suy ra $\int\limits_0^{\pi}f^2(x)dx=\int\limits_0^{\pi}\left[f(x)-\dfrac{2}{\pi}\cos x-\dfrac{1}{\pi}\right]^2dx+\dfrac{3}{\pi}\geq\dfrac{3}{\pi}$. Dấu "=" xảy ra khi $f(x)=\dfrac{2\cos x+1}{\pi}$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x.f(x)dx=1$ và $\int_0^1\left[f(x)\right]^2dx=4$. Giá trị của tích phân $\int_0^1\left(f(x)\right)^3dx$ là

A. 10 **B.** 1 **C.** 80 **D.** 8

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 e^x f(x)dx = 1$. Gọi *m* là giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1 (f(x))^2 dx$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $0 < m < 1$ **B.** $1 < m < 2$ **C.** $2 < m < 3$ **D.** $3 < m < 4$

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;\pi]$ thỏa mãn $\int_0^\pi f(x)dx = \int_0^\pi \sin x f(x)dx = 1$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^\pi f^2(x)dx$ bằng?

A. $\frac{3}{\pi}$ **B.** $\frac{3\pi-8}{\pi^2-8}$ **C.** $\frac{3\pi-4}{\pi^2-2}$ **D.** $\frac{3}{2\pi}$

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sqrt{x} f(x)dx = 1$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1 f^2(x)dx$ bằng?

A. $\frac{2}{3}$ **B.** $\frac{4}{3}$ **C.** 3 **D.** $\frac{8}{3}$

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;e]$ thỏa mãn $\int_1^e f(x)dx = \int_1^e \ln x.f(x)dx = 1$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_1^e f^2(x)dx$ bằng?

A. $\frac{2e-5}{e^2-3e+1}$ **B.** $\frac{2e-3}{e-2}$ **C.** $\frac{2e-3}{e^2-3e+1}$ **D.** $\frac{2e-5}{e-2}$

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x f(x)dx = 1$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)dx$ bằng?

A. $\frac{4\ln(2e)}{\pi^2-4\pi+4\ln^2 2}$ **B.** $\frac{4\ln(2)-4}{\pi^2-4\pi+4\ln^2 2}$ **C.** $\frac{16\ln(2e)}{\pi^2-4\pi+4\ln^2 2}$ **D.** $\frac{16\ln(2)-16}{\pi^2-4\pi+4\ln^2 2}$

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^{2018}.f(x)dx = 1$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1 [f(x)]^2 dx$ là?

A. 4036 **B.** 4038 **C.** 4034 **D.** 4032

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 x.f(x)dx = \int_0^1 f(x)\sqrt{x}dx = 1$ và $\int_0^1 [f(x)]^2 dx = 5$. Giá trị của tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{5}{6}$ **B.** $\frac{5}{7}$ **C.** $\frac{1}{18}$ **D.** $\frac{1}{21}$

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;\pi]$ thỏa mãn $\int_0^\pi f'(x)\sin x dx = -1$ và $\int_0^\pi (f(x))^2 dx = \frac{2}{\pi}$. Tính tích phân $\int_0^\pi x.f(x)dx$

A. $-\frac{4}{\pi}$ **B.** $-\pi$ **C.** $-\frac{2}{\pi}$ **D.** $-\frac{\pi}{2}$

Chú ý xem lời giải ví dụ minh họa để vận dụng!

Câu 3.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$, thỏa $\int\limits_1^2 x^3f(x)dx=31$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int\limits_1^2 f^4(x)dx$ bằng?

A. 961. **B.** 3875. **C.** 148955. **D.** 923521.

Lời giải

Vẫn là bất đẳng thức Cauchy – Schwarz nhưng yêu cầu của bài toán $f(x)$ bậc 4 và giả thiết chỉ có 1, vì thế ý tưởng của ta là đánh giá trực tiếp yêu cầu $\int\limits_1^2 f^4(x)dx$ qua $\int\limits_1^2 x^3f(x)dx=31$.

Thế sử dụng Cauchy – Schwarz như thế nào? Rất đơn giản đó là sử dụng liên tiếp bất đẳng thức Cauchy – Schwarz!

Ta có áp dụng hai lần liên tiếp bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta được:

$$31^4=\left(\int_1^2 x^3f(x)dx\right)^4=\left[\left(\int_1^2 x^2.xf(x)dx\right)^2\right]^2\le\left(\int_1^2 x^4dx\right)^2\left(\int_1^2 x^2f^2(x)dx\right)^2\le\left(\int_1^2 x^4dx\right)^3\int\limits_1^2 f^4(x)dx$$

Suy ra $\int_1^2 f^4(x)dx\ge\dfrac{31^4}{\left(\int_1^2 x^4dx\right)^3}=3875$.

Dấu "=" xảy ra khi $f(x)=kx$ nên $k\int_1^2 x^4dx=31\Leftrightarrow k=5\Rightarrow f(x)=5x^2$

Chọn ý **B.**

Câu 4.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$, thỏa mãn $f(2)=1$, $\int\limits_0^2 x^2f(x)dx=\dfrac{8}{15}$ và $\int\limits_0^2\left[f'(x)\right]^4dx=\dfrac{32}{5}$. Giá trị của tích phân $\int\limits_0^2 f(x)dx$ bằng?

A. $-\dfrac{3}{2}$. **B.** $-\dfrac{2}{3}$. **C.** $-\dfrac{7}{3}$. **D.** $\dfrac{7}{3}$.

Lời giải

Vẫn như bài trên ta phải làm xuất hiện $\left(f'(x)\right)^4$. Tích phân từng phần $\int\limits_0^2 x^2f(x)dx=\dfrac{8}{15}$ kết hợp với $f(2)=1$, ta được $\int\limits_0^2 x^3f'(x)dx=\dfrac{32}{5}$.

Áp dụng *Cauchy – Schwarz 2* lần ta được

$$\left(\frac{32}{5}\right)^4=\left(\int_0^2 x^3f'(x)dx\right)^4=\left(\int_0^2 x^2.xf'(x)dx\right)^4\le\left(\int_0^2 x^4dx\right)^2\left(\int_0^2 x^2\left[f'(x)\right]^2dx\right)^2$$

$$\le\left(\int_0^2 x^4dx\right)^2\left(\int_0^2 x^2\left[f'(x)\right]^2dx\right)^2\le\left(\int_0^2 x^4dx\right)^2\times\left(\int_0^2 x^4dx.\int_0^2\left[f'(x)\right]^4dx\right)$$

$$=\left(\int_0^2 x^4dx\right)^3\times\int_0^2\left[f'(x)\right]^4dx=\frac{1048576}{625}=\left(\frac{32}{5}\right)^4.$$

Dấu $"="$ xảy ra khi $xf'(x)=kx^2\Rightarrow f'(x)=kx$ thay vào $\int\limits_0^2\left[f'(x)\right]^4dx=\frac{32}{5}$ ta tìm được $k=1$

$$\Rightarrow f'(x)=x\Rightarrow f(x)=\int xdx=\frac{x^2}{2}+C\xrightarrow{f(2)=1}C=-1.$$

Vậy $f(x)=\frac{x^2}{2}-1\Rightarrow\int\limits_0^2 f(x)dx=-\frac{2}{3}.$

Chọn ý **B.**

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức *AM - GM* ta có:

$$\left[f'(x)\right]^4+x^4+x^4+x^4\ge 4x^3f'(x)$$

Do vậy $\int\limits_0^2\left[f'(x)\right]^4dx+3\int\limits_0^2 x^4dx\ge 4\int\limits_0^2 x^3f'(x)dx.$ Mà giá trị của hai vế bằng nhau, có nghĩa là dấu $"="$ xảy ra nên $f'(x)=x$. Đến đây là tiếp như trên!

Câu 5.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f(1)=\frac{3}{2}$; $\int_0^1 f(x)dx=\frac{5}{6}$ và $\int_0^1(x-1)\sqrt{1+\frac{x}{x-2}\left(f'(x)\right)^2}dx=-\frac{1}{3}$. Tính $\int_0^1 f^2(x)dx$?

A. $\frac{7}{3}$ **B.** $\frac{8}{15}$ **C.** $\frac{53}{60}$ **D.** $\frac{203}{60}$

Lời giải

Một bài toán khá khó, ta thấy rằng có một lượng bình phương trong căn nhưng tuy nhiên nếu để nguyên thì không thể nào áp dụng Cauchy – Schwarz được, do đó sẽ nảy ra ý tưởng sử dụng bất đẳng thức AM – GM để phá căn. Nhưng ta không thể áp dụng luôn được do $x-1<0$ bởi bất đẳng thức AM – GM áp dụng cho 2 số dương, do đó phải đổi chiều lại mới sử dụng được. Trước tiên phải biến đổi giả thiết đầu tiên trước đã.

Sử dụng tích phân từng phần ta có: $\int_0^1 f(x)dx=\frac{5}{6}=f(1)-\int_0^1 x.f'(x)dx\Rightarrow\int_0^1 x.f'(x)dx=\frac{2}{3}$

Mặt khác theo bất đẳng thức *AM – GM ta có:*

$$2(1-x)\sqrt{1+\frac{x}{x-2}\left(f'(x)\right)^2}\le(1-x)^2+1+\frac{x}{x-2}\left(f'(x)\right)^2$$

Tích phân hai vế trên đoạn $[0;1]$ ta có:

$$\frac{2}{3} \le \frac{4}{3} + \int_0^1 \frac{x}{x-2}\left(f'(x)\right)^2 dx \Rightarrow \int_0^1 \frac{x}{2-x}\left(f'(x)\right)^2 dx \le \frac{2}{3}$$

Theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz ta có:*

$$\left(\int_0^1 x.f'(x)dx\right)^2 = \frac{4}{9} = \left(\int_0^1 \sqrt{x(2-x)}\sqrt{\frac{x}{2-x}}f'(x)dx\right)^2 \le \int_0^1 x(2-x)dx.\int_0^1 \frac{x}{2-x}\left(f'(x)\right)^2 dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x}{2-x}\left(f'(x)\right)^2 dx \ge \frac{2}{3} \Rightarrow f'(x) = 2-x \Rightarrow f(x) = 2x - \frac{x^2}{2} \Rightarrow \int_0^1 f^2(x)dx = \frac{53}{60}.$$

Chọn ý **C.**

Câu 6.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 xf(x)dx = 0$ và $\max_{[0;1]}|f(x)| = 6$. Giá trị lớn nhất của tích phân $\int_0^1 x^2 f(x)dx$ là?

A. 2 **B.** $2-\sqrt{2}$ **C.** $\frac{3}{5}$ **D.** $-1+\sqrt{2}$

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có

$$\left|\int_0^1 x^2 f(x)dx\right| = \left|\int_0^1 x^2 f(x)dx - \int_0^1 axf(x)dx\right| = \left|\int_0^1 \left(x^2 - ax\right)dx\right|$$

$$\le \int_0^1 \left|x^2 - ax\right|\left|f(x)\right|dx \le \int_0^1 \left|x^2 - ax\right|\max_{[0;1]}\left|f(x)\right|dx = 6\int_0^1 \left|x^2 - ax\right|dx$$

Do đó $\left|\int_0^1 x^2 f(x)dx\right| \le 6\min_{a\in\mathbb{R}}\int_0^1 \left|x^2 - ax\right|dx \le 6\min_{[0;1]}\int_0^1 \left|x^2 - ax\right|dx = 2-\sqrt{2}$.

Dấu "=" xảy ra tại $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Chọn ý **B.**

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 xf(x)dx = 0$ và $\max_{[0;1]}|f(x)| = 6$. Giá trị lớn nhất của tích phân $\int_0^1 x^3 f(x)dx$ là?

A. $\frac{3}{2}$ **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** $\frac{3}{5}$ **D.** $\frac{3}{4}$

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 x^2 f(x)dx = 0$ và $\max_{[0;1]}|f(x)| = 6$. Giá trị lớn nhất của tích phân $\int_0^1 x^3 f(x)dx$ là?

A. $\frac{1}{8}$ **B.** $\frac{3\left(2-\sqrt[3]{4}\right)}{4}$ **C.** $\frac{2-\sqrt[3]{4}}{16}$ **D.** $\frac{1}{24}$

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 xf(x)dx = 0$ và $\max_{[0;1]}|f(x)| = 6$. Giá trị lớn nhất của tích phân $\int_0^1 x^4 f(x)dx$ là?

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **B.** $\frac{3(4-\sqrt{2})}{10}$ **C.** $\frac{4-\sqrt{2}}{20}$ **D.** $\frac{\sqrt{2}}{24}$

Tóm lại:

- Đây là một vấn đề có thể gọi là khó, nhưng tuy nhiên nếu tìm hiểu kỹ thì ta có thể thấy nó cũng khá đơn giản, mấu chốt vẫn luôn là các đại lượng bình phương, các đại lượng khác đều phải biến đổi để đưa về đại lượng này.
- Kinh nghiệm giải nhanh: Các bài toán ở đây dấu "=" đều xảy ra tại $f(x) = k.g(x)$, ví dụ như bài toán ví dụ 1, $f'(x) = kx^3$, vậy trong khi thi trắc nghiệm nếu biến đổi theo đúng mẫu của bất đẳng thức này rồi thì ta có thể dự đoán được mối liên hệ và thế ngược lại tìm hằng số k, không phải mất công sử dụng bất đẳng thức để chứng minh nó nữa, sẽ tiết kiệm được thời gian làm bài!

LUYỆN TẬP

Câu 1: Với các số thực $a \in [0;1]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = \int_0^1 |x^2 - ax| dx$

A. $m = \frac{2-\sqrt{2}}{6}$ **B.** $m = \frac{-1+\sqrt{2}}{3}$ **C.** $m = \frac{-1+\sqrt{2}}{6}$ **D.** $m = \frac{2-\sqrt{2}}{3}$

Chọn ý **A.**

Áp dụng công thức tính diện tích hình phẳng ta dễ dàng tìm được $S \ge \frac{2-\sqrt{2}}{6}$.

Câu 2: Kí hiệu A là tập các hàm số liên tục trên đoạn $[0;1]$.

Tìm $I = \max_{f(x)\in A}\left\{\int_0^1 x^{2013} f(x)dx - \int_0^1 x.f^2(x)dx\right\}$

A. $\frac{1}{2014}$ **B.** $\frac{503}{2014}$ **C.** $\frac{2012}{2013}$ **D.** $\frac{1}{16104}$

: Chọn ý **A.**

Ta có $\int_0^1 x^{2013} f(x)dx - \int_0^1 x.f^2(x)dx = -\int_0^1 \left(\sqrt{x}f(x) - \frac{x^{2012}\sqrt{x}}{2}\right)^2 dx + \frac{1}{4}\int_0^1 x^{4025}dx \le \frac{1}{4.4026}$

Câu 3: Tìm giá trị nhỏ nhất của tích phân $I = \int_a^b |x^2 + (2-m)x - 2| dx \, (a < b)$ trong đó a,b là nghiệm của phương trình $x^2 + (2-m)x - 2 = 0$

A. $\frac{128}{9}$ **B.** $2\sqrt{2}$ **C.** $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ **D.** 8

Chọn ý **C.**

Áp dụng công thức tính diện tích hình phẳng ta dễ dàng tìm được $I \ge \frac{8\sqrt{2}}{3}$

Câu 4: Với các số thực $a \in [0;1]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tích phân $I = \int_0^1 \left|x^3 - ax\right| dx$.

A. $\frac{2-\sqrt{2}}{6}$ **B.** $\frac{1}{8}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{2-\sqrt{2}}{8}$

Chọn ý **B.**

Phá trị tuyệt đối ta có

$$M = \int_0^1 \left|x^3 - ax\right| dx = \int_0^{\sqrt{a}} \left|x^3 - ax\right| dx + \int_{\sqrt{a}}^1 \left|x^3 - ax\right| dx$$
$$= \int_0^{\sqrt{a}} \left(ax - x^3\right) dx + \int_{\sqrt{a}}^1 \left(x^3 - ax\right) dx = \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{8} \ge \frac{1}{8}$$

Câu 5: Cho *m* là tham số thực $m \in [1;3]$. Gọi *a,b* lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của tích phân $S = \int_m^{2m} \left|x^3 - 4mx^2 + 5m^2x - 2m^3\right| dx$. Tính $P = a + b$

A. $P = \frac{41}{6}$ **B.** $P = 1$ **C.** $P = \frac{21}{4}$ **D.** $P = 2$

Chọn ý **A.**

Biến đổi giả thiết ta có

$$S = \int_m^{2m} \left|x^3 - 4mx^2 + 5m^2x - 2m^3\right| dx = \int_m^{2m} \left|(x-m)^2(x-2m)\right| dx$$
$$= -\int_m^{2m} \left((x-m)^2(x-2m)\right) dx = -\int_m^{2m} (x-m)^3 d(x-m) + m\int_m^{2m} (x-m)^2 d(x-m)$$
$$= \left(-\frac{1}{4}(x-m)^4 + \frac{m}{3}(x-3)^3\right)\Bigg|_m^{2m} = \frac{1}{12}m^4 \in \left[\frac{1}{12}; \frac{81}{12}\right]$$

Câu 6: Kí hiệu A là tập các hàm số liên tục trên đoạn $[0;1]$ và nhận giá trị không âm trên đoạn $[0;1]$. Xác định số thực *c* nhỏ nhất sao cho $\int_0^1 f\left(\sqrt[2018]{x}\right) dx \le c\int_0^1 f(x) dx \,\forall f(x) \in A$.

A. 2018 **B.** 1 **C.** $\frac{1}{2018}$ **D.** $\sqrt{2018}$

Chọn ý **A.**

Đặt $t^{2018} = x \Rightarrow dx = 2018t^{2017} \Rightarrow \int_0^1 f\left(\sqrt[2018]{x}\right) dx = 2018\int_0^1 t^{2017} f(t) dt \le 2018\int_0^1 f(t) dt$

Do c nhỏ nhất nên $c \le 2018$. Ta sẽ chứng minh $c = 2018$ là số cần tìm. Ta xét hàm số $f(x) = x^p$ thay vào bất đẳng thức đề bài ta có $\int_0^1 x^{\frac{p}{2018}} dx \le c\int_0^1 x^p dx \Rightarrow c \ge \frac{2018(p+1)}{p+2018}$

Cho $p \to +\infty$ ta suy ra $c \ge 2018$. Vậy $c = 2018$ là số cần tìm

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 2018f(0)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $M = \int_0^1 \left[\frac{1}{\left(f(x)\right)^2} + \left(f'(x)\right)^2\right] dx$

A. $\ln 2018$ **B.** $2\ln 2018$ **C.** $2e$ **D.** $2018e$

Chọn ý **B.**

Sử dụng cách phân tích bình phương ta có

$$M=\int_0^1\left[\frac{1}{\left(f(x)\right)^2}+\left(f'(x)\right)^2\right]dx=\int_0^1\left[\frac{1}{f(x)}-f'(x)\right]^2dx+2\int_0^1\frac{f'(x)}{f(x)}dx$$

$$\geq 2\int_0^1\frac{f'(x)}{f(x)}dx=2\ln 2018$$

Câu 8: Cho 2 số thực *a,b* thỏa mãn $a<b$ và $a+b=ab+4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức tích phân $M=\int_a^b\left|(x-a)^2(x-b)\right|dx$.

A. 12 **B.** 0 **C.** $\frac{64}{3}$ **D.** $\frac{49}{3}$

Chọn ý **A.**

Thực hiện tương tự các câu trên.

Câu 9: Kí hiệu A là tập các hàm số liên tục trên đoạn $[0;1]$.

Tìm $I=\min\limits_{f(x)\in A}\left\{-\int_0^1 x^{2013}f(x)dx+\int_0^1 x.f^2(x)dx\right\}$

A. $-\frac{1}{2019}$ **B.** $-\frac{1}{16144}$ **C.** $-\frac{2017}{2018}$ **D.** $-\frac{1}{16140}$

Chọn ý **B.**

Câu 10: Với $m\in[1;3]$, gọi *a,b* lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $I=\int_m^{2m}(x-m)^2(x-2m)^2dx$. Tính $a+b=?$

A. 31 **B.** 36 **C.** $\frac{122}{15}$ **D.** $\frac{121}{4}$

Chọn ý **C.**

Câu 11: Biết giá trị nhỏ nhất của $I=\int_{2m}^{2m^2+2}\left|x^2-2\left(m^2+m+1\right)x+4\left(m^3+m\right)\right|dx=\frac{a}{b}$, với *a,b* là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $a+b=?$

A. 7 **B.** 337 **C.** 25 **D.** 91

Chọn ý **C.**

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $a.f(b)+b.f(a)\leq\frac{2018}{\pi}$ với mọi *a,b* thuộc đoạn $[0;1]$. Tìm giá trị lớn nhất của tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$

A. $\frac{1009}{\pi}$ **B.** $\frac{2018}{\pi}$ **C.** $\frac{1009}{2}$ **D.** 1009

Chọn ý **C.**

Đặt $x=\sin t\Rightarrow dx=\cos tdt\Rightarrow M=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin t)\cos tdt$

Tương tự đặt $x=\cos t\Rightarrow M=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos t)\sin tdt$

Do đó $M=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(f(\cos t)\sin t+f(\sin t)\cos t\right)dt\le\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2018}{\pi}dt\le\frac{1009}{2}$

Dấu "=" xảy ra chẳng hạn tại $f(x)=\frac{2018}{\pi\left(x^2+1\right)}$

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(x)+f\left(\left(1-\sqrt{x}\right)^2\right)\le 1$ với mọi x thuộc đoạn $[0;1]$. Tìm giá trị lớn nhất của tích phân $I=\int_0^1\left(1-\sqrt{x}\right)f(x)dx$.

A. $\frac{1}{8}$ **B.** $\frac{\pi}{12}$ **C.** $\frac{1}{6}$ **D.** $\frac{\pi}{16}$

Chọn ý **C.**

Đặt $x=\sin^4 t\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2 t\right)f\left(\sin^4 t\right)4\sin^3 t\cos tdt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\sin^4 t\right)4\sin^3 t\cos^3 tdt$

Đặt $x=\cos^4 t\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2 t\right)f\left(\cos^4 t\right)4\cos^3 t\sin tdt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\cos^4 t\right)4\sin^3 t\cos^3 tdt$

Do đó $I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(f\left(\sin^4 t\right)+f\left(\cos^4 t\right)\right)\sin^3 t\cos^3 tdt\le 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\cos^3 tdt=\frac{1}{6}$

Câu 14: Cho a,b là hai số thực thỏa mãn $0\le a\le b\le 1$. Đặt $f(a,b)=\int_a^b\left(2-x-3x^2\right)dx\,(a<b)$. Biết rằng $\max f(a,b)=\frac{m}{n}$ với *m,n* là các số thực dương vào $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $T=m+n$.

A. 49 **B.** 71 **C.** 67 **D.** 179

Chọn ý **A.**

Ta đặt $g(a)=\int_a^b\left(2-x-3x^2\right)dx=2(b-a)+\frac{a^2-b^2}{2}+a^3-b^3$

Ta có $g'(a)=0\Leftrightarrow a=-1;a=\frac{2}{3}\Rightarrow\max\limits_{[0;1]}g(a)=\max\left\{g(0);g(1);g\left(\frac{2}{3}\right)\right\}$

$$=\max\left\{\frac{1}{2}\left(-2b^3-b^2+4b\right);\frac{1}{2}\left(-2b^3-b^2+4b\right)-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\left(-2b^3-b^2+4b\right)-\frac{22}{27}\right\}$$

$$=g(b)=\frac{1}{2}\left(-2b^3-b^2+4b\right)\le\frac{22}{27}$$

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f'(x)\le 1\forall x$ và $f(1)=0$. Tìm giá trị lớn nhất của $f(1)$

A. $e-1$ **B.** $\frac{e-1}{e}$ **C.** $\frac{e}{e-1}$ **D.** e

Chọn ý **B.**

Câu 16: Cho $f(x)$ liên tục trên $[1;8]$ thỏa mãn $\int\limits_1^2\left(\left(f\left(x^3\right)\right)^2+2f\left(x^3\right)\right)dx=\frac{2}{3}\int\limits_1^8 f(x)dx-\frac{38}{15}$. Giá trị của tích phân $\int_1^8 f(x)dx$ bằng?

A. $\frac{2\left(\sqrt[3]{2}-4\right)}{5}$ **B.** $\frac{58}{5}$ **C.** $\frac{490}{3}$ **D.** $\frac{128}{5}$

Chọn ý **B.**

Đặt $x^3=t\Rightarrow 3x^2dx=dt\Rightarrow dx=\frac{dt}{3\sqrt[3]{t^2}}\Rightarrow\int_1^2\left(\left(f\left(x^3\right)\right)^2+2f\left(x^3\right)\right)dx=\int_1^8\frac{\left(f(x)^2+2f(x)\right)}{3\sqrt[3]{x^2}}dx$

Đến đây ta lại sử dụng kỹ thuật đưa về bình phương để giải quyết bài toán!

Câu 17: Cho số thực dương *a*, giá trị lớn nhất của tích phân $I=\int_{-2a}^{a}\left|\frac{2x^2+2ax-4a^2}{1+a^4}\right|dx$ bằng?

A. $\frac{27}{4}$ **B.** $\sqrt[4]{3}$ **C.** $\frac{27}{\sqrt[4]{4}}$ **D.** $\frac{27}{4\sqrt[4]{3}}$

Chọn ý **D.**

Câu 18: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f'(x)\ge f(x)>0$. Giá trị lớn nhất của tích phân $\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx$.

A. $\frac{1}{f(0)}$ **B.** $\frac{1}{f(1)}$ **C.** $\frac{1}{f(0)}-\frac{1}{f(1)}$ **D.** $\frac{1}{2f(0)}+\frac{1}{2f(1)}$

Chọn ý **C.**

Ta có $\frac{f'(x)}{f(x)}\ge 1\Rightarrow\frac{1}{f(x)}\le\frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}\Rightarrow\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx\le\int_0^1\frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}dx=\frac{1}{f(0)}-\frac{1}{f(1)}$

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=1$ và $\int_0^1\left(f^3(x)+4\left(f'(x)\right)^3\right)dx\le 3\int_0^1 f'(x)f^2(x)dx$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $2\left(\sqrt{e}-1\right)$ **B.** $2\left(e^2-1\right)$ **C.** $\frac{-1+\sqrt{e}}{2}$ **D.** $\frac{e^2-1}{2}$

Chọn ý **A.**

Nhận thấy $f'(x)>0,\forall x\in[0;1]\Rightarrow 1=f(0)\le f(x)\le f(1)$

Khi đó ta có $f^3(x)+4\left[f'(x)\right]^3-3f'(x)f^2(x)=\left[f(x)-2f'(x)\right]^2\left(f(x)+f'(x)\right)\ge 0$

Đến đây ta có thể dễ dàng giải quyết bài toán!

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1], f'(x)\ge 2f(x)>0$, với mọi $x\in[0;1]$ và $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{f(x)}}dx=\frac{1}{\sqrt{f(0)}}-\frac{1}{\sqrt{f(1)}}$. Giá trị của biểu thức $\frac{f(1)}{f(0)}$ bằng

A. $\sqrt{2e}$ **B.** e^2 **C.** $2e$ **D.** $\frac{e}{2}$

Chọn ý **C.**

Ta có $f'(x) \ge 2f(x) > 0 \Rightarrow 2 \le \frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{f(x)}}dx \le \int_0^1 \frac{f'(x)}{2\sqrt{f^3(x)}}dx = \frac{1}{\sqrt{f(0)}} - \frac{1}{\sqrt{f(1)}}$

Dấu "=" xảy ra khi $f'(x) = 2f(x) \Rightarrow f(x) = ke^{2x}\ (k > 0) \Rightarrow \frac{f(1)}{f(0)} = \frac{ke^2}{ke^0} = e^2$

Câu 21.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm cấp hai thỏa mãn $x.f''(x) \ge e^x + x$ và $f'(2) = 2e,\ f(0) = e^2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $f(2) \le 4e - 1.$ **B.** $f(2) \le 2e + e^2.$ **C.** $f(2) \le e^2 - 2e.$ **D.** $f(2) > 12.$

Lời giải

Từ giả thiết $x.f''(x) \ge e^x + x$ lấy tích phân cận từ 0 đến 2 ta có

$$\int_0^2 x.f''(x)dx \ge \int_0^2 (e^x + x)dx\ (1)$$

Áp dụng tích phân từng phần ta đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f''(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f'(x) \end{cases}$

Khi đó $(1) \Leftrightarrow x.f'(x)\Big|_0^2 - \int_0^2 f'(x)dx \ge \left(e^x + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2$

$$\Leftrightarrow x.f'(x)\Big|_0^2 - f(x)\Big|_0^2 \ge \left(e^x + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 \Leftrightarrow \left[2.f'(2) - 0.f'(0)\right] - \left[f(2) - f(0)\right] \ge e^2 + 2 - 1$$

Mặt khác do $f'(2) = 2e,\ f(0) = e^2 \Rightarrow f(2) \le 4e - 1$

Chọn ý **A.**

Câu 22.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) > 0, \forall x \in [0;8]$ và $\int_0^8 f(x)dx = 10$. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$ trên $(0;8]$ là?

A. $\frac{4}{5}$ **B.** 10 **C.** $\frac{5}{4}$ **D.** 8

Lời giải

Ta có $g'(x) = \frac{\left(\int_0^x f(t)dt\right)'.x - 1\int_0^x f(t)dt}{x^2} = \frac{xf(x) - \int_0^x f(t)dt}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}$

$\Rightarrow h'(x) = f(x) + xf'(x) - f(x) = xf'(x) > 0, \forall x \in [0;8] \Rightarrow h(x) > h(0) = 0$

$\Rightarrow g'(x) = \frac{h(x)}{x^2} > 0, \forall x \in (0;8] \Rightarrow \max\limits_{(0;8]} g(x) = g(8) = \frac{5}{4}$

Chọn ý **C.**

Câu 23.

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)>0,\ \forall x\in[1;2]$ và $\int_1^2 \frac{[f'(x)]^3}{x^4}dx=\frac{7}{375}$. Biết $f(1)=1$, $f(2)=\frac{22}{15}$, tính $I=\int_1^2 f(x)dx$.

A. $P=\frac{71}{60}$ **B.** $P=\frac{6}{5}$ **C.** $P=\frac{73}{60}$ **D.** $P=\frac{37}{30}$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\frac{[f'(x)]^3}{x^4}+\frac{x^2}{125}+\frac{x^2}{125}\ge 3\sqrt[3]{\frac{[f'(x)]^3}{x^4}.\frac{x^2}{125}.\frac{x^2}{125}}=\frac{3f'(x)}{25}$$

Lấy tích phân hai vế BĐT trên ta có: $\int_1^2 \frac{[f'(x)]^3}{x^4}dx+2\int_1^2\frac{x^2}{125}dx\ge\int_1^2\frac{3f'(x)}{25}dx$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 \frac{[f'(x)]^3}{x^4}dx+2.\frac{7}{375}\ge\frac{3}{25}[f(2)-f(1)]\Leftrightarrow\int_1^2 \frac{[f'(x)]^3}{x^4}dx\ge\frac{7}{375}.$$

Kết hợp với giả thiết ta có dấu "=" của BĐT trên xảy ra

$$\frac{[f'(x)]^3}{x^4}=\frac{x^2}{125}\Leftrightarrow[f'(x)]^3=\frac{x^6}{125}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{x^2}{5}\Rightarrow f(x)=\frac{x^3}{15}+C.$$

Mà $f(1)=1\Rightarrow 1=\frac{1}{15}+C\Rightarrow C=\frac{14}{15}\Rightarrow f(1)=\frac{x^3+14}{15}$

Ta có $I=\int_1^2\frac{x^3+14}{15}dx=\frac{71}{60}$.

Chọn ý **A.**

Câu 24.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện $\int_0^1 xf(x)\left(x^2+f^2(x)\right)dx\ge\frac{2}{5}$ .Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1\left(x^2+\frac{1}{2}f^2(x)\right)dx$ bằng?

A. $\frac{3}{10}$ **B.** $\frac{16}{45}$ **C.** $\frac{2}{5}$ **D.** $\frac{7}{20}$

Lời giải

Để đơn giản ta coi $a=f(x)$ khi đó với $\begin{cases}A=\int_0^1\left(x^2+\frac{1}{3}f^2(x)\right)^2dx\\ B=\int_0^1 xf(x)\left(x^2+f^2(x)\right)dx\end{cases}$ ta có:

$A=\int_0^1\left(x^2+\frac{1}{3}a^2\right)^2dx; B=\int_0^1 xa\left(x^2+a^2\right)dx\ge\frac{2}{5}$ và từ đánh giá cùng bậc có

$$\left(a^2+3x^2\right)^2-4ax\left(a^2+x^2\right)-8x^4=(a-x)^4\ge 0$$

$$\Rightarrow 9A=\int_0^1\left(a^2+3x^2\right)^2dx\ge 4\int_0^1 ax\left(x^2+a^2\right)dx+8\int_0^1 x^4dx=4B+\frac{8}{5}\ge\frac{16}{5}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=f(x),\forall x\in[0;1]$.

Chọn ý **B.**

Câu 25.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $[1;3]$ và $f(1)=0$, $\max\limits_{[1;3]}|f(x)|=\sqrt{10}$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int\limits_1^3\left[f'(x)\right]^2dx$ bằng?

A. 1. **B.** 5. **C.** 10. **D.** 20.

Lời giải

Nhận thấy rằng $\max\limits_{[1;3]}|f(x)|=\sqrt{10}\Rightarrow\exists x_0\in[1;3]$ sao cho $|f(x_0)|=\sqrt{10}$

Ta có $f(1)=0\Rightarrow\exists x_0\in(1;3]$ sao cho $|f(x_0)|=\sqrt{10}$.

Theo bất đẳng thức Holder ta có:

$$\left(\int_1^{x_0}f'(x)dx\right)^2\le\int_1^{x_0}1^2dx.\int_1^{x_0}\left[f'(x)\right]^2dx=(x_0-1).\int_1^{x_0}\left[f'(x)\right]^2dx$$

Mặt khác ta lại có $\left(\int_1^{x_0}f'(x)dx\right)^2=\left(f(x)\Big|_1^{x_0}\right)^2=\left(f(x_0)-f(1)\right)^2=10$

$$\Rightarrow\int\limits_1^{x_0}\left[f'(x)\right]^2dx\ge\frac{10}{x_0-1}\Rightarrow\int\limits_1^3\left[f'(x)\right]^2dx\ge\int\limits_1^{x_0}\left[f'(x)\right]^2dx\ge\frac{10}{x_0-1}\ge\frac{10}{3-1}$$

Chọn ý **B.**

Câu 26.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa $f'(x)\ge f(x)>0$, $\forall x\in[0;1]$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $f(0).\int\limits_0^1\frac{1}{f(x)}dx$ bằng?

A. 1. **B.** $\frac{e-1}{e}$. **C.** $\frac{e+1}{e}$. **D.** $e-1$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có $f'(x)\ge f(x)>0,\forall x\in[0;1]\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}\ge 1,\forall x\in[0;1]$.

Lấy tích phân 2 vế cận từ 0 đến t ta được

$$\int\limits_0^t\frac{f'(x)}{f(x)}dx\ge\int\limits_0^t 1dx\Leftrightarrow\ln f(x)\Big|_0^t\ge x\Big|_0^t\Leftrightarrow\ln f(t)-\ln f(0)\ge t\Leftrightarrow f(t)\ge f(0)e^t$$

Do đó $f(0).\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx \le \int_0^1 \frac{1}{e^x}dx = \frac{e-1}{e}$.

Chọn ý **B.**

Câu 27.

Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$. Đặt hàm số $g(x) = 1 + \int_0^{x^2} f(t)dt$. Biết rằng $g(x) \ge 2xf(x^2)$ với mọi $x \in [0;1]$, tích phân $\int_0^1 g(x)dx$ có giá trị lớn nhất bằng?

A. 1. **B.** $e-1$. **C.** 2. **D.** $e+1$.

Lời giải

Lấy đạo hàm 2 vế của giả thiết ta có $\begin{cases} g(0) = 1 \\ g'(x) = 2xf(x^2) \end{cases}$ và $g(x) > 0,\ \forall x \in [0;1]$.

Theo giả thiết $g(x) \ge 2xf(x^2) \Rightarrow g(x) \ge g'(x) \Leftrightarrow \frac{g'(x)}{g(x)} \le 1$

Lấy tích phân 2 vế cận từ 0 tới t ta được

$$\int_0^t \frac{g'(x)}{g(x)}dx \le \int_0^t 1dx \Leftrightarrow \ln g(x)\Big|_0^t \le x\Big|_0^t$$

$$\Leftrightarrow \ln g(t) - \ln g(0) \le t \Leftrightarrow \ln g(t) \le t \Leftrightarrow g(t) \le e^t$$

Do đó $\int_0^1 g(x)dx \le \int_0^1 e^x dx = e-1$

Chọn ý **B.**

Câu 28.

Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn điều kiện $f(x) \le 2018 + 2\int_0^x f(t)dt$ với mọi $x \in [0;1]$. Biết giá trị lớn nhất của tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ có dạng $ae^2 + b$ với $a,\ b \in \mathbb{Z}$. Tính $a+b$.

A. 0. **B.** 1009. **C.** 2018. **D.** 2020.

Lời giải

Đặt $g(x) = 2018 + 2\int_0^x f(t)dt$, lấy đạo hàm 2 vế ta có $\begin{cases} g(0) = 2018 \\ g'(x) = 2f(x) \end{cases}$ và $g(x) > 0, \forall x \in [0;1]$

Theo giả thiết $g(x) \ge f(x) \Rightarrow g(x) \ge \frac{g'(x)}{2} \Leftrightarrow \frac{g'(x)}{g(x)} \le 2$

Lấy tích phân 2 vế cận từ 0 đến t ta được

$$\int_0^t \frac{g'(x)}{g(x)}dx \le \int_0^t 2dx,\ \forall t \in [0;1] \Leftrightarrow \ln|g(x)|\Big|_0^t \le 2x\Big|_0^t$$

$$\Leftrightarrow \ln g(t) - \ln g(0) \le 2t \Leftrightarrow \ln g(t) \le 2t + \ln 2018 \Leftrightarrow g(t) \le 2018.e^{2t}$$

Do đó $\int_0^1 f(x)dx \le \int_0^1 g(x)dx \le 2018\int_0^1 e^{2x}dx = 1009e^{2x}\Big|_0^t = 1009e^2 - 1009.$

Chọn ý **A.**

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên $[0;1]$. Đặt hàm số $g(x) = 1 + \int_0^x f(t)dt$. Biết $g(x) \le \sqrt{f(x)}$ với mọi $x \in [0;1]$, tích phân $\int_0^1 \frac{1}{g(x)}dx$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** 1.

2. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn điều kiện $f^2(x) \le 1 + 3\int_0^x f(t)dt = g(x)$ với mọi $x \in [0;1]$, tích phân $\int_0^1 \sqrt{g(x)}dx$ có giá trị lớn nhất bằng?

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{7}{4}$. **C.** $\frac{9}{5}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Chọn ý **B.**

Câu 29.

Cho hàm số $f(x)$ dương và liên tục trên $[1;3]$, thỏa $\max\limits_{[1;3]} f(x) = 2$, $\min\limits_{[1;3]} f(x) = \frac{1}{2}$ và biểu thức $S = \int_1^3 f(x)dx.\int_1^3 \frac{1}{f(x)}dx$ đạt giá trị lớn nhất, khi đó hãy tính $I = \int_1^3 f(x)dx$.

A. $\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{7}{5}$. **C.** $\frac{7}{2}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có $\frac{1}{2} \le f(x) \le 2$, suy ra $f(x) + \frac{1}{f(x)} \le \frac{5}{2}$.

$$\Rightarrow \int_1^3 \left[f(x) + \frac{1}{f(x)}\right]dx \le \int_1^3 \frac{5}{2}dx \Leftrightarrow \int_1^3 f(x)dx + \int_1^3 \frac{1}{f(x)}dx \le 5 \Leftrightarrow \int_1^3 \frac{1}{f(x)}dx \le 5 - \int_1^3 f(x)dx$$

Khi đó $S = \int_1^3 f(x)dx.\int_1^3 \frac{1}{f(x)}dx \le \int_1^3 f(x)dx.\left(5 - \int_1^3 f(x)dx\right) = -\left(\int_1^3 f(x)dx - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} \le \frac{25}{4}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\int_1^3 f(x)dx = \frac{5}{2}$.

Chọn ý **D.**

Câu 30.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn với mọi x,y,α,β và $\alpha^2+\beta^2>0$ ta có $\alpha.f(x)+\beta.f(y)\ge(\alpha+\beta)f\left(\dfrac{\alpha x+\beta y}{\alpha+\beta}\right)$. Biết $f(0)=0,\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)dx=2$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. 8 **B.** 4 **C.** $2\sqrt{2}$ **D.** 2

Lời giải

Áp dụng tính chất của tích phân ta có:

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(1-x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left(f(x)+f(1-x)\right)dx\ge\frac{1}{2}\int_0^1(1+1)f\left(\frac{1.x+1(1-x)}{1+1}\right)dx=f\left(\frac{1}{2}\right)$$

Mặt khác ta lại có:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^1\left[f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)\right]dx=2\int_0^1\left[(1-x)f(0)+xf\left(\frac{1}{2}\right)\right]dx$$

$$\ge 2\int_0^1(1-x+x)f\left(\frac{(1-x).0+x.\frac{1}{2}}{1-x+x}\right)dx=2\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx=4\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)dx=8$$

Vậy $\int_0^1 f(x)dx\ge 8$, dấu "=" xảy ra chẳng hạn tại $f(x)=16x$.

Chọn ý **A.**

Câu 31.

Cho hàm số $f(x)$ dương liên tục $[0;+\infty)$ thỏa mãn đồng thời điều kiện $f(x)\le 2018+2\int_0^x f(t)dt,\forall x\ge 0;\int_0^1 f(x)dx=1009\left(e^2-1\right)$. Tính tích phân $\int_0^1\frac{f(x)}{e^x}dx$?

A. $2018(e-1)$ **B.** $1009(e+1)$ **C.** $2018(e-2)$ **D.** $1009(e-1)$

Lời giải

Ta có $f(x)\le 2018+2\int_0^x f(t)dt\Leftrightarrow f(x)-2018-2\int_0^x f(t)dt\le 0(1)$

Đặt $g(x)=e^{ax}\left(\int_0^x f(t)dt+b\right);g'(x)=e^{ax}\left(a\int_0^x f(t)dt+f(x)+ab\right)$

Từ (1) ta thực hiện phép đồng nhất ta được $\begin{cases}a=-2\\ab=-2018\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\b=1009\end{cases}$

Suy ra $g'(x)\le 0,\forall x\ge 0\Rightarrow g(x)$ nghịch biến trên $[0;+\infty)$.

$$\Rightarrow e^{-2x}\left(\int_0^x f(t)dt+1009\right)=g(x)\le g(0)\Rightarrow 2\int_0^x f(t)dt+2018\le 2018e^{2x}$$

Vậy $f(x)\le 2018e^{2x}\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx\le 1009e^2-1009$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $f(x)=2018e^{2x} \Rightarrow \int_0^1 \frac{f(x)}{e^x}dx=2018(e-1)$

Chọn ý **A.**

Câu 32.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương liên tục trên đoạn $[1;3]$ thỏa mãn điều kiện $\int_1^3 \frac{[f'(x)]^3}{f(x)}dx=\frac{27}{4}; f(1)=2\sqrt{2}, f(3)=4$. Tích phân $\int_1^3 \frac{f(x)}{\sqrt{x+2}}dx$ bằng

A. $\sqrt{6}-\sqrt{5}$ **B.** $\sqrt{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}$ **C.** $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ **D.** $\sqrt{5}-2$

Lời giải

Vì $f'(x)>0, \forall x\in[1;3] \Rightarrow f(x)\ge f(1)=2\sqrt{2}>0, \forall x\in[1;3]$

Ta có $\int_1^3 \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{f(x)}}dx=\frac{3}{2}\sqrt[3]{[f(x)]^2}\Big|_1^3=\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{f^2(3)}-\sqrt[3]{f^2(1)}\right)=3$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho 3 số thực dương ta có:

$$\frac{[f'(x)]^3}{f(x)}+\frac{27}{8}+\frac{27}{8}\ge 3\sqrt[3]{\frac{[f'(x)]^3}{f(x)}.\frac{27}{8}.\frac{27}{8}}=\frac{27}{4}.\frac{f'(x)}{\sqrt[3]{f(x)}}$$

Lấy tích phân 2 vế trên đoạn $[1;3]$ ta được:

$$\int_1^3\left(\frac{[f'(x)]^3}{f(x)}+\frac{27}{8}+\frac{27}{8}\right)dx\ge\int_1^3\left(\frac{27}{4}.\frac{f'(x)}{\sqrt[3]{f(x)}}\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \int_1^3\frac{[f'(x)]^3}{f(x)}dx+\frac{27}{2}\ge\frac{81}{4}\Leftrightarrow\int_1^3\frac{[f'(x)]^3}{f(x)}dx\ge\frac{27}{4}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{[f'(x)]^3}{f(x)}=\frac{27}{8}\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{\sqrt[3]{f(x)}}=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{3}{2}\sqrt[3]{[f(x)]^2}=\frac{3}{2}x+C\Rightarrow f(x)=\sqrt{\left(x+\frac{2C}{3}\right)^3}$

Mặt khác $f(1)=2\sqrt{2}\Rightarrow C=\frac{3}{2}\Rightarrow f(x)=\sqrt{(x+1)^3}\Rightarrow\int_1^3\frac{f(x)}{\sqrt{x+2}}dx=\sqrt{6}-\sqrt{5}$

Chọn ý **A.**

Câu 33.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f(0)=\frac{1}{16}; \int_0^1(x+1)^3f'(x)dx=-\frac{1}{8}; \int_0^1\frac{[f(x)]^3}{[f'(x)]^2}dx=\frac{1}{64}$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x)dx$?

A. $\frac{1}{24}$ **B.** $\frac{1}{32}$ **C.** $\frac{1}{8}$ **D.** $\frac{1}{4}$

Lời giải

Áp dụng nguyên hàm từng phần ta có:

$$\int_0^1 (x+1)^3 f'(x)dx = (x+1)^3 f(x)\Big|_0^1 - 3\int_0^1 (x+1)^2 f(x)dx = -\frac{1}{8} \Rightarrow \int_0^1 (x+1)^2 f(x)dx = \frac{1}{16}$$

Áp dụng bất đẳng thức Holder ta có:

$$\frac{1}{16} = \int_0^1 \left| \frac{f(x)}{\left[f'(x)\right]^{\frac{2}{3}}} (x+1)^2 \left[f'(x)\right]^{\frac{2}{3}} \right| dx \le \left[\int_0^1 \left[\frac{f(x)}{\left[f'(x)\right]^{\frac{2}{3}}} \right]^3 dx \right]^{\frac{1}{3}} \left[\int_0^0 \left[(x+1)^2 \left[f'(x)\right]^{\frac{2}{3}} \right]^{\frac{3}{2}} dx \right]^{\frac{2}{3}}$$

$$= \left[\int_0^1 \frac{\left[f(x)\right]^3}{\left[f'(x)\right]^2} dx \right]^{\frac{1}{3}} \left(\int_0^1 (x+1)^3 f'(x)dx \right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{64} \right)^{\frac{1}{3}} \left(-\frac{1}{8} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{16}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\left[\frac{f(x)}{\left[f'(x)\right]^{\frac{2}{3}}} \right]^3 = k\left[(x+1)^2 \left[f'(x)\right]^{\frac{2}{3}} \right]^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \frac{\left[f'(x)\right]^3}{\left[f(x)\right]^3} = \frac{1}{k(x+1)^3} (1)$

Ta có $\int_0^1 \frac{\left[f(x)\right]^3}{\left[f'(x)\right]^2} dx = \int_0^1 \left[\frac{f(x)}{f'(x)} \right]^3 f'(x)dx = \int_0^1 k(x+1)^3 f'(x)dx = \frac{1}{64} \Rightarrow k = \frac{-1}{8}$

Khi đó ta được

$$(1) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{2}{x+1} \Rightarrow \ln f(x) = -2\ln|x+1| + C \xrightarrow{f(0)=\frac{1}{16}} f(x) = \frac{1}{16(x+1)^2} \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{32}$$

Chọn ý **B.**

Câu 34.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $\mathbb{R}$ thỏa $f(0) = 0, |f(x) - f(y)| = |\sin x - \sin y|$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Giá trị lớn nhất của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((f(x))^2 - f(x) \right) dx$ bằng

A. $\frac{\pi}{4} + 1$ **B.** $\frac{\pi}{8}$ **C.** $\frac{3\pi}{8}$ **D.** $1 - \frac{\pi}{4}$

Lời giải

Theo giả thiết ta có $|f(x)| = |f(x) - 0| = |f(x) - f(0)| \le |\sin x - \sin 0| = |\sin x|$

$$\Rightarrow \left[f(x)\right]^2 - f(x) \le \sin^2 x + \sin x \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left[f(x)\right]^2 - f(x) \right) dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 x + \sin x \right) dx = 1 + \frac{\pi}{4}$$

Dấu "=" xảy ra khi $f(x) = -\sin x$.

Chọn ý **A.**

Câu 35.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $[0;+\infty)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f(0)=1; f'(0)=0; f''(x)-5f'(x)+6f(x)\ge 0, \forall x\in[0;+\infty); \int_0^{\ln 2} f(x)dx = \frac{-1}{6}$. Tính giá trị của tích phân $\int_0^{\ln 2} f^2(x)dx$.

A. $\frac{15}{4}$ **B.** $\frac{35}{17}$ **C.** $\frac{27}{20}$ **D.** $\frac{24}{7}$

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có $f''(x)-5f'(x)+6f(x)\ge 0 \Leftrightarrow f''(x)-2f'(x)-3[f'(x)-2f(x)]\ge 0$

Đặt $g(x)=f'(x)-2f(x) \Rightarrow g'(x)-3g(x)\ge 0$

Xét hàm số $h(x)=e^{-3x}g(x) \Rightarrow h'(x)=-3e^{-3x}g(x)+e^{-3x}g'(x)=e^{-3x}(g'(x)-3g(x))\ge 0$

Suy ra $h(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty) \Rightarrow h(x)\ge h(0)=g(0)=f'(0)-2f(0)=-2$

$$\Rightarrow e^{-3x}g(x)\ge -2 \Leftrightarrow e^{-2x}(f'(x)-2f(x))+2e^x\ge 0$$

Xét hàm số $k(x)=e^{-2x}f(x)+2e^x \Rightarrow k'(x)=e^{-2x}(f'(x)-2f(x))+2e^x\ge 0$

Suy ra $k(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty) \Rightarrow k(x)\ge k(0)=f(0)+2=3$

$$\Rightarrow e^{-2x}f(x)+2e^x\ge 3 \Leftrightarrow f(x)\ge 3e^{2x}-2e^{3x} \Rightarrow \int_0^{\ln 2} f(x)dx \ge -\frac{1}{6}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $f(x)=3e^{2x}-2e^{3x} \Rightarrow \int_0^{\ln 2}[f(x)]^2dx=\frac{27}{20}$

Chọn ý **C.**

Câu 36.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm đến cấp 2 trên $[0;2]$ thỏa mãn điều kiện $f(0)-2f(1)+f(2)=1$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^2[f''(x)]^2dx$ bằng

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$\int_0^1[f''(x)]^2dx = 3\int_0^1 x^2dx.\int_0^1[f''(x)]^2dx \ \ge 3\left(\int_0^1 x.f''(x)dx\right)^2$$

Ta đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=f''(x)dx \end{cases} \Rightarrow 3\left(\int_0^1 xf''(x)dx\right)^2 = 3[f'(1)+f(0)-f(1)]^2$

Sử dụng bất đẳng thức Holder một lần nữa ta được

$$\int_1^2[f''(x)]^2dx = 3\int_1^2(x-2)^2dx.\int_1^2[f''(x)]^2dx \ \ge 3\left(\int_1^2(x-2).f''(x)dx\right)^2$$

Ta đặt $\begin{cases} u=x-2 \\ dv=f''(x)dx \end{cases} \Rightarrow 3\left(\int_1^2(x-2)f''(x)dx\right)^2 = 3[-f'(1)+f(2)-f(1)]^2$

Suy ra $2\int\limits_0^2 \left[f''(x)\right]^2 dx \ge 3\left[f'(1)+f(0)-f(1)\right]^2 + 3\left[-f'(1)+f(2)-f(1)\right]^2$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$3\left[f'(1)+f(0)-f(1)\right]^2 + 3\left[-f'(1)+f(2)-f(1)\right]^2 \ge 3.\frac{\left[f(0)-2f(1)+f(2)\right]^2}{2} = \frac{3}{2}.$$

Chọn ý **B.**

Câu 37.

Cho tích phân $I = \int_{-7}^{11}\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}\right)dx$, gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của I. Tính $S = M + m$?

A. $54\sqrt{2}+108$ **B.** $36\sqrt{2}+108$ **C.** $6\sqrt{3}+54$ **D.** $6\sqrt{3}+36$

Lời giải

Đặt $y = \sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}$ với $x \in [-7;11]$. Ta có $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+7}} - \frac{1}{2\sqrt{11-x}} = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Nhận thấy y′ không xác định tại $-7;11$, vẽ bảng biến thiên ta có $\sqrt{18} \le y \le 6$

$$\Rightarrow \int_{-7}^{11}\sqrt{18}dx \le \int_{-7}^{11}\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}\right)dx \le \int_{-7}^{11}6dx$$

$$\Leftrightarrow 54\sqrt{2} \le \int_{-7}^{11}\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}\right)dx \le 108$$

Chọn ý **A.**

Câu 38.

Cho tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}}$, biết rằng tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của I được viết dưới dạng $a\pi\left(\frac{1}{b}+\frac{\sqrt{c}}{d}\right)$, trong đó a, b, c, d là các số nguyên dương và $\frac{c}{d}$ là phân số tối giản. Tính $S = a+b+c+d$?

A. 14 **B.** 15 **C.** 16 **D.** 17

Lời giải

Ta có $x \in [0;1] \Rightarrow 0 \le x^3 \le x^2 \Rightarrow -x^2 \le -x^3 \le 0 \Rightarrow 4-2x^2 \le 4-x^2-x^3 \le 4-x^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{4-2x^2}} \ge \frac{1}{\sqrt{4-x^2-x^3}} \ge \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \Rightarrow \underbrace{\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx}_{I} \le \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2-x^3}}dx \le \underbrace{\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-2x^2}}dx}_{J}$$

Đặt $x = 2\sin t \Rightarrow dx = 2\cos tdt \Rightarrow I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\cos t}{\sqrt{4-(2\sin t)^2}}dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} dt = \frac{\pi}{6}$

Đặt $x=\sqrt{2}\sin t\Rightarrow dx=\sqrt{2}\cos tdt\Rightarrow J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\cos t}{\sqrt{4-2\left(\sqrt{2}\sin t\right)^2}}dt=\frac{\sqrt{2}}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$

Vậy $\frac{\pi}{6}\le\int\limits_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2-x^3}}dx\le\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$

Chọn ý **D.**

Câu 39.

Cho tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}},n\in\mathbb{N}^*$, biết rằng tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của I được viết dưới dạng $\frac{a\pi}{b}+\frac{c}{d}$, trong đó a, b, c, d là các số nguyên dương và $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ là phân số tối giản. Tính $S=a+b+c+d$?

A. 9 **B.** 10 **C.** 11 **D.** 12

Lời giải

Ta có $x^{2n}\ge 0\Rightarrow 1\le\frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}}\Rightarrow\int_0^{\frac{1}{2}}dx\le\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}}dx\Rightarrow\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}}dx\ge\frac{1}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $x=0$

Ta thấy $n\in\mathbb{N}^*,x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]\Rightarrow x^{2n}\le x^2\Rightarrow\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}}dx\le\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Đặt $x=\sin t\Rightarrow dx=\cos tdt\Rightarrow\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\text{costdt}}{\sqrt{1-\sin^2 t}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}dt=\frac{\pi}{6}$

Dấu "=" xảy ra khi $x=1$

Chọn ý **B.**

Câu 40.

Cho tích phân $I=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{e^{-x}\sin x}{x^2+1}dx$, biết rằng giá trị lớn nhất của I được viết dưới dạng $\frac{a\pi}{be}$, với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính tổng $S=a+b$

A. 13 **B.** 14 **C.** 14 **D.** 15

Lời giải

Ta có với mọi $x\in\left[1;\sqrt{3}\right]\Rightarrow -x\le -1\Rightarrow e^{-x}\le\frac{1}{e}$

$$\Rightarrow\frac{e^{-x}\sin x}{x^2+1}\le\frac{1}{e\left(x^2+1\right)}\Rightarrow\int_1^{\sqrt{3}}\frac{e^{-x}.\sin x}{x^2+1}dx\le\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{e\left(x^2+1\right)}dx$$

Xét tích phân $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{e\left(x^2+1\right)}dx$. Đặt $x=\text{tant}\Rightarrow dx=\left(\tan^2 t+1\right)dt$ ta được

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{e(x^2+1)}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\tan^2 t+1)dt}{e(\tan^2 t+1)} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{e} = \frac{\pi}{12e}$$

Vậy $I \le \frac{\pi}{12e}$.

Chọn ý **A.**

Câu 41.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$, hàm số $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(1)-f(0)=2$. Biết rằng $0 \le f'(x) \le 2\sqrt{2x}, \forall x \in [0;1]$. Khi đó, giá trị của tích phân $\int_0^1 (f'(x))^2 dx$ thuộc khoảng nào sau đây.

A. $(2;4)$ **B.** $\left(\frac{13}{3};\frac{14}{3}\right)$ **C.** $\left(\frac{10}{3};\frac{13}{3}\right)$ **D.** $(1;3)$

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có $0 \le f'(x) \le 2\sqrt{2x}, \forall x \in [0;1]$

$$\Rightarrow 0 \le [f'(x)]^2 \le 8x, \forall x \in [0;1] \Rightarrow 0 \le \int_0^1 [f'(x)]^2 dx \le \int_0^1 8x dx = 4 \ (1)$$

Theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có $\left(\int_0^1 f'(x)dx\right)^2 \le \int_0^1 [f'(x)]^2 dx$

Mặt khác $\left(\int_0^1 f'(x)dx\right)^2 = \left(f(x)\Big|_0^1\right)^2 = (f(1)-f(0))^2 = 4 \Rightarrow \int_0^1 [f'(x)]^2 dx \ge 4 \ (2)$

Từ $(1);(2) \Rightarrow \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 4$.

Chọn ý **A.**

Câu 42.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=f(1)=0$ và đồng thời điều kiện $\int_0^1 |f'(x)|dx = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $|f(x)|$ trên $[0;1]$?

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** 1

Lời giải

Ta có:

- Với $x \in \left[0;\frac{1}{2}\right] \Rightarrow |f(x)| = \left|\int_0^x f'(t)dt\right| \le \int_0^x |f'(t)|dt \le \int_0^{\frac{1}{2}} |f'(t)|dt$
- Với $x \in \left[\frac{1}{2};1\right] \Rightarrow |f(x)| = \left|\int_x^1 f'(t)dt\right| \le \int_x^1 |f'(t)|dt \le \int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(t)|dt$

$$\Rightarrow |f(x)| \le \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} |f'(t)|dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(t)|dt\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 |f'(t)|dt = \frac{1}{2}$$

Chọn ý **A.**

Câu 43.

Cho hàm số $f(x)>0,\forall x\in[0;1]$ và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)\ln[f(1)]-f(0)\ln[f(0)]=\ln 256,\int_0^1\frac{[f'(x)]^2}{x+1}dx=6,\int_0^1 f'(x)\ln[f(x)]dx=4\ln 4-3$. Tính giá trị của tích phân $\int_0^1 f^3(x)dx$?

A. $\frac{217}{5}$ **B.** $\frac{31}{5}$ **C.** $\frac{508}{7}$ **D.** $\frac{127}{7}$

Lời giải

Xét tích phân $I=\int_0^1 f'(x)\ln[f(x)]dx$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln[f(x)]\\dv=f'(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{f'(x)}{f(x)}dx\\v=f(x)\end{cases}\Rightarrow I=f(x)\ln[f(x)]\Big|_0^1-f'(x)=4\ln 4-3$

$$=\ln 256-\int_0^1 f'(x)dx=4\ln 4-3\Rightarrow\int_0^1 f'(x)dx=3$$

Áp dụng hệ quả của bất đẳng thức *Holder* ta có

$$9=\left(\int_0^1\frac{f'(x)}{\sqrt{x+1}}\cdot\sqrt{x+1}dx\right)^2\le\int_0^1\left[\frac{f'(x)}{\sqrt{x+1}}\right]^2dx.\int_0^1(x+1)dx=6.\frac{3}{2}=9$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $f'(x)=k(x+1)$, vì $\int_0^1 f'(x)dx=3\Rightarrow k=2$

$\Rightarrow f(x)=x^2+2x+C$, vì $f(1)\ln[f(1)]-f(0)\ln[f(0)]=\ln 256\Rightarrow C=1$

Vậy ta được $f(x)=x^2+2x+1\Rightarrow\int_0^1 f^3(x)dx=\frac{127}{7}$

Câu 44.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn các điều kiện $ef(1)=4f(0)=4$ và $\int_0^1 e^{2x}\left[(f'(x))^2-[f(x)]^2\right]dx+4\int_0^1 e^x f(x)dx=\frac{11}{3}$. Tính giá trị của tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$?

A. $\frac{4(e-1)}{e}$ **B.** $\frac{3(e-1)}{e}$ **C.** $\frac{2(e+2)}{e}$ **D.** $\frac{5(e-2)}{e}$

Lời giải

Đặt $u(x)=e^x f(x)\Rightarrow u'=e^x f(x)+e^x f'(x)\Rightarrow e^x f'(x)=u'-u$

Khi đó giả thiết trở thành $I=\int_0^1\left[(u'-u)^2-u^2+4u\right]dx=\frac{11}{3}$ trong đó $u(1)=4,u(0)=1$

$$\Leftrightarrow I=\int_0^1\left[(u')^2-2u.u'+4u\right]dx=\frac{11}{3}$$

Ta có $\int_0^1 u.u'dx = \left.\frac{u^2}{2}\right|_0^1 = \frac{15}{2}$ và $\int_0^1 udx = xu|_0^1 - \int_0^1 xu'dx = 4 - \int_0^1 xu'dx$

Từ đó suy ra $I = \int_0^1 \left[(u')^2 - 4xu'\right]dx = \frac{8}{3}$

Ta chọn tham số $m \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\int_0^1 [u' - 2x - m]^2 dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left[(u')^2 - 4xu'\right]dx - 2m\int_0^1 u'dx + \int_0^1 (2x+m)^2 dx = 0$$

Hay $\frac{8}{3} - 6m + \frac{4}{3} + 2m + m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$

Vì $f(x) = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2+2x+1}{e^x} \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \frac{5(e-2)}{e}$

Vậy khi đó ta được $\int_0^1 [u' - 2x - 2]^2 dx = 0 \Leftrightarrow e^x f(x) + e^x f'(x) = 2x + 2$

$$\Leftrightarrow \left(e^x f(x)\right)' = 2x + 2 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^2+2x+C}{e^x}$$

Câu 45.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn đồng thời 2 điều kiện $2[f(2)]^2 - [f(1)]^2 = 63; 2[f(x)]^2 + x^2[f'(x)]^2 = 27x^2, \forall x \in [1;2]$. Tính giá trị của tích phân $\int_1^2 [f(x)]^2 dx$

A. 15 **B.** 18 **C.** 21 **D.** 25

Lời giải

Theo giả thiết ta có

$$\int_1^2 [f(x)]^2 dx + \int_1^2 [f(x)]^2 dx + \int_1^2 x^2[f'(x)]^2 dx = \int_1^2 27x^2 dx = 63 \ (1)$$

Xét tích phân $I = \int_1^2 [f(x)]^2 dx$, đặt $\begin{cases} u = [f(x)]^2 \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2f'(x)f(x) \\ v = x \end{cases}$

$$\Rightarrow I = x[f(x)]^2\Big|_1^2 - 2\int_1^2 xf'(x)f(x)dx = 63 - 2\int_1^2 xf'(x)f(x)dx$$

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \int_1^2 [f(x)]^2 dx - 2\int_1^2 xf'(x)f(x)dx + \int_1^2 x^2[f'(x)]^2 dx = 0 \Leftrightarrow \int_1^2 [f(x) - xf'(x)]^2 dx = 0$$

Do đó $f(x) - xf'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}f(x)\right)' = 0 \Leftrightarrow f(x) \equiv Cx$

Vậy $2(Cx)^2 + x^2C^2 = 3C^2x^2 = 27x^2 \Rightarrow C = 3 \Rightarrow \int_1^2 [f(x)]^2 dx = 21$

Chọn ý **C.**

Trong bài toán này ta đã sử dụng tính chất sau của tích phân:

Nếu $\int_a^b [f(x)]^2 dx = 0$ thì ta suy ra $f(x) = 0$

Câu 46.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;4]$ thỏa mãn $f(1)=-1, f(4)=-8$ và đồng thời $[f'(x)]^2\sqrt{x^3}-f(x)=9\sqrt{x^3}-\sqrt{x}-3x, \forall x\in[1;4]$. Tích phân $\int_1^4 f(x)dx$ bằng

A. -7 **B.** $-\frac{89}{6}$ **C.** $-\frac{79}{6}$ **D.** -8

Lời giải

Giả thiết đã cho tương đương $[f'(x)]^2-\frac{f(x)}{\sqrt{x^3}}=9-\frac{1}{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}$

Lấy tích phân 2 vế trên đoạn $[1;4]$ ta được:

$$\int_1^4[f'(x)]^2dx-\int_1^4\frac{f(x)}{\sqrt{x^3}}dx=\int_1^4\left(9-\frac{1}{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx=21-2\ln 2$$

Sử dụng tích phân từng phần ta được:

$$\int_1^4\frac{f(x)}{\sqrt{x^3}}dx=\int_1^4 f(x)d\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}+a\right)\text{, a sẽ được xác định sau}$$

$$=\left(a-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)f(x)\Big|_1^4-\int_1^4\left(a-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)f'(x)dx=7a-6+2\int_1^4\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{a}{2}\right)f'(x)dx$$

Từ đây ta có đẳng thức:

$$\int_1^1(f'(x))^2dx+7a-6-2\int_1^4\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{a}{2}\right)f'(x)dx=21-2\ln 2$$

$$\Leftrightarrow\int_1^4\left(f'(x)-\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{a}{2}\right)^2dx-2\ln 2+9a-\frac{3a^2}{4}-6=21-2\ln 2$$

Ta dễ tìm được $a=3$ để $-2\ln 2+9a-\frac{3a^2}{4}-6=21-2\ln 2$, khi đó

$$f'(x)\equiv\frac{1}{\sqrt{x}}-3, \forall x\in[1;4]\Rightarrow f(x)=2\sqrt{x}-3x$$

Vậy $\int_1^4 f(x)dx=\int_1^4\left(2\sqrt{x}-3x\right)dx=-\frac{79}{6}$

Chọn ý **C.**

Câu 47.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$, đồng biến trên $[1;2]$, thỏa mãn $f(1)=0$, $\int\limits_1^2[f'(x)]^2dx=2$ và $\int\limits_1^2 f(x).f'(x)dx=1$. Tích phân $\int\limits_1^2 f(x)dx$ bằng?

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Hàm dưới dấu tích phân là $\left[f'(x)\right]^2, f(x).f'(x)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $\left[f'(x)+\alpha f(x)\right]^2$. Nhưng khi khai triển thì vướng $\int_1^2 \left[f(x)\right]^2 dx$ nên hướng này không khả thi. Ta có $1=\int_1^2 f(x).f'(x)dx=\left.\frac{f^2(x)}{2}\right|_1^2=\frac{f^2(2)-f^2(1)}{2}=\frac{f^2(2)-0}{2}\Rightarrow f(2)=\sqrt{2}$

Do đồng biến trên $[1;2]$ nên $f(2)\geq f(1)=0$

Từ $f(1)=0$ và $f(2)=\sqrt{2}$ ta nghĩ đến $\int_1^2 f'(x)dx=f(x)\Big|_1^2=f(2)-f(1)=\sqrt{2}-0=\sqrt{2}$

Hàm dưới dấu tích phân bây giờ là $\left[f'(x)\right]^2, f'(x)$ nên ta sẽ liên kết với $\left[f'(x)+\alpha\right]^2$

Ta tìm được $\alpha=-\sqrt{2}\Rightarrow f'(x)=\sqrt{2}\Rightarrow f(x)=\sqrt{2}x+C\xrightarrow{f(1)=0}C=-\sqrt{2}$

Vậy $f(x)=\sqrt{2}x-\sqrt{2}\Rightarrow\int_1^2 f(x)dx=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Chọn ý **A.**

Câu 48.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=1$, $\int_0^1 x^5 f(x)dx=\frac{11}{78}$ và $\int_0^1 f'(x)d\left(f(x)\right)=\frac{4}{13}$. Tính $f(2)$.

A. $f(2)=2$. **B.** $f(2)=\frac{251}{7}$. **C.** $f(2)=\frac{256}{7}$. **D.** $f(2)=\frac{261}{7}$.

Lời giải

Viết lại giả thiết ban đầu $\int_0^1 f'(x)d\left(f(x)\right)=\frac{4}{13}\Leftrightarrow\int_0^1\left[f'(x)\right]^2dx=\frac{4}{13}$

Dùng tích phân từng phần ta có $\int_0^1 x^5f(x)dx=\left.\frac{x^6}{6}f(x)\right|_0^1-\frac{1}{6}\int_0^1 x^6f'(x)dx$

Kết hợp với giả thiết $f(1)=1$, ta suy ra $\int_0^1 x^6f'(x)dx=\frac{2}{13}$

Bây giờ giả thiết được đưa về $\begin{cases}\int_0^1\left[f'(x)\right]^2dx=\frac{4}{13}\\ \int_0^1 x^6f'(x)dx=\frac{2}{13}\end{cases}$. Hàm dưới dấu tích phân bây giờ là $\left[f'(x)\right]^2, x^6f'(x)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $\left[f'(x)+\alpha x^6\right]^2$. Tương tự như bài trên ta tìm được $\alpha=-2\Rightarrow f'(x)=2x^6\Rightarrow f(x)=\frac{2}{7}x^7+C\xrightarrow{f(1)=1}C=\frac{5}{7}$

Vậy $f(x)=\frac{2}{7}x^7+\frac{5}{7}\Rightarrow f(2)=\frac{261}{7}$

Chọn ý **D.**

Câu 49.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;e^{\frac{\pi}{2}}\right]$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f\left(e^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{1}{2}e^{2\pi}$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\left(2\sin^2 x+\sin 2x\right)f'\left(e^x\sin x\right)dx=\frac{2}{3}e^{\frac{5\pi}{2}}$ và $\int_0^{e^2}\left[f'(x)\right]^2dx=\frac{1}{3}e^{\frac{7\pi}{2}}$. Giá trị của $f(1)$ thuộc khoảng nào?

A. $(13;14)$ **B.** $(12;13)$ **C.** $(10;11)$ **D.** $(11;12)$

Lời giải

Xét $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\left(2\sin^2 x+\sin 2x\right)f'\left(e^x\sin x\right)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\sin x\left(\sin x+\cos x\right)f'\left(e^x\sin x\right)dx$

Đặt $\begin{cases}u=e^x\sin x\\ dv=e^x\left(\sin x+\cos x\right)f'\left(e^x\sin x\right)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=e^x\left(\sin x+\cos x\right)dx\\ v=f\left(e^x\sin x\right)\end{cases}$

$$\Rightarrow I=2\left(e^x\sin x\right)f\left(e^x\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\left(\sin x+\cos x\right)f\left(e^x\sin x\right)dx$$

$$=2e^{\frac{\pi}{2}}f\left(e^{\frac{\pi}{2}}\right)-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\left(\sin x+\cos x\right)f\left(e^x\sin x\right)dx=\frac{2}{3}e^{\frac{5\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\left(\sin x+\cos x\right)f\left(e^x\sin x\right)=\frac{1}{6}e^{\frac{5\pi}{2}}$$

Đặt $t=e^x\sin x\Rightarrow dt=e^x\left(\sin x+\cos x\right)dx\Rightarrow A=\int_0^{e^{\frac{\pi}{2}}}f(t)dt=\int_0^{e^{\frac{\pi}{2}}}f(x)dx=\frac{1}{6}e^{\frac{5\pi}{2}}$

Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ dv=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=f'(x)dx\\ v=x\end{cases}$

$$\Rightarrow A=xf(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{e^{\frac{\pi}{2}}}xf'(x)dx=\frac{1}{2}e^{\frac{5\pi}{2}}-\int_0^{e^{\frac{\pi}{2}}}xf'(x)dx=\frac{1}{6}e^{\frac{5\pi}{2}}\Rightarrow\int_0^{e^{\frac{\pi}{2}}}xf'(x)dx=\frac{1}{3}e^{\frac{5\pi}{2}}$$

Cách 1. Xét $\int_0^{e^2}\left[f'(x)+kx\right]^2dx=\int_0^{e^2}\left[f'(x)\right]^2dx+2k\int_0^{e^{\frac{x}{2}}}xf'(x)dx+k^2\int_0^{e^2}x^2dx=0$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{3}e^{\frac{7\pi}{2}}+2k\cdot\frac{1}{3}e^{\frac{5\pi}{2}}+k^2\cdot\frac{1}{3}e^{\frac{3\pi}{2}}=0\Leftrightarrow\frac{1}{3}e^{\frac{3\pi}{2}}\left(k+e^{\pi}\right)^2=0\Leftrightarrow k=-e^{\pi}$$

Do $f\left(e^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{1}{2}e^{2\pi}\Rightarrow\int_0^{e^{\frac{\pi}{2}}}\left[f'(x)-e^{\pi}x\right]^2dx=0\Leftrightarrow f'(x)=e^{\pi}x\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}e^{\pi}x^2$

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức *Holder* ta có

$$\frac{1}{9}e^{5\pi}=\left(\int_0^{e^{\frac{\pi}{2}}}xf'(x)dx\right)^2\le\int_0^{e^{\frac{\pi}{2}}}x^2dx\cdot\int_0^{e^{\frac{\pi}{2}}}\left[f'(x)\right]^2dx=\frac{1}{3}e^{\frac{3\pi}{2}}\cdot\frac{1}{3}e^{\frac{7\pi}{2}}=\frac{1}{9}e^{5\pi}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $f'(x)=kx\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}kx^2+C$

Mặt khác ta có $\int_0^{e^2}\left[f'(x)\right]^2dx=\frac{1}{3}e^{\frac{7\pi}{2}}, f\left(e^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{1}{2}e^{2\pi}$ nên $f(x)=\frac{1}{2}e^{\pi}x^2$

Vậy $f(1)=\frac{1}{2}e^{\pi}\approx 11,57$

Chọn ý **D.**

Câu 50.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ thỏa mãn điều kiện $f(0)=\frac{1}{2}$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2x\left(\sin 2x-4f(x)-\frac{2}{e^x}\right)dx=-\frac{\pi}{8}$ và $\int_0^{\frac{\pi}{4}}f'(x)\left(f'(x)-\frac{1}{e^x}\right)dx=\frac{1}{8}\left(\pi+e^{-\frac{\pi}{2}}-1\right)$. Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx$ là?

A. $\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$ **B.** $\left(-\frac{1}{2};0\right)$ **C.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ **D.** $\left(\frac{1}{2};1\right)$

Lời giải

- Xét tích phân $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2x\left(\sin 2x-4f(x)-\frac{2}{e^x}\right)dx$

Đặt $\begin{cases}u=\sin 2x-4f(x)-\frac{2}{e^x}\\ dv=\sin 2x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\left(2\cos 2x-4f'(x)+\frac{2}{e^x}\right)dx\\ v=-\frac{1}{2}\cos 2x\end{cases}$

$$\Rightarrow I_1=-\frac{1}{2}\cos 2x\left(\sin 2x-4f(x)-\frac{2}{e^x}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\left(\cos 2x-2f'(x)+\frac{1}{e^x}\right)dx$$

$$\Rightarrow I_1=-2f(0)-1+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\left(\cos 2x-2f'(x)+\frac{1}{e^x}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\left(\cos 2x-2f'(x)+\frac{1}{e^x}\right)dx=-\frac{\pi}{8}$$

- Xét tích phân $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}f'(x)\left(f'(x)-\frac{1}{e^x}\right)dx$

Ta có $I_1+I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\left(f'(x)\right)^2+\cos^2 2x-2f'(x)\cos 2x+\frac{\cos 2x}{e^x}-\frac{f'(x)}{e^x}\right)dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(f'(x)-\cos 2x-\frac{1}{2e^x}\right)^2dx-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{e^{2x}}dx=\frac{1}{8}\left(e^{-\frac{\pi}{2}}-1\right)$$

Mặt khác ta có $f(0)=-\frac{1}{2}$ nên suy ra

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(f'(x)-\cos 2x-\frac{1}{2e^x}\right)^2dx=0\Rightarrow f'(x)=\cos 2x+\frac{1}{2e^x}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}\left(\sin 2x-\frac{1}{e^x}\right)$$

Từ đó dễ dàng tính được $\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx=\frac{1}{2e^{\frac{\pi}{4}}}-\frac{1}{4}\approx -0,022$

Chọn ý **B.**

Câu 51.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ dương và liên tục trên đoạn $[1;3]$ thỏa mãn

$2f'(1)=4f(1)=3f'(3)=8$, $\int_1^3 f''(x)\sqrt{\dfrac{x^3}{f'(x)}}dx=4-4\sqrt{2}$, $\int_1^3\sqrt{x+1+\dfrac{x^2(f'(x))^2}{4(x+1)}}dx=\dfrac{16\sqrt{2}-8}{3}$.

Tính giá trị của tích phân $\int_1^e f(x)dx$?

A. e^2+2 **B.** e^2-1 **C.** e^2+1 **D.** e^2-2

Lời giải

Với $x\in[1;3]$, áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$x+1+\frac{x^2(f'(x))^2}{4(x+1)}\ge xf'(x)\Rightarrow\sqrt{x+1+\frac{x^2(f'(x))^2}{4(x+1)}}\ge\sqrt{xf'(x)}$$

$$\Rightarrow\int_1^3\sqrt{x+1+\frac{x^2(f'(x))^2}{4(x+1)}}dx\ge\int_1^3\sqrt{xf'(x)}dx$$

Xét tích phân $A=\int_1^3 f''(x)\sqrt{\dfrac{x^3}{f'(x)}}dx=4-4\sqrt{2}$. Đặt $\begin{cases}u=x\sqrt{x}\\ dv=\dfrac{f''(x)}{\sqrt{f'(x)}}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}\\ v=2\sqrt{f'(x)}\end{cases}$

$$\Rightarrow A=2x\sqrt{xf'(x)}\Big|_1^3-3\int_1^3\sqrt{xf'(x)}dx=6\sqrt{3f'(3)}-2\sqrt{f'(1)}-3\int_1^3\sqrt{xf'(x)}dx$$

$$=12\sqrt{2}-4-3\int_1^3\sqrt{xf'(x)}dx\Rightarrow\int_1^3\sqrt{xf'(x)}dx=\frac{16\sqrt{2}-8}{3}$$

Từ đó suy ra $\int_1^3\sqrt{x+1+\dfrac{x^2(f'(x))^2}{4(x+1)}}dx=\dfrac{16\sqrt{2}-8}{3}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x+1=\dfrac{x^2(f'(x))^2}{4(x+1)}\Rightarrow f'(x)=2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\Rightarrow f(x)=2(x+\ln x)+C$

Mặt khác ta lại có $f(1)=2\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=2(x+\ln x)$

Vậy $\int_1^e f(x)dx=\int_1^e 2(x+\ln x)dx=e^2+1$

Chọn ý **C.**

Câu 52.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=0$ $\max\limits_{[0;1]} f'(x)=6$ và $\int_0^1 f(x)dx=\dfrac{1}{3}$. Gọi M là giá trị lớn nhất của tích phân $\int_0^1 f^3(x)dx$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $M\in\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$ **B.** $M\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ **C.** $M\in\left(\dfrac{1}{2};1\right)$ **D.** $M\in\left(\dfrac{3}{2};2\right)$

Lời giải

Ta có $f'(x)\le 6,\forall x\in[0;1]\Rightarrow f'(x)f(x)\le 6f(x),\forall x\in[0;1]$

Lấy tích phân 2 vế bất đẳng thức trên ta được $\int_0^x f'(t)f(t)dt\le 6\int_0^x f(t)dt,\forall x\in[0;1]$

$$\Leftrightarrow \left.\frac{f^2(t)}{2}\right|_0^x=\frac{f^2(x)}{2}-\frac{f^2(0)}{2}\le 6\int_0^x f(t)dt\Leftrightarrow f^2(x)\le 12\int_0^x f(t)dt\Leftrightarrow f^3(x)\le 12f(x)\int_0^x f(t)dt$$

Tiếp tục lấy tích phân 2 vế bất đẳng thức trên ta được

$$\int_0^1 f^3(x)dx\le 12\int_0^1\left(f(x)\int_0^x f(t)dt\right)dx$$

Đặt $u=\int_0^x f(t)dt\Rightarrow du=f(x).x'dx=f(x)dx$

Suy ra $I=\int_0^{\int_0^1 f(t)dt} udu=\dfrac{1}{2}\left(\int_0^1 f(t)dt\right)^2=\dfrac{1}{2}\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{18}$

Vậy $\int_0^1 f^3(3)dx\le 12\cdot\dfrac{1}{18}=\dfrac{2}{3}$

Câu 53.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=\dfrac{6-4\sqrt{2}}{3}$, $f(1)=2,f'(x)>0,\forall x\in[0;1]$. Biết tích phân $\int_0^1\sqrt{2+2\sqrt{2x-x^2}+[f'(x)]^2}dx$ đạt giá trị nhỏ nhất, khi đó hãy tính $f(2)$?

A. $f(2)=\dfrac{6+4\sqrt{2}}{3}$ **B.** $f(2)=\dfrac{6+2\sqrt{2}}{3}$ **C.** $f(2)=\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$ **D.** $f(2)=\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$

Lời giải

Ta có $I=\int_0^1\sqrt{2+2\sqrt{2x-x^2}+[f'(x)]^2}dx=\int_0^1\sqrt{\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{x}\right)^2+[f'(x)]^2}dx$

Theo bất đẳng thức C – S ta có $\sqrt{\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{x}\right)^2+[f'(x)]^2}\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[\sqrt{2-x}+\sqrt{x}+f'(x)\right]$

$$\Leftrightarrow\int_0^1\sqrt{\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{x}\right)^2+[f'(x)]^2}dx\ge\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1\left[\sqrt{2-x}+\sqrt{x}+f'(x)\right]dx$$

Mà $\int_0^1\left[\sqrt{2-x}+\sqrt{x}+f'(x)\right]dx=\int_0^1\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{x}\right)dx+\int_0^1 f'(x)dx=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}+f(1)-f(0)=\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$

Do đó $I \ge \frac{8}{3}$. Dấu "=" xảy ra khi $f'(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{x} \Rightarrow f(x) = \frac{2}{3}\left(\sqrt{x^3} - \sqrt{(2-x)^3}\right) + C$

Ta có $f(1) = 2 \Leftrightarrow C = 2 \rightarrow f(x) = \frac{2}{3}\left(\sqrt{x^3} - \sqrt{(2-x)^3}\right) + 2 \Rightarrow f(2) = \frac{6+4\sqrt{2}}{3}$

Câu 54.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $\int_x^1 f(t)dt \ge \frac{1-x^2}{2}, \forall x \in [0;1]$, gọi m là giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1 f^2(x)dx$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m \in \left(1;\frac{3}{2}\right)$ **B.** $m \in \left(0;\frac{1}{2}\right)$ **C.** $m \in \left(\frac{1}{2};1\right)$ **D.** $m \in \left(\frac{3}{2};2\right)$

Lời giải

Theo hệ quả của bất đẳng thức *Holder* ta có

$$\left(\int_0^1 xf(x)dx\right)^2 \le \int_0^1 x^2dx \cdot \int_0^1 f^2(x)dx \Rightarrow \int_0^1 f^2(x)dx \ge 3\left(\int_0^1 xf(x)dx\right)^2$$

Nhiệm vụ của ta tiếp theo sẽ là đi tìm giá trị nhỏ nhất của $\int_0^1 xf(x)dx$

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$, khi đó ta có $\int_0^1 (xF(x))'dx = xF(x)\Big|_0^1 = F(1)$

Mà $\int_0^1 (xF(x))'dx = \int_0^1 xF'(x)dx + \int_0^1 F(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx + \int_0^1 F(x)dx$

$$\Rightarrow F(1) = \int_0^1 xf(x)dx + \int_0^1 F(x)dx \quad (1)$$

Từ giả thiết ta có

$$\int_x^1 f(t)dt \ge \frac{1-x^2}{2} \Leftrightarrow F(1) - F(x) \ge \frac{1-x^2}{2} \Leftrightarrow \int_0^1 F(1)dx - \int_0^1 F(x)dx \ge \int_0^1 \frac{1-x^2}{2}dx = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow F(1) - \int_0^1 F(x)dx \ge \int_0^1 \frac{1-x^2}{2}dx = \frac{1}{3} \ (2)$$

Từ $(1),(2)$ ta suy ra $\int_0^1 xf(x)dx \ge \frac{1}{3} \Rightarrow \int_0^1 f^2(x)dx \ge 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$

Dấu "=" xảy ra khi $f(x) = x$

Câu 55.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(a;b)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ và đồng thời $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = -\infty$. Biết rằng $f'(x) + f^2(x) \ge -1, \forall x \in (a;b)$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = b - a$?

A. $-\frac{\pi}{2}$ **B.** $-\pi$ **C.** π **D.** $\frac{\pi}{2}$

Lời giải

Ta có $f'(x)+f^2(x)\ge -1 \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}\ge -1$

Lấy tích phân 2 vế ta được

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} \ge \int_0^1 -1dx \Leftrightarrow \arctan f(x)\Big|_a^b \ge a-b \Leftrightarrow b-a\ge \arctan f(b)-\arctan f(a)$$

Vì $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to b^-} f(x)=-\infty$ nên $b-a\ge \pi$

Nhận xét. Khi hàm số $f(x)=\cot x$ cận từ $b=\pi, a=0$ thì dấu bằng xảy ra!

Câu 56.

Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên $[1;2]$ thỏa mãn $\int_{x_1}^{x_2}[f(x)]^2dx \le \dfrac{x_2^3-x_1^3}{3}$ với mọi $x_1,x_2\in[1;2]$ sao cho $x_1\le x_2$. Tìm giá trị lớn nhất của $\int_1^2 f(x)dx$?

A. $\dfrac{1}{2}$ **B.** $\dfrac{3}{2}$ **C.** $\dfrac{5}{3}$ **D.** $\dfrac{5}{2}$

Lời giải

Ta có $\int_{x_1}^{x_2} x^2dx=\dfrac{x_2^3-x_1^3}{3} \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2}[f(x)]^2dx \le \int_{x_1}^{x_2}x^2dx \Leftrightarrow \int_{x_1}^{x_2}\left(x^2-[f(x)]^2\right)dx\ge 0$

Do hàm $g(x)=x^2-[f(x)]^2$ liên tục trên $[1;2]$ nên $x^2-[f(x)]^2\ge 0 \Leftrightarrow |f(x)|\le x, \forall x\in[1;2]$

Từ đó suy ra $\int_1^2 f(x)dx \le \int_1^2 |f(x)|dx \le \int_1^2 xdx=\dfrac{3}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $f(x)=x, x_1=1, x_2=2$

ĐỌC THÊM BẤT ĐẲNG THỨC TÍCH PHÂN

Những bài toán dưới đây chủ yếu xuất hiện trong đề thi Olympic toán sinh viên toàn quốc và trong các đề thi học sinh giỏi, olympic khu vực nên chúng ta không quá đi sâu vào vấn đề này, tránh học lan man!

Câu 1.

Cho f liên tục trên $[0;1], 0 \le f(x) \le 1\ \forall x \in [0;1]$

Chứng minh rằng $\int_0^1 f(x)dx \ge \left(\int_0^1 f(x^2)dx\right)^2$

Lời giải

Xét $\varphi(x) = \int_0^{x^2} f(t)dt - \left(\int_0^x f(t^2)dt\right)^2, x \in [0;1]$

Ta có $\varphi'(x) = f(x^2).2x - 2\int_0^x f(t^2)dt.f(x^2) = 2f(x^2)\left[x - \int_0^x f(t^2)dt\right]$

Theo định lí giá trị trung bình của tích phân $\exists \alpha \in [0;1]$ sao cho

$$\varphi'(x) = 2f(x^2)[x - xf(\alpha)] = 2xf(x^2)[1 - f(\alpha)] \ge 0, \forall x \in [0;1]$$

Vậy φ là hàm đơn điệu tăng trên $[0;1]$. Do vậy $\varphi(1) \ge \varphi(0) = 0$

Ta suy ra $\int_0^1 f(x)dx \ge \left(\int_0^1 f(x^2)dx\right)^2$ - điều phải chứng minh!

Câu 2.

Chứng minh rằng $\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx > 0$

Lời giải

Đổi biến $y = x^2$ ta có $\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{y}}dy = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{y}}dy + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{y}}dy\right)$

Đặt $z = y - \pi$ trong tích phân $\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{y}}dy = -\int_0^{\pi} \frac{\sin z}{\sqrt{z+\pi}}dz$

$$\Rightarrow \int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{y}}dy - \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{y+\pi}}dy\right) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin y\left(\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{y+\pi}}\right)dy$$

Ta có $\sin y\left(\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{y+\pi}}\right) > 0, \forall y \in (0;\pi)$. Từ đó có điều phải chứng minh!

Câu 3.

Chứng minh rằng $\int\limits_0^1 \frac{dx}{2+x+x^2} < \frac{\pi}{8}$

Lời giải

Ta có $x \ge x^2; \forall x \in [0;1]$, suy ra $\frac{1}{2+x+x^2} \le \frac{1}{2(1+x^2)}$

Vậy $\int\limits_0^1 \frac{dx}{2+x+x^2} \le \int\limits_0^1 \frac{dx}{2(1+x^2)} = \frac{1}{2}\arctan x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{8}$.

Câu 4.

Chứng minh rằng $\int\limits_0^1 \frac{x\sin x}{1+x\sin x}dx < 1-\ln 2$

Lời giải

Viết lại bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng $\int\limits_0^1 \left(1-\frac{1}{1+x\sin x}\right)dx < 1-\ln 2$

Hay $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x\sin x} > \ln 2$. Sử dụng 1 kết quả quen thuộc $\sin x < x \forall x > 0$

Suy ra $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x\sin x} > \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} > \ln 2$

Câu 5.

Chứng minh rằng $\int_1^e \frac{(\ln x)^{2009}}{x^2}dx > \frac{1}{2010.2011.2012}$

Lời giải

Trước hết ta chứng minh $\int\limits_1^e \frac{(\ln x)^{2010}}{x^2}dx > \frac{1}{2011.2012}$

Thật vậy, đặt $t = \ln x$, khi đó $\int\limits_1^e \frac{(\ln x)^{2010}}{x^2}dx = \int\limits_0^1 t^{2010}e^{-t}dt > \int\limits_0^1 t^{2010}(1-t)dt = \frac{1}{2011.2012}$

Mặt khác $\int\limits_1^e \frac{(\ln x)^{2010}}{x^2}dx = \int\limits_0^1 (\ln x)^{2010} d\left(\frac{-1}{x}\right) = \left[(\ln x)^{2010}\frac{-1}{x}\right]\Big|_1^e + \int\limits_1^e \frac{1}{x}2010(\ln x)^{2009}\frac{1}{x}dx$

$$= -\frac{1}{e} + 2010\int\limits_1^e \frac{(\ln x)^{2009}}{x^2}dx > \frac{1}{2011.2012}$$

$$\Rightarrow \int\limits_1^e \frac{(\ln x)^{2009}}{x^2}dx > \frac{1}{2010.2011.2012} + \frac{1}{2010e} > \frac{1}{2010.2011.2012}$$

Tổng quát $I_n = \int\limits_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2}dx = -\frac{1}{e} + nI_{n-1}$, (1) Với $I_1 = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = -\frac{1+\ln x}{x}\Big|_1^e = 1 - \frac{2}{e},(2)$

Từ (1) và (2) ta dễ dàng chứng minh biểu thức quy nạp sau $I_n = n! - \frac{n!}{e}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} < e - \frac{e}{(n+3)!}}$$

Câu 6.

Chứng minh rằng $\int_1^2 x^x dx \cdot \int_1^2 (1+\ln x)dx \le 3$

Lời giải

Để ý rằng $VP = 3 = x^x\Big|_1^2 = \int_1^2 x^x(\ln x + 1)dx$

Nên ta có thể đặt bất đẳng thức dưới dạng như sau

$$\int_1^2 x^x dx.\int_1^2 (\ln x+1)dx \le \int_1^2 x^x(\ln x+1)dx(1)$$

Để ý rằng $f(x) = x^x$ và $g(x) = \ln x + 1$ đều là các hàm tăng trên $[1;2]$ nên (x) chính là hệ quả trực tiếp của bất đẳng thức *Chebyshev* trong tích phân

$$\int_a^b f(x)dx.\int_a^b g(x)dx \le (b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx(b>a)$$

Câu 7.

Chứng minh rằng $\frac{1}{2\cos 1}\int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx \le \frac{\ln\pi - \ln 2}{\pi - 2}$

Lời giải

Để ý rằng $\frac{\ln\pi-\ln 2}{\pi-2} = \frac{\ln x\Big|_1^{\frac{\pi}{2}}}{2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)} = \frac{\int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{x}}{2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)}$

Nên bất đẳng thức tương đương $\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x dx}{x} \le \int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{x}.\cos 1$

Mặt khác ta có $\cos 1 = (-\cos x)\Big|_1^{\frac{\pi}{2}} = \int_1^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx$. Nên bất đẳng thức tương đương

$$\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x dx}{x} \le \int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{x}.\int_1^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx(1)$$

Lại có hàm $f(x)=\sin x$ là hàm tăng trên $\left[1;\frac{\pi}{2}\right]$, trong khi hàm $g(x)=\frac{1}{x}$ là hàm giảm trên $\left[1;\frac{\pi}{2}\right]$ nên (1) cũng chỉ là hệ quả của bất đẳng thức *Chebyshev* trong tích phân!

Câu 8.

Chứng minh rằng $2\sqrt{3}<\int_{-2}^{0}\sqrt{x^3-\frac{3x^2}{2}-6x+5}dx<\sqrt{34}$

Lời giải

Xét hàm $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+5\Rightarrow f'(x)=3x^2-3x-6$ với $x\in(-2,0)$

Ta có $f'(x)=0$ khi $x=-1$ (thỏa mãn) hoặc $x=2$ (loại)

Vẽ bản biến thiên ta dễ dàng chỉ ra rằng $\begin{cases} x=2\Rightarrow \min\sqrt{f(x)}=\sqrt{3} \\ x=-1\Rightarrow \max\sqrt{f(x)}=\frac{\sqrt{34}}{2} \end{cases}$

Riêng trường hợp $x=2$ thì không xảy ra dấu bằng.

Khi đó $\int\limits_{-2}^{0}dx\sqrt{3}<\int\limits_{-2}^{0}\sqrt{x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+5}dx\le\int\limits_{-2}^{0}\frac{\sqrt{34}}{2}dx$

Câu 9.

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\begin{cases} f\in C[0;1] \\ xf(y)+yf(x)\le 1\forall x;y\in(0;1) \end{cases}$

Chứng minh rằng $\int\limits_{0}^{1}f(x)dx\le\frac{\pi}{4}$

Lời giải

Chọn $y=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}f\left(\sqrt{1-x^2}\right)+f(x)\le\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\Rightarrow\int\limits_{0}^{1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}f\left(\sqrt{1-x^2}\right).dx+\int\limits_{0}^{1}f(x).dx\le\int\limits_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.dx$$

$$\Rightarrow-\int\limits_{0}^{1}f\left(\sqrt{1-x^2}\right).d\left(\sqrt{1-x^2}\right)+\int\limits_{0}^{1}f(x).dx\le\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\int\limits_{0}^{1}f(x).dx+\int\limits_{0}^{1}f(x).dx\le\frac{\pi}{2}$$

Câu 10.

Cho hàm số $f(x)$ là một hàm số thực nhận giá trị dương và tuần hoàn với chu kỳ bằng 1 trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng với mọi $n\in\mathbb{N}^*$ ta luôn có $\int\limits_{0}^{1}\frac{f(x)}{f\left(x+\frac{1}{n}\right)}dx\ge 1$

Lời giải

Ta có $\int_0^1 \frac{f(x)}{f\left(x+\frac{1}{n}\right)}dx = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{f\left(x+\frac{1}{n}\right)}dx + ... + \int_{\frac{n-1}{n}}^{1} \frac{f(x)}{f\left(x+\frac{1}{n}\right)}dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} \frac{f(x)}{f\left(x+\frac{1}{n}\right)}dx$

Xét tích phân $\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} \frac{f(x)}{f\left(x+\frac{1}{n}\right)}dx$. Đổi biến $x = t+\frac{i}{n} \Rightarrow \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} \frac{f(x)}{f\left(x+\frac{1}{n}\right)}dx = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{f\left(x+\frac{i}{n}\right)}{f\left(x+\frac{i+1}{n}\right)}dx$

Khi đó ta có $\sum_{i=0}^{n-1}\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} \frac{f(x)}{f\left(x+\frac{1}{n}\right)}dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{f\left(x+\frac{i}{n}\right)}{f\left(x+\frac{i+1}{n}\right)}dx$

$$= \int_0^{\frac{1}{n}}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f\left(x+\frac{i}{n}\right)}{f\left(x+\frac{i+1}{n}\right)}\right)dx \ge \int_0^{\frac{1}{n}} n\sqrt[n]{\frac{f(x)}{f(x+n)}}dx = \int_0^{\frac{1}{n}} n\sqrt{\frac{f(x)}{f(x)}}dx = 1$$

Câu 11.

Cho hàm số $f:[0;2]\to\mathbb{R}$, có f'liên tục trên $[0;2]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f(2)=0$,$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 xf(x)dx = k$. Chứng minh rằng $\int_0^2 \left[f'(x)\right]^2dx \ge \frac{15}{16}k^2$

Lời giải

Ta có $\begin{cases} \int_0^2 f(x)dx = xf(x)\big|_0^2 - \int_0^2 xf'(x)dx = -\int_0^2 xf'(x)dx \\ \int_0^2 xf(x)dx = \frac{1}{2}x^2f(x)\Big|_0^2 - \frac{1}{2}\int_0^2 x^2f'(x)dx = -\frac{1}{2}\int_0^2 x^2f'(x)dx \end{cases}$

$$\Rightarrow k = \int_0^2 f'(x)\left(x-x^2\right)dx \Rightarrow k^2 \le \int_0^2\left(x-x^2\right)^2dx\int_0^2\left[f'(x)\right]^2dx \Leftrightarrow k^2 \le \frac{16}{15}\int_0^2\left[f'(x)\right]^2dx$$

Câu 12.

Cho hàm số $f(x)$, là hàm số xác định và liên tục trên $[0,1]$ và thỏa mãn điều kiện $|f(x)|\le 1, \forall x\in[0,1]$. Chứng minh rằng $\int_0^1\sqrt{1-f^2(x)}dx \le \sqrt{1-\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2}$

Lời giải

Bdt tương đương với $\left(\int_0^1\sqrt{1-f^2(x)}dx\right)^2 + \left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \le 1$

Theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có

$$LHS \underset{C-S}{\le} \int_0^1 dx\int_0^1\left(1-f^2(x)\right)dx + \int_0^1 dx\int_0^1 f^2(x)dx = \int_0^1 dx = 1$$

Vậy có điều phải chứng minh!

Câu 13.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục, $f'(x)$ liên tục trên $[0,1]$ và $f(0)=0$. Chứng minh rằng $\int_0^1 |f'(x)f(x)|dx \le \frac{1}{2}\int_0^1 |f'(x)|^2 dx$

Lời giải

Ta có $\int_0^1 |f'(x)f(x)|dx = \int_0^1 |f'(x)|dx\left|\int_0^x f'(t)dt\right|dx$

$$\le \int_0^1 |f'(x)|\int_0^x |f'(t)|dtdx \le \int_0^1 |f'(x)|\sqrt{\int_0^x dt\int_0^x f'^2(t)dt}dx \le \int_0^1 \sqrt{x}|f'(x)|\sqrt{\int_0^x f'^2(t)dt}dx$$

$$\le \sqrt{\int_0^1 xdx\int_0^1 f'^2(x)\int_0^x f'^2(t)dtdx} \le \sqrt{\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{2}\left[\left(\int_0^x f'^2(t)dt\right)^2\right]'dx} \le \frac{1}{2}\int_0^1 f'^2(x)dx$$

Câu 14.

Cho hàm số $f(x)$ là hàm số liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[a;b]$ và $f(a)=0$. Đặt $M=\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|$. Chứng minh rằng $M^2 \le (b-a)\int_a^b f'^2(x)dx$

Lời giải

Ta có $\forall x\in[a;b], f^2(x)=\left(\int_a^x f'(t)dt\right)^2 \le \int_a^x dt\int_a^x f'^2(t)dt \le \int_a^b dt\int_a^b f'^2(t)dt \le (b-a)\int_a^b f'^2(t)dt$

Do đó $\max\limits_{x\in[a;b]} f^2(x) \le (b-a)\int_a^b f'^2(t)dt$

Câu 15.

Cho hàm số $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ là hàm khả vi sao cho $f(0)=f(1)=0$ và thỏa mãn điều kiện $|f'(x)|\le 1, \forall x\in[0;1]$. Chứng minh rằng $\left|\int_0^1 f(t)dt\right| < \frac{1}{4}$.

Lời giải

Ta có $\left|\int_0^1 f(x)dx\right| \le \left|\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx\right| + \left|\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx\right| \le \left|\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^x f'(t)dtdx\right| + \left|\int_{\frac{1}{2}}^1\left(-\int_x^1 f'(t)dt\right)dx\right|$

$$\le \int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^x |f'(t)|dtdx + \int_{\frac{1}{2}}^1\int_x^1 |f'(t)|dtdx \le \int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^x dtdx + \int_{\frac{1}{2}}^1\int_x^1 dtdx \le \int_0^{\frac{1}{2}} xdx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)dx \le \frac{1}{4}$$

Dấu = xảy ra khi $|f'(t)|=1$, $\forall x\in[0;1]$ suy ra $f(x)$ là hàm bậc nhất, do đó không thể có $f(0)=f((1)=0$. Vậy trường hợp đẳng thức không thể xảy ra.

Vậy ta có điều phải chứng minh!

Câu 16.

Chứng minh rằng $e^x-1<\int_0^x\sqrt{e^{2t}+e^{-t}}<\sqrt{\left(e^x-1\right)\left(e^x-\frac{1}{2}\right)}\ \forall x>0$

Lời giải

Ta có $\int_0^x\sqrt{e^{2t}+e^{-t}}>\int_0^x e^t=e^x-1$. Đặt $f\left(x\right)=\int_0^x\sqrt{e^{2t}+e^{-t}}-\sqrt{\left(e^x-1\right)\left(e^x-\frac{1}{2}\right)}\ ,x>0$

Có $f'\left(x\right)=\sqrt{e^2x+e^{-x}}-\frac{e^x}{2}\left(\sqrt{\frac{e^2-1}{e^x-\frac{1}{2}}}+\sqrt{\frac{e^x-\frac{1}{2}}{e^x-1}}\right)$. Đặt $t=e^x>1$

Xét bất phương trình $f'\left(x\right)<0\Leftrightarrow\sqrt{t^2+\frac{1}{t}}<\frac{t}{2}\left(\sqrt{t-\frac{1}{2\left(t-\frac{1}{2}\right)}}+\sqrt{1+\frac{1}{2\left(t-1\right)}}\right)$

$$\Leftrightarrow\frac{8}{t^3}<\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t-\frac{1}{2}}\Leftrightarrow 4t^4+24t-3t^3-16t^2-8>0$$

Luôn đúng $\forall t>1$. Vậy $f'\left(x\right)<0\ ,\forall x>0$, suy ra $f\left(x\right)$nghịch biến trên $\left(0;+\infty\right)$

Do đó $f\left(x\right)<f\left(0\right)=0$, từ đó ta có điều phải chứng minh!

Câu 17.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $f\left(n\right)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{8}}\left(\frac{\sin^{n+2}x}{\cos^n x}+\frac{\cos^{n+2}}{\sin^n x}\right)dx,n\in\mathbb{Z}^+$

Lời giải

Ta dễ dàng nhận thấy với $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{8}\right]$ thì $\sin x>0,\cos x>0$ nên có thể thác triển f lên $\mathbb{R}$

Xét tích phân $f^1\left(n\right)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{8}}\left(\frac{\sin^{n+2}x}{\cos^n x}+\frac{\cos^{n+2}}{\sin^n x}\right)dx\ ,n\in\mathbb{R}_+$

Ta có $f^1{}'\left(n\right)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{8}}\ln\tan x\left(\frac{\sin^{n+2}x}{\cos^n x}-\frac{\cos^{n+2}}{\sin^n x}\right)dx\ \forall x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{8}\right],\ln\tan x\geq 0,\sin x\geq\cos x$

$$\Rightarrow\frac{\sin^{n+2}x}{\cos^n x}-\frac{\cos^{n+2}}{\sin^n x}\geq\cos^2x-\cos^2x=0\Rightarrow f^1{}'\left(n\right)\geq 0$$

Vậy $f^1(n)$ đồng biến trên $\left[0;+\infty\right)$, suy ra $f^1\left(n\right)\geq f^1\left(0\right)=\frac{\pi}{8}$

Suy ra $f\left(n\right)\geq f\left(0\right)=\frac{\pi}{8}$

Câu 18.

Cho $m\in\mathbb{N}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)=\int_1^x t^m.e^{2t}dt-2\left(\frac{x^{m+3}}{m+3}+\frac{x^{m+2}}{m+2}\right), x\ge 1$

Lời giải

Ta có $f'(x)=x^m e^{2x}-2\left(x^{m+2}+x^{m+1}\right)=x^m\left(e^{2x}-2x-2x^2\right)$

Lại có bất đẳng thức quen thuộc sau $e^x\ge 1+x+\frac{x^2}{2}, \forall x\ge 0$

Suy ra $e^{2x}>1+2x+2x^2, \forall x\ge 1$

Do đó $f'(x)>x^m>0$, suy ra $f(x)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$

Suy ra $f(x)\ge f(1)=-2\left(\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+3}\right)$

Câu 19.

Cho $[a;b]\subset\mathbb{R}$ và hàm $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ có đạo hàm cấp 2 liên tục trên $[a;b]$ sao cho $f(a)+f(b)=0$. Đặt $m=\min\limits_{x\in[a;b]} f''(x)$ chứng minh rằng $\int_a^b f(x)dx\le\frac{m(a-b)^3}{12}$

Lời giải

Khai triển Taylor ta được $f(a)=f(x)+f'(x)(a-x)+\frac{f''(a_1)}{2}(a-x)^2$ với $x_1\in(a,x)$

Và $f(b)=f(x)+f'(x)(b-x)+\frac{f''(x_1)}{2}(b-x)^2$ với $x_2\in(x,b)$.

Cộng theo vế hai đẳng thức trên suy ra

$$2f(x)+f'(x)(a-x)+f'(x)(b-x)+\frac{f''(x_1)}{2}(a-x)^2+\frac{f''(x_1)}{2}(b-x)^2=0$$

Lấy tích phân hai vế trên $[a;b]$ ta được

$$2\int_a^b f(x)dx+\int_a^b f'(x)(a-x)dx+\int_a^b f'(x)(b-x)dx+\int_a^b\left(\frac{f''(x_1)}{2}(a-x)^2+\frac{f''(x_2)}{2}(b-x)^2\right)dx=0$$

Mặt khác ta lại có

- $\int_a^b f'(x)(a-x)dx=(a-b)f(b)+\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b f'(x)(b-x)dx=(a-b)f(a)+\int_a^b f(x)dx$
- $\frac{f''(x_1)}{2}(a-x)^2+\frac{f''(x_2)}{2}(b-x)^2\ge\frac{m}{2}\left((a-x)^2+(b-x)^2\right)$

Nên từ ba đẳng thức trên với đẳng thức trên ta suy ra

$$4\int_a^b f(x)dx+\frac{m}{2}\int_a^b\left((a-x)^2+(b-x)^2\right)dx\le 0$$

TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC

$$\Rightarrow 4\int_a^b (x)dx \le \frac{m}{2}\left(\frac{(a-b)^3}{3}+\frac{(a-b)^3}{3}\right) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \frac{m(a-b)^3}{12}$$

Bài toán được chứng minh hoàn toàn.

Câu 20.

Cho hàm số $f:[0;1]\to R$ là hàm liên tục với $f(0)=0$.

Chứng minh rằng $\sup\limits_{0\le x\le 1}|f(x)| \le \left(\int_0^1 (f'(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$

Lời giải

Bài này khá đơn giản, do $f(0)=0$ nên $f(x)=\int_0^x f'(t)dt$.

Theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có

$$|f(x)| \le \int_0^x |f'(t)|dt \le \int_0^1 |f'(t)|dt \le \sqrt{\int_0^1 (f'(t))^2 dt \int_0^1 1^2 dt} = \sqrt{\int_0^1 (f'(t))^2 dt}$$

Câu 21.

Xét đa thức $P(x)$ là đa thức bậc n thỏa mãn $P(x)\ge 0, \forall x\in R$.

Chứng minh rằng $\int_0^1 \left[\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(\int_0^x P(x)dx + P(x)+P'(x)+...+P^{(n-1)}(x)\right)\right]dx \ge 0$

Hãy tổng quát bài toán khi thay đoạn $[0,1]$ bởi đoạn $[a,b]$.

Lời giải

Yêu cầu 1.

Từ giả thiết ta có $f'(x)\le 0$ do đó $f(x)$ là hàm giảm.

Áp dụng bất đẳng thức *Chebyshev* cho tích phân ta có $\int_0^1 f(x)xdx \le \int_0^1 f(x)dx\int_0^1 x = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx$

Trường hợp $[a,b]$ với $f(x)$ và $g(x)$ nghịch biến thì

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx$$

Nếu $f(x)$ và $g(x)$ đồng biến thì chiều sẽ ngược lại

Yêu cầu 2.

Đặt $Q(x)=P(x)+P'(x)+\cdots+P^{(n)}(x)$. Sử dụng công thức tích phân từng phần ta đưa về chứng minh $\int_0^1 x(1-x)Q(x)dx \ge 0$

Đến đây ta sẽ chứng minh với giả thiết của bài toán thì

$$Q(x)=P(x)+P'(x)+\cdots+P^{(n)}(x)\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

Nhận thấy n chẵn, đa thức $Q(x)$ liên tục, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} Q(x)=+\infty$, $Q'(x)$ là đa thức bậc lẻ nên luôn có nghiệm, như vậy $Q(x)$ đạt GTNN (là cực tiểu) tại một điểm x_0.

Lúc đó ta có $Q'(x_0)=0 \Rightarrow Q(x)\ge Q(x_0)=P(x_0)+Q'(x_0)=P(x_0)\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Bài toán được chứng minh

Câu 22.

Chứng minh rằng $\int\limits_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx > 0$

Lời giải

Trước tiên ta chứng minh bất đẳng thức quen thuộc sau $\sin x \ge x - \frac{x^3}{6}, \forall x\ge 0$

Thật vậy xét hàm số $f(x)=\sin x - x + \frac{x^3}{6}$ ta có

$$f'(x)=\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \Rightarrow f''(x) = -\sin x + x \Rightarrow f'''(x) = 1-\cos x \ge 0$$

Suy ra $f''(x)\ge f''(0)=0 \Rightarrow f'(x)\ge f'(0)=0 \Rightarrow f(x)\ge (0)=0 \Rightarrow \sin x\ge x-\frac{x^3}{6}, \forall x\ge 0$

$$\Rightarrow \int\limits_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx \ge \int\limits_0^{\sqrt{2\pi}} \left(x^2-\frac{x^6}{6}\right)dx = \left.\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{42}\right)\right|_0^{2\pi} = \frac{2\pi\sqrt{2\pi}}{3} - \frac{4\pi^3\sqrt{2\pi}}{21} = \frac{2\pi\sqrt{2\pi}}{3}\left(1-\frac{2\pi}{7}\right) > 0$$

Câu 23.

Cho đa thức $f(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$ thỏa mãn $A<0, B^2-3AC\le 0$

Chứng minh rằng $\int\limits_0^1 xf(x)dx \le \frac{1}{2}\int\limits_0^1 f(x)dx$. Hãy tổng quát bài toán khi thay đoạn $[0,1]$ bởi đoạn $[a,b]$

Lời giải

Từ giả thiết của bài toán ta có $f'(x)\le 0.(1)$

Ta viết bất đẳng thức về dạng $\int\limits_0^1 (2x-1)f(x)dx \le 0.$

Sử dụng công thức tích phân từng phần ta có

$$\int\limits_0^1 (2x-1)f(x)dx = x(x-1)f(x)\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 x(x-1)f'(x)dx = \int\limits_0^1 x(x-1)f'(x)dx \le 0$$

Vì từ (1) suy ra $x(x-1)f'(x)\le 0\ \forall x\in[0;1]$.

Ta có thể tổng quát bài toán như sau

Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm cấp một và giảm trên $[a,b]$.

Chứng minh $\int\limits_a^b xf(x)dx \le \frac{a+b}{2}\int\limits_a^b f(x)dx$

Câu 24.

Cho hàm $f:[0;1]\to[0,+\infty)$ khả vi liên tục trên miền xác định.

Đặt $M=\max\limits_{x\in[0;1]}|f'(x)|$. Chứng minh rằng $\left|\int\limits_0^1 f^3(x)dx-f^2(0)\int\limits_0^1 f(x)dx\right|\le M\left(\int\limits_0^1 f(x)dx\right)^2$

Lời giải

Với $t\in[0;1]$, ta có $-M\le f'(t)\le M \Leftrightarrow -M.f(t)\le f'(t).f(t)\le M.f(t)$

$$\Leftrightarrow -M.\int\limits_0^x f(t)dt\le\int\limits_0^x f'(t).f(t)dt\le M.\int\limits_0^x f(t)dt\ \forall x\in(0;1)$$

$$\Leftrightarrow -M.\int\limits_0^x f(t)dt\le\frac{1}{2}\left[f^2(x)-f^2(0)\right]\le M.\int\limits_0^x f(t)dt$$

$$\Rightarrow -M.f(x)\int\limits_0^x f(t)dt\le\frac{1}{2}\left(f^3(x)-f^2(0).f(x)\right)\le M.f(x)\int\limits_0^x f(t)dt$$

$$\Rightarrow -M.\int\limits_0^1\left(f(x)\int\limits_0^x f(t)dt\right)dx\le\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(f^3(x)-f^2(0).f(x)\right)dx\le M.\int\limits_0^1\left(f(x)\int\limits_0^x f(t)dt\right)dx$$

Mặt khác ta có $\int\limits_0^1\left(f(x)\int\limits_0^x f(t)dt\right)dx=\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^x f(t)dt\right)d\left(\int\limits_0^x f(t)dt\right)=\frac{1}{2}\left(\int\limits_0^1 f(x)dx\right)^2$

Nên ta có điều phải chứng minh!

Câu 25.

Hàm $f(x)$ khả tích trên đoạn $[0;1]$ và $\int\limits_0^1 f(x)dx>0$. Chứng minh tồn tại đoạn $[a;b]\subset[0;1]$ mà trên đó $f(x)>0$.

Lời giải

Giả sử $\int\limits_0^1 f(x)dx=I>0$. Với $n\in\mathbb{N}^*$, xét phân hoạch P chia $[0;1]$ bởi các điểm $\frac{i}{n},i=\overline{0,n}$ ta có $I=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists n_0>0\,|\,n>n_0\Rightarrow\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)-I\right|<\varepsilon$

Chọn một $0<\varepsilon_0<1$ để cố định, khi đó

$$\exists n_0>0\,|\,n>n_0,\left|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)-I\right|<\varepsilon_0\Rightarrow\exists n_0>0\,|\,n>n_0,\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)>I-\varepsilon_0>0$$

Do đó phải tồn tại $i_0\in\mathbb{N}$ sao cho $f\left(\frac{i_0}{n}\right)>0$. Do f liên tục trên $[0;1]$ nên tồn tại một $\lambda-$lân cận của $\frac{i_0}{n}$ sao cho $f(x)>0,\forall x\in\left(\frac{i_0}{n}-\lambda;\frac{i_0}{n}+\lambda\right)$

Do $\frac{i_0}{n}\in[0;1]$ nên $\left(\frac{i_0}{n}-\lambda;\frac{i_0}{n}+\lambda\right)\cap[0;1]$ là một đoạn, suy ra điều phải chứng minh!

CHINH PHỤC OLYMPIC TOÁN

Câu 26.

Cho hàm số $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ khả vi liên tục trên miền xác định.

Đặt $M=\max\limits_{x\in[0;1]}|f'(x)|, m=\min\limits_{x\in[0;1]}f'(x)$. Chứng minh rằng $\dfrac{m^2}{12}\le\int_0^1 f^2(x)dx-\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2\le\dfrac{M^2}{12}$

Lời giải

Ta có $\int_0^1\int_0^1(f(x)-f(y))^2dxdy=\int_0^1\int_0^1|f(x)-f(y)||f(x)-f(y)|dxdy$

$$\le M\int_0^1\int_0^1|x-y||f(x)-f(y)|dxdy\le M\int_0^1\int_0^1|f(x)-f(y)|dxdy$$

Từ xa xưa ta có $\max\{f(x);f(y)\}=\dfrac{f(x)+f(y)}{2}+\dfrac{|f(x)-f(y)|}{2}$

Suy ra $|f(x)-f(y)|=2\max\{f(x);f(y)\}-(f(x)+f(y))\le 2\max\limits_{[0;1]}f(x)-(f(x)+f(y))$

$$\Rightarrow\int_0^1\int_0^1(f(x)-f(y))^2dxdy\le M\int_0^1\int_0^1\left(2\max_{[0;1]}f(x)-f(x)-f(y)\right)dxdy\le 2M\left(\max_{[0;1]}f(x)-\int_0^1 f(x)dx\right)$$

Vậy $\int_0^1 f^2(x)dx-\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2\le M\left(\max\limits_{[0;1]}f(x)-\int_0^1 f(x)dx\right)$

Câu 27.

Cho hàm số $f:[0,1]\to R$ là hàm khả vi liên tục. Đặt $M=\max\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)|$

Chứng minh rằng $0\le\int_0^1 f^2(x)dx-\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2\le M\left(\max\limits_{x\in[0,1]}f(x)-\int_0^1 f(x)dx\right)$

Lời giải

Với $x,y\in[0,1]$ $\Rightarrow\int_0^1\int_0^1(f(x)-f(y))^2dxdy=\int_0^1\int_0^1\left(f^2(x)+f^2(y)-2f(x)f(y)\right)dxdy$

$$=\int_0^1\int_0^1 f^2(x)dxdy+\int_0^1\int_0^1 f^2(y)dxdy-2\int_0^1\int_0^1 f(x)f(y)dxdy$$

$$=\int_0^1\int_0^1 f^2(x)dxdy+\int_0^1\int_0^1 f^2(y)dxdy-2\int_0^1\int_0^1 f(x)f(y)dxdy=2\left(\int_0^1 f^2(x)dx-\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2\right)$$

Vậy $\int_0^1 f^2(x)dx-\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2=\dfrac{1}{2}\int_0^1\int_0^1(f(x)-f(y))^2dxdy$

Từ đl Lagangre suy ra $m^2(x-y)^2\le(f(x)-f(y))^2\le M^2(x-y)^2$

Suy ra $\dfrac{m}{2}\int_0^1\int_0^1(x-y)^2dxdy\le\dfrac{1}{2}\int_0^1\int_0^1(f(x)-f(y))^2dxdy\le\dfrac{M^2}{2}\int_0^1\int_0^1(x-y)^2dxdy$

$$\Leftrightarrow\frac{m^2}{12}\le\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1(f(x)-f(y))^2dxdy\le\frac{M^2}{12}$$

Câu 28.

Cho hàm số $f(x)\ge 0$ là hàm giảm và $f(x)+xf'(x)\ge 0$ với mọi $x\in[a,b]$.

Chứng minh rằng $\int_a^b xf^2(x)dx\le \frac{b+a}{2(b-a)}\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2$.

Lời giải

Với hai hàm thực $f;g$ cùng liên tục trên $[a,b]$, nếu thêm giả thiết một hàm tăng và hàm còn lại giảm thế thì $\forall x;y\in[a,b]$,

$$(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))\le 0\Rightarrow \int_0^1\int_0^1 (f(x)-f(y))(g(x)-g(y))dxdy\le 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1\int_0^1 (f(x)g(x)+f(y)g(y)-f(x)g(y)-f(y)g(x))dxdy\le 0\ (x)\ (x)$$

$$\Leftrightarrow 2\left((b-a)\int_0^1 f(x)g(x)dx-\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx\right)\le 0\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)g(x)dx\le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx$$

Ta thấy $f(x)+xf'(x)=(xf(x))'\ge 0$ nên $xf(x)$ suy ra

$$\int_a^b xf^2(x)dx\le \frac{1}{b-a}\int_a^b xf(x)dx\int_a^b f(x)dx\le \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b xdx\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2\le \frac{b+a}{2(b-a)}\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2$$

Câu 29.

Cho hàm liên tục $f:[0,+\infty)\to[0;1]$ thỏa mãn $f(x+y)\le f(x)f(y),\forall x,y\ge 0$

Chứng minh rằng $\int_0^x f(t)dt\ge x\sqrt{f(2x)}.\forall x\ge 0$

Lời giải

Do $f(x)\in[0;1],\forall x\ge 0$ nên $f(x+y)\le f(x)f(y)\le f(x),\forall x,y\ge 0$

Suy ra f nghịch biến trên $[0,+\infty)$, suy ra $\int_0^x f(t)dt\ge \int_0^x f(x)dt=xf(x)=x\sqrt{f(x)f(x)}\ge x\sqrt{f(2x)}$

Câu 30.

Cho $f(x),g(x)$ là các hàm liên tục trên $[a;b]$ và thỏa mãn đồng thời các điều kiện $0<a\le f(x)\le A;0<b\le g(x)\le B\forall x\in[a;b]$

Chứng minh rằng $\frac{(ab+AB)^2}{4abAB}\ge \frac{\int_a^b g^2(x)dx\int_a^b f^2(x)dx}{\left(\int_a^b f(x)g(x)\right)^2}\ge \frac{4abAB}{(ab+AB)^2}$

Bất đẳng thức G.Polya

Lời giải

Từ giả thiết, dễ có $\frac{a}{B}\le\frac{f(x)}{g(x)}\le\frac{A}{b}\ \frac{a}{B}\le\frac{f(x)}{g(x)}\le\frac{A}{b}\Leftrightarrow f^2(x)+\frac{aA}{bB}g^2(x)-\left(\frac{a}{B}+\frac{A}{b}\right)f(x)g(x)\le 0$

$$\Rightarrow \int_a^b f^2(x)dx + \frac{aA}{bB}\int_a^b g^2(x)dx \le \left(\frac{a}{B}+\frac{A}{b}\right)\int_a^b f(x)g(x)dx$$

Lại có $\int_a^b f^2(x)dx + \frac{aA}{bB}\int_a^b g^2(x)dx \ge 2\sqrt{\frac{aA}{bB}\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx}$

Nên suy ra $2\sqrt{\frac{aA}{bB}\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx} \le \left(\frac{a}{B}+\frac{A}{b}\right)\int_a^b f(x)g(x)dx$

$$\Leftrightarrow 4\frac{aA}{bB}\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx \le \frac{(ab+AB)^2}{b^2B^2}\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(ab+AB)^2}{4abAB} \ge \frac{\int_a^b g^2(x)dx\int_a^b f^2(x)dx}{\left(\int_a^b f(x)g(x)\right)^2}$$

Bất đẳng thức $\frac{\int_a^b g^2(x)dx\int_a^b f^2(x)dx}{\left(\int_a^b f(x)g(x)\right)^2} \ge \frac{4abAB}{(ab+AB)^2}$

Là dễ dàng vì $\frac{\int_a^b g^2(x)dx\int_a^b f^2(x)dx}{\left(\int_a^b f(x)g(x)\right)^2} \ge 1 \ge \frac{4abAB}{(ab+AB)^2}$

Câu 31.

Cho hàm số $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ khả tích trên $[0;1]$.

Chứng minh rằng $\int_0^1 f^2(x)dx - \int_0^1 f(x)dx \ge \frac{1}{2}\left[\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 - 1\right]$

Lời giải

Viết lại bất đẳng thức dưới dạng $\left(\int_0^1 f(x)dx+1\right)^2 \le 2\left(\int_0^1 f^2(x)dx+1\right)$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng do

$$\left(\int_0^1 f(x)dx+1\right)^2 \le \left(1^2+1^2\right)\left[\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2+1^2\right] \le 2\left(\int_0^1 f^2(x)dx+1\right)$$

HẾT

Tài liệu tham khảo

[1]. Tuyển tập các kỹ thuật tính tích phân – Trần Phương.
[2]. Tích phân vận dụng – vận dụng cao – Nguyễn Đăng Ái.
[4] Nâng cao kỹ năng giải toán trắc nghiệm 100% dạng bài nguyên hàm - tích phân và ứng dụng – Tô Thị Nga.
[5]. Phương pháp giải bài tập trắc nghiệm tích phân – Huỳnh Công Thái.
[6]. Tổng ôn tập chuyên đề tích phân và bất đẳng thức – Lê Hoành Phò.
[7]. Internet.