BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC QUY NHƠN

TRƯƠNG THANH VŨ

PHƯƠNG TRÌNH HÀM TRÊN TẬP SỐ NGUYÊN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: **PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP**
Mã số: 60 46 40

Người hướng dẫn khoa học:
TS. TRỊNH ĐÀO CHIẾN

QUY NHƠN, NĂM 2011

Mục lục

DANH MỤC CÁC KÍ HIỆU

- $\mathbb{Q}$: Tập hợp các số hữu tỉ.
- $\mathbb{Q}^+$: Tập hợp các số hữu tỉ dương.
- $\mathbb{Z}$: Tập hợp các số nguyên.
- $\mathbb{Z}^+, \mathbb{N}^*$: Tập hợp các số nguyên dương.
- $\mathbb{N}$: Tập hợp các số tự nhiên.
- $(A)_b, A_b$: Số A được biểu diễn trong hệ đếm cơ số b.
- ƯCLN (m,n): Ước số chung lớn nhất của m và n.
- $m|n$: m là ước số của n.
- $[x]$: Phần nguyên của số x.
- IMO: Ôlimpic toán Quốc tế.
- Balkan: Ôlimpic toán vùng Ban Căng.
- Iran: Ôlimpic toán Iran.
- China: Ôlimpic toán Trung Quốc.
- BMO: Ôlimpic toán Anh quốc.
- Putnam: Cuộc thi toán cho sinh viên Mĩ và Canađa.
- APMO: Cuộc thi toán Châu Á-Thái Bình Dương.
- CH Sec: Cuộc thi toán Cộng Hòa Sec.

Lời nói đầu

Phương trình hàm nói chung và phương trình hàm trên tập số nguyên đa số là những dạng toán khó và thường gặp trong các đề thi chọn học sinh giỏi quốc gia và Olympic quốc tế.

Lý thuyết về phương trình hàm nói chung và phương trình hàm trên tập số nguyên nói riêng thường sẽ được đề cập sâu hơn trong một số giáo trình cơ bản của bậc đại học hoặc sau đại học. Đối với chương trình toán phổ thông nói chung và hệ chuyên toán nói riêng, các tài liệu về vấn đề này còn rất hiếm hoi, đặc biệt là việc hệ thống một số dạng cơ bản cùng với phương pháp giải chúng.

Phương trình hàm trên tập số thực đã được một số tài liệu đề cập, chẳng hạn [2]. Các bài toán giải phương trình hàm trên tập số nguyên xuất hiện rải rác trong một số tài liệu chuyên đề, nhưng việc phân loại chúng để đề xuất những phương pháp giải phù hợp thì vẫn còn khá ít.

Một vấn đề khác biệt cơ bản giữa phương trình hàm trên tập số nguyên với phương trình hàm trên tập số thực là, một số công cụ sử dụng được trên tập số thực như việc sử dụng đạo hàm, sử dụng tính chất hàm liên tục ... không thể sử dụng được trên tập số nguyên. Do đó, phải có một lời giải khác, với một phương pháp khác đặc trưng hơn để giải lớp phương trình này. Để có được phương pháp giải đó, việc phân loại và hệ thống các dạng như phương trình hàm này là một việc làm cần thiết. Đó cũng là mục đích của đề tài này. Và do đó, nội dung của luận văn là có ý nghĩa khoa học và mang tính thực tiễn đối với toán học phổ thông hệ chuyên toán.

Với mục đích đó, luận văn gồm những nội dung sau đây:

Chương 1. Áp dụng một số nguyên lý và tính chất đặc trưng của tập số nguyên để giải phương trình hàm.

Chương này trình bày việc sử dụng nguyên lý quy nạp, nguyên lý sắp thứ tự đôi khi là một công cụ rất tốt để giải quyết một số bài toán khó liên quan đến việc tìm phương trình hàm trên tập số nguyên. Bên cạnh đó, đối với một số bài toán giải phương trình hàm trên tập số nguyên, ta dễ dàng nhận ra quy luật nếu chuyển bài toán theo một hệ đếm cơ số khác.

Chương 2. Áp dụng một số tính chất của dãy số và hàm số để giải phương trình hàm.
Chương này trình bày việc sử dụng một số tính chất của dãy số như tính chất số hạng tổng quát của dãy số, tính chất của dãy số $[\alpha n]$; một số tính chất của hàm số như tính đơn điệu của hàm số, tính chất của ánh xạ; hay tính chất số học liên quan đến hàm số đôi khi nó là công cụ rất hiệu quả để giải bài toán về phương trình hàm trên tập số nguyên.

Chương 3. Áp dụng lý thuyết phương trình sai phân để giải phương trình hàm.
Chương này trình bày một số bài toán về một số phép chuyên đổi của dãy số như dãy số chuyển đổi các phép tính số học, dãy số chuyển đổi các đại lượng trung bình. Đặc biệt là qua một số bài toán minh họa về giải bài toán phương trình hàm dưới góc độ của những phương trình sai phân cấp cao mà lời giải của chúng là không dễ dàng.

Trong mỗi phương pháp áp dụng của mỗi chương, Luận văn trình bày một số bài toán minh họa cơ bản, kèm theo đó là phương pháp giải đặc trưng đối với các dạng toán này. Cuối mỗi phần của mỗi chương, Luận văn cũng đề xuất một số bài tập tự giải.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của TS. Trịnh Đào Chiến. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc về sự hướng dẫn nhiệt tình, nghiêm khắc và những lời động viên của Thầy trong suốt quá trình học tập và thực hiện Luận văn. Tác giả xin chân thành cảm ơn quý thầy cô trong Ban giám hiệu, Phòng đào tạo sau Đại học, Khoa Toán, Trung tâm thông tin - Tư liệu trường Đại học Quy Nhơn, cùng quý Thầy Cô tham gia giảng dạy khóa học đã tạo điều kiện giúp đỡ cho tác giả trong thời gian học tập và nghiên cứu.

Nhân đây tác giả cũng xin cảm ơn sở Giáo dục và Đào tạo Gia Lai, trường THPT Nguyễn Du-Huyện Krôngpa và các bạn đồng nghiệp; các anh chị em học viên cao học Khóa XI; gia đình và những người thân đã giúp đỡ, động viên và tạo điều kiện thuận lợi trong thời gian học tập và nghiên cứu để tác giả có thể hoàn thành khóa học và Luận văn.

Luận văn có thể được dùng như một tài liệu tham khảo có hệ thống về một số phương pháp giải phương trình hàm trên tập số nguyên.

Mặc dù tác giả đã cố gắng rất nhiều nhưng kết quả đạt được trong Luận văn vẫn còn khiêm tốn và khó tránh khỏi những khiếm khuyết. Tác giả mong nhận được sự đóng góp quý báu của quý Thầy Cô và các độc giả để Luận văn hoàn thiện hơn.

Quy Nhơn, tháng 03 năm 2011.

Trương Thanh Vũ

Chương 1

Áp dụng một số nguyên lý và tính chất đặc trưng của tập số nguyên để giải phương trình hàm.

1.1 Nguyên lý quy nạp toán học.

1.1.1 Lý thuyết.

Nguyên lý quy nạp là một nguyên lý quen thuộc và rất quan trọng trong chương trình toán phổ thông. Nguyên lý này đôi khi là một công cụ rất hữu hiệu để giải quyết một số bài toán khó liên quan đến tập số nguyên, chẳng hạn việc giải các phương trình hàm trên tập rời rạc này. Dưới đây là một số bài toán minh họa.

1.1.2 Một số bài toán minh họa.

Bài toán 1.1. *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ *sao cho*
a. $f(2) = 2$*;*
b. $f(mn) = f(m).f(n)$ *với mọi* m*,* n *thuộc* $\mathbb{N}^*$*;*
c. $f(m) < f(n),\ \forall m < n$*.*

Giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Khi đó, chọn $n = 1$, ta có $f(1) = f(1.1) = f(1).f(1) \Rightarrow f(1) = 1$.
Ta thấy rằng $2 = f(2) < f(3) < f(4) = f(2).f(2) = 4 \Rightarrow f(3) = 3$,
và $f(4) < f(5) < f(6) = f(2).f(3) = 6 \Rightarrow f(5) = 5$.
Ta chứng minh $f(n) = n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Thật vậy, ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp như sau
$\star$ Với $n = 1$ ta có $f(1) = 1$.

$\star$ Giả sử $f(k) = k$ $(k \in \mathbb{N}^*, 2 \leq k \leq n)$. Ta cần chứng minh điều khẳng định vẫn còn đúng với $k = n + 1$. Thật vậy,
-Nếu k là số chẵn thì $f(k) = f\left(2.\frac{k}{2}\right) = f(2).f\left(\frac{k}{2}\right) = 2.\frac{k}{2} = k$.
-Nếu k là số lẻ thì $k+1$ là số chẵn và

$$f(k+1) = f(2).f\left(\frac{k+1}{2}\right) = 2.\frac{k+1}{2} = k+1;$$

Mặt khác $k-1 = f(k-1) < f(k) < f(k+1) = k+1$, do đó $f(k) = k$.
Khi đó khẳng định vẫn còn đúng với $k = n + 1$.
Vậy, theo nguyên lý quy nạp, ta có $f(n) = n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
Thử lại, ta thấy $f(n) = n$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét 1.1. Các điều kiện đã nêu trong bài toán là rất chặt và đã được sử dụng một cách tối đa vào phương pháp quy nạp toán học để giải. Tuy nhiên, chỉ cần làm "yếu" đi một trong những điều kiện đó thì việc giải bài toán mới đã bắt đầu khó khăn, đòi hỏi một số kỹ thuật khác. Chẳng hạn bài toán sau đây.

Bài toán 1.2. *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ *sao cho*
a. $f(2) = 2$*;*
b. $f(mn) = f(m).f(n)$ *với mọi m, n thuộc* $\mathbb{N}^*$, *ƯCLN*$(m,n) = 1$*;*
c. $f(m) < f(n)$, $\forall m < n$.

Giải. Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Khi đó, chọn $n = 1$, ta có $f(1) = f(1.1) = f(1).f(1) \Rightarrow f(1) = 1$.
Ta thấy rằng
$f(3).f(5) = f(15) < f(2).f(9) < f(2).f(10) = f(2).f(2).f(5)$
$\Rightarrow f(3) < f(2).f(2) = 4$.
Mà $2 = f(2) < f(3) < 4$ nên $f(3) = 3$. Từ đó ta tính được
$f(4) = 4, f(5) = 5, f(6) = 6, f(7) = 7, f(8) = 8, f(9) = 9, f(10) = 10$.
Do đó $f(n) = n$, với $n \in \mathbb{N}^*, n \leq 10$.
Ta chứng minh $f(n) = n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
Thật vậy, ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp như sau
$\star$ Giả sử $f(k) = k$ $(k \in \mathbb{N}^*, 10 \leq k \leq n)$. Ta cần chứng minh điều khẳng định vẫn còn đúng với $k = n + 1$. Thật vậy,
-Với k là số chẵn, ta xét hai trường hợp sau

- Trường hợp $k = 2^\alpha(2l+1),\ \alpha, l \in \mathbb{N}^*$.

$$f(k) = f(2^\alpha(2l+1)) = f(2^\alpha)f(2l+1) = 2^\alpha(2l+1) = k.$$

- Trường hợp $k = 2^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} f(k+2) = f(2^\alpha+2) &= f(2(2^{\alpha-1}+1)) = f(2).f(2^{\alpha-1}+1) \\ &= 2(2^{\alpha-1}+1) = 2^\alpha+2 = k+2. \end{aligned}$$

Mặt khác $k-1 = f(k-1) < f(k) < f(k+1) < f(k+2) = k+2$.
Do đó $f(k) = k,\ f(k+1) = k+1$.
-Với k là số lẻ thì $k+1$ là số chẵn, ta xét hai trường hợp sau

- Trường hợp $k+1 = 2^\alpha(2l+1),\ \alpha, l \in \mathbb{N}^*$. Ta có

$$f(k+1) = f(2^\alpha(2l+1)) = f(2^\alpha)f(2l+1) = 2^\alpha(2l+1) = k+1.$$

Mà $k-1 = f(k-1) < f(k) < f(k+1) = k+1 \Rightarrow f(k) = k$.

- Trường hợp $k+1 = 2^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} f((k+1)+2) = f(2^\alpha+2) &= f(2(2^{\alpha-1}+1)) = f(2).f(2^{\alpha-1}+1) \\ &= 2(2^{\alpha-1}+1) = 2^\alpha+2 = (k+1)+2 = k+3. \end{aligned}$$

Mà

$$\begin{aligned} k-1 = f(k-1) < f(k) &< f(k+1) < f(k+2) < \\ &< f(k+3) = f((k+1)+2) = (k+1)+2 = k+3, \end{aligned}$$

suy ra $f(k) = k$, $f(k+1) = k+1$, $f(k+2) = k+2$.
Vậy, theo nguyên lý quy nạp, ta có $f(n) = n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Thử lại, ta thấy $f(n) = n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét 1.2. Khi điều kiện (b) được làm yếu đi so với điều kiện bài toán 1.1 thì điểm mấu chốt ở đây là chứng minh được $f(3) = 3$. Nếu thay đổi điều kiện (a) của bài toán 1.1 thì có thể xảy ra trường hợp bài toán không có nghiệm. Ta hãy xét bài toán 1.3.

Bài toán 1.3. *Chứng minh rằng không tồn tại hàm số $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ sao cho*
a. $f(2) = 3$;
b. $f(m.n) = f(m).f(n),\ \ \forall m, n \in \mathbb{N}^*$;
c. $f(m) < f(n), \forall m < n$.

Giải. Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn điều kiện của đề bài.
Đặt $f(3) = a$, ta được

$$27 = 3^3 = f^3(2) = f(2^3) < f(3^2) = f^2(3) = a^2 \Rightarrow a > 5.$$

Ta lại có $a^3 = f^3(3) = f(3^3) < f(2^5) = 3^5 < 343 = 7^3 \Rightarrow a < 7$.
Vì $a \in \mathbb{N}^*$ nên $a = 6$.
Mặt khác $256 > 243$ và
$f(256) = f(2^8) = \Big(f(2)\Big)^8 = 6561$; $f(243) = f(3^5) = \Big(f(3)\Big)^5 = 7776$.
suy ra $f(256) < f(243)$ (mâu thuẫn).
Vậy không tồn tại hàm số f thỏa điều kiện bài toán.

Nhận xét 1.3. Việc tìm ra sự mâu thuẫn, phục vụ cho việc giải bài toán, đôi khi không phải dễ dàng. Việc "mày mò" từng giá trị để phát hiện điều mâu thuẫn cũng là một phương pháp thường gặp. Đối với bài toán này, để có sự so sánh suy ra mâu thuẫn, trước hết ta tính được bảng giá trị sau

$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$	$f(6)$	$f(8)$	$f(9)$	$f(12)$	$f(16)$	$f(18)$	$f(24)$	$f(27)$	$f(32)$
3	a	9	$3a$	27	a^2	$9a$	81	$3a^2$	$27a$	a^3	243

Dựa vào bảng trên ta thấy rằng
$27 \leq a^2 \Rightarrow a > 5$ và $a^3 \leq 243 \Rightarrow a < 7$, do đó $a = 6$.
Từ $f(2) = 3, f(3) = 6$, ta tìm kiếm sự mâu thuẫn sao cho $2^k > 3^l$ nhưng $f(2^k) < f(3^l)$. Sau một quá trình thử các giá trị, ta tìm thấy sự mâu thuẫn khi $k = 8$ và $l = 5$.

Tiếp theo là một số bài toán minh họa về việc áp dụng một số kỹ thuật của phương pháp quy nạp để giải những dạng toán loại này.

Bài toán 1.4. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ thỏa mãn các điều kiện*
a. $f(m^2 + n^2) = f^2(m) + f^2(n),\ m, n \in \mathbb{N}$;
b. $f(1) > 0$.

Giải. Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Với $m = n = 0$ ta có $f(0) = 2f^2(0) \Rightarrow f(0) = 0$.
Với n=0 ta có $f(m^2) = f^2(m)$. Khi đó $f(m^2 + n^2) = f^2(m) + f^2(n)$.

Ta nhận xét rằng

$f(1) = f^2(1) \Rightarrow f(1)(1 - f(1)) = 0 \Rightarrow f(1) = 1$ (vì $f(1) > 0$),

$f(2) = f(1^2 + 1^2) = f^2(1) + f^2(1) = 2,\ f(4) = f(2^2) = f^2(2) = 4,$

$f(5) = f(2^2 + 1^2) = 5,\ 25 = f(5^2) = f(3^2 + 4^2) \Rightarrow f(3) = 3.$

Ta cũng tính được $f(6) = 6, f(7) = 7, f(8) = 8, f(9) = 9, f(10) = 10.$

Vậy $f(n) = n$ với $n \leq 10$.

Bằng quy nạp ta chứng minh $f(n) = n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

$\star$ Giả sử $f(k) = k$ với $k > 10$. Ta chứng minh $f(k+1) = k+1$.

Ta thấy rằng $(k+1)$ có dạng sau $5m + r, 0 \leq r \leq 4, m, r \in \mathbb{N}$.

Ta lại có các hằng đẳng thức sau

$$\begin{aligned}
&(5m)^2 = (4m)^2 + (3m)^2;\\
&(5m+1)^2 + 2^2 = (4m+2)^2 + (3m-1)^2;\\
&(5m+2)^2 + 1^2 = (4m+1)^2 + (3m+2)^2;\\
&(5m+3)^2 + 1^2 = (4m+3)^2 + (3m+1)^2;\\
&(5m+4)^2 + 2^2 = (4m+2)^2 + (3m+4)^2.
\end{aligned}$$

-Với $k+1 = 5m$ thì $f^2(5m) = f((5m)^2) = f^2(4m) + f^2(3m) = (5m)^2$
$\Rightarrow f(5m) = 5m.$

-Với $k+1 = 5m+1$ thì $f((5m+1)^2 + 2^2) = f((4m+2)^2) + f((3m-1)^2)$
$\Rightarrow f^2(5m+1) = (5m+1)^2 \Rightarrow f(5m+1) = 5m+1.$

-Với $k+1 = 5m+2$ thì $f((5m+2)^2 + 1^2) = f((4m+1)^2 + (3m+2)^2)$
$\Rightarrow f(5m+2) = 5m+2.$

-Với $k+1 = 5m+3$ thì $f((5m+3)^2 + 1^2) = f((4m+3)^2 + (3m+1)^2)$
$\Rightarrow f(5m+3) = 5m+3.$

-Với $k+1 = 5m+4$ thì $f((5m+4)^2 + 2^2) = f((4m+2)^2 + (3m+4)^2)$
$\Rightarrow f(5m+4) = 5m+4.$

Vậy $f(k+1) = k+1$.

Do đó $f(n) = n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Thử lại, ta thấy $f(n) = n,\ \forall n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài toán 1.5. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sao cho*

$$f(f(n)) + f(n) = 2n + 3,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Giải. Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ta có
$f(f(0)) + f(0) = 2.0 + 3 \Leftrightarrow f(f(0)) + f(0) = 3 \Rightarrow 0 \leq f(0) \leq 3.$

-Nếu $f(0) = 0$ thì $f(f(0)) + f(0) = 3$ (vô lí).
-Nếu $f(0) = 2$ thì $f(2) = f(f(0)) = 1 \Rightarrow f(1) = f(f(2)) = 6$.
Với $f(1) = 6 \Rightarrow f(6) = f(f(1)) = -1 \notin \mathbb{N}$. Suy ra $f(0) \neq 2$.
-Tương tự ta cũng có $f(0) \neq 3$. Do đó $f(0) = 1$.
Ta có $f(f(0)) + f(0) = 3 \Rightarrow f(1) = 2$; $f(f(1)) + f(1) = 5 \Rightarrow f(2) = 3$.
Khi đó ta chứng minh rằng hàm số f cần tìm là $f(n) = n + 1$. Thật vậy, ta chứng minh bằng quy nạp như sau
$\star$ Với $n = 0$ thì $f(0) = 1 = 1 + 0$.
$\star$ Giả sử khẳng định đúng với $n = k$, $(k \geq 0)$, tức là $f(k) = k + 1$.
Với $n = k + 1$, ta có
$f(k+1) = f(f(k)) = 2.k + 3 - f(k) = 2.k + 3 - (k+1) = (k+1) + 1$.
Do đó khẳng định đúng với $n = k + 1$.
Vậy $f(n) = n + 1, \forall n \in \mathbb{N}$.
Thử lại, ta thấy $f(n) = n + 1$ thỏa điều kiện của bài toán.

Bài toán 1.6. *Hàm số $f(n)$ xác định với mọi giá trị nguyên dương n và nhận các giá trị nguyên không âm. Ngoài ra, biết rằng*

$$f(m+n) - f(m) - f(n) = 0 \text{ hoặc } 1,$$
$$f(2) = 0, f(3) > 0, f(9999) = 3333.$$

Hãy tìm f(1982). *(IOM 1982).*

Giải. Giả sử $f(n)$ là hàm số thỏa mãn các yêu cầu bài toán.
Với $a \in \{0; 1\}$. Ta có $f(m+n) = f(m) + f(n) + a$.
Chọn $m = n = 1$, ta được $f(2) = 2f(1) + a \Rightarrow 2f(1) \leq f(2) = 0$
$\Rightarrow f(1) = 0$.
Ta lại có $f(3) = f(2+1) = f(2) + f(1) + a = a \Rightarrow f(3) = 1$.
Ta nhận xét rằng $f(3n) \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
Thật vậy, ta chứng minh bằng quy nạp như sau
$\star$ Với $n = 1$ ta có $f(3.1) = 1 \geq 1$. Khẳng định đúng với $n = 1$.
$\star$ Giả sử khẳng định đúng với k $(1 \leq k \leq n)$. Ta chứng minh khẳng định đúng với $n = k + 1$. Ta có
$f(3(k+1)) = f(3k+3) = f(3k) + f(3) + a \geq f(3k) + f(3) \geq k + 1$.
Vậy khẳng định đúng với $n = k + 1$.
Do đó $f(3n) \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
Vì $f(9999) = 3333$, ta suy ra rằng $f(3n) = n$, $\forall n \leq 3333$.

Ta lại có $f(3n) = f(2n) + f(n) + a = 3f(n) + 2a$. Suy ra

$$3f(n) \le f(3n) \le 3f(n) + 2 \Rightarrow f(n) \le \frac{f(3n)}{3} \le f(n) + \frac{2}{3}.$$

Do đó $f(n) = \left[\frac{f(3n)}{3}\right] = \left[\frac{n}{3}\right], \ \forall n \le 3333.$
Đặc biệt

$$f(1982) = \left[\frac{1982}{3}\right] = 660.$$

Bài toán 1.7. *Xét tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(m^2 f(n)) = n(f(m))^2, \ \forall m, n \in \mathbb{N}^*. \tag{1.1}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(1998)$.

Giải. Gọi S là tập tất cả các hàm thỏa mãn điều kiện của bài toán.
Giả sử $f(n) \in S$. Đặt $f(1) = a$.
-Chọn $m = 1$ ta có

$$f(f(n)) = n.f^2(1) = n.a^2. \tag{1.2}$$

$$f(n^2 f(1)) = 1.f^2(n) \Leftrightarrow f(a.n^2) = f^2(n). \tag{1.3}$$

$\forall m, n \in \mathbb{N}^*$ ta có

$$\begin{aligned}[f(m).f(n)]^2 = [f(m)]^2.[f(n)]^2 &\overset{(1.3)}{=} f(an^2).[f(m)]^2 \overset{(1.1)}{=} f(m^2 f(f(an^2))) \\ &\overset{(1.2)}{=} f(m^2 a^3 n^2) = f(a(amn)^2) \overset{(1.3)}{=} f^2(amn).\end{aligned}$$

Suy ra

$$f(amn) = f(m).f(n) \ \ (\text{vì } f(amn), f(m), f(n) \in \mathbb{N}^*). \tag{1.4}$$

Từ (1.4), chọn $n = 1$, ta được $f(am) = af(m)$.
Khi đó

$$af(mn) = f(amn) \overset{(1.4)}{=} f(m)f(n). \tag{1.5}$$

Từ (1.5) ta được $f^2(n) = a^1.f(n^2)$.
Ta nhận thấy rằng

$$f^k(n) = a^{k-1} f(n^k), \ \forall k \in \mathbb{N}^*. \tag{1.6}$$

Thật vậy, ta chứng minh bằng quy nạp như sau
$\star$ Với $k = 1$ ta có $f^1(n) = f(n) = a^0.f(n^1)$.

Do đó (1.6) đúng với $k = 1$.
$\star$ Giả sử (1.6) đúng với $k = l, (l \geq 1)$. Ta chứng minh (1.6) đúng với $k = l + 1$. Thật vậy, ta có

$$f^{l+1}(n) = f^l(n).f(n) = a^{l-1}.f(n^l).f(n) \overset{(1.5)}{=} a^l.f(n^{l+1}).$$

Khi đó (1.6) đúng với $k = l + 1$.
Vậy $f^k(n) = a^{k-1}f(n^k),\ \ \forall k \in \mathbb{N}^*$.
Ta chứng minh rằng $f(n) \vdots a$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Thật vậy, với p là số nguyên tố bất kì, gọi α là số mũ lớn nhất mà $a \vdots p^\alpha$ và β là số mũ lớn nhất mà $f(n) \vdots p^\beta$.
Từ (1.6), ta thấy: Vế trái chia hết cho $p^{k\beta}$, vế phải chia hết cho $p^{(k-1)\alpha}$ (ngoài ra $f(n^k)$ còn có thể có ước là p^l).
Suy ra $k\beta \geq (k-1)\alpha$, $\forall k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow k(\beta - \alpha) + \alpha \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \beta \geq \alpha$.
Do đó $f(n) \vdots a$.
Xét hàm số $g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ xác định bởi $g(n) = \frac{1}{a}f(n)$ ($a \geq 1$ vì $f(1) \in \mathbb{N}^*$). Khi đó

$$\begin{cases} g(mn) = \frac{1}{a}f(mn) = \frac{1}{a^2}f(m)f(n) = g(m)g(n); \\ g(1) = 1; \\ g(g(n)) = g(\frac{1}{a}f(n)) = \frac{1}{a^2}f(f(n)) = \frac{1}{a^2}a^2n = n. \end{cases} \tag{1.7}$$

Và $g(m^2g(n)) = g(m^2)g(g(n)) = n.g(m^2) = n.g^2(m) \Rightarrow g \in S$.
Ta lại có $f(n) \geq g(n)$ (vì $a \geq 1$). Do đó việc cần tìm giá trị nhỏ nhất, ta chỉ cần xét hàm số $g(n)$ thỏa (1.7).
Giả sử p là số nguyên tố và $g(p) = u.v$ với $u, v \in \mathbb{N}^*$.
Ta có $p = g(g(p)) = g(u.v) = g(u)g(v)$. Suy ra hoặc $g(u) = 1$ hoặc $g(v) = 1$.
Giả sử $g(u) = 1$. Ta được $u = g(g(u)) = g(1) = 1$.
Khi đó $g(p) = v$ là một số nguyên tố. Vậy $g(n)$ là hàm số chuyển số nguyên tố thành số nguyên tố.
Ta lại có $g(m) = g(n) \Rightarrow g(g(m)) = g(g(n)) \Leftrightarrow m = n$.
Do đó g là đơn ánh.
Vậy $g(n)$ chuyển các số nguyên tố khác nhau thành các số nguyên tố khác nhau.
Ta có $1998 = 2.3^3.37$ và $g(1998) = g(2.3^3.37) = g(2).g^3(3).g(37)$,
nên để nhận được giá trị nhỏ nhất của $g(1998)$ ta phải chọn hàm $g(n)$

sao cho $g(2), g(3), g(37)$ là các số nguyên tố nhỏ nhất, khác nhau.
Hiển nhiên, nếu ta chọn được hàm số $\overline{g}(n)$ sao cho $\overline{g}(3) = 2, \overline{g}(2) = 3$, $\overline{g}(5) = 37, \overline{g}(37) = 5$ thì $g(n) \geq \overline{g}(2).\overline{g}^3(3).\overline{g}(37) = 120$.
Ta xây dựng hàm $g(n) : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ sao cho $g(1) = 1, g(2) = 3, g(3) = 2$, $g(5) = 37, g(37) = 5, g(p) = p, \forall p \in P \backslash \{2; 3; 5; 37\}$
và với $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$ thì $g(n) = g^{k_1}(p_1).g^{k_2}(p_2) \dots g^{k_m}(p_m)$.
Khi đó $g(n)$ thỏa (1.7) với $a = 1$. Vậy $g(n) \in S$.
Do đó $\min f(1998) = 120$ với $f(n) \in S$.

Bài toán 1.8. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn*

$$f(x^3 + y^3 + z^3) = f^3(x) + f^3(y) + f^3(z),\ \forall x, y, z \in \mathbb{Z}.$$

Giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn điều kiện bài toán.
Kí hiệu $P(x, y, z)$ là cách cho bộ $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ vào phương trình.
•$P(0, 0, 0) \Rightarrow f(0) = 0$.
•$P(x, -x, 0) \Rightarrow f(x) = -f(-x)$.
•$P(1, 1, 0) \Rightarrow f(2) = 2f(1)$.
•$P(1, 1, 1) \Rightarrow f(3) = 3f(1)$.
Ta chứng minh bằng quy nạp mệnh đề sau

$$f(n) = nf(1), \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{1.8}$$

⋆ Với $n = 0$: Hiển nhiên (1.8) đúng.
⋆ Giả sử với $n = k \geq 0$ thì (1.8) đúng, ta chứng minh (1.8) đúng với $n = k + 1$. Thật vậy,
Với $k = 2t$, sử dụng đẳng thức

$$(2t + 1)^3 + 5^3 + 1^3 = (2t - 1)^3 + (t + 4)^3 + (4 - t)^3.$$

Ta có

$$\begin{aligned} f^3(2t + 1) + f^3(5) + f^3(1) &= f((2t + 1)^3 + 5^3 + 1^3) \\ &= f((2t - 1)^3 + (t + 4)^3 + (4 - t)^3) \\ &= f^3(2t - 1) + f^3(t + 4) + f^3(4 - t) \end{aligned}$$

(Do f lẻ nên $f(4 - t) = -f(t - 4) = -(t - 4)f(1)$).
Hay $f(2t + 1) = (2t + 1)f(1)$.
Tương tự với $k = 2t - 1$ thì $f(2t) = 2tf(1)$.
Vì thế ta có với mọi $n \in \mathbb{Z}$ thì $f(n) = nf(1)$. Thay vào phương trình ta nhận được 3 nghiệm $f(x) = 0, f(x) = x, f(x) = -x$.

Để kết thúc phần này, ta xét một bài toán kinh điển sau, trong đó phép quy nạp liên quan đến khái niệm "phần nguyên".

Bài toán 1.9. *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ *thỏa mãn điều kiện*

$$f(f(n))+f(n+1)=n+2,\ \forall n\in\mathbb{N}^*. \tag{1.9}$$

Giải. Cho $n=1$ vào (1.9) ta có $f(f(1))+f(2)=3$.
Từ đó $f(2)\le 2$ và $f(f(1))\le 2$. Ta xét hai trường hợp

- Trường hợp 1. $f(2)=1$ và $f(f(1))=2$.

Đặt $f(1)=k$, ta có $f(k)=2$.
Cho $n=2$ vào (1.9), ta được $f(f(2))+f(3)=4$.
Suy ra $f(3)=4-f(1)=4-k$. Từ $f(3)\ge 1$ nên $k\le 3$.
Nếu $k=1$ thì $2=f(f(1))=f(k)=f(1)=k=1$ (mâu thuẫn).
Nếu $k=2$ thì $2=f(f(1))=f(k)=f(2)=1$ (mâu thuẫn).
Nếu $k=3$ thì $2=f(f(1))=f(k)=f(3)=4-k=1$ (mâu thuẫn).
Do đó ta loại trường hợp 1.

- Trường hợp 2. $f(2)=2$ và $f(f(1))=1$.

Cho $n=2$ vào (1.9), ta nhận được $f(f(2))+f(3)=4$.
Từ đó ta thấy rằng $f(3)=2$. Ta tính toán được rằng

$$f(4)=5-f(f(3))=5-f(2)=3;\ f(5)=6-f(f(4))=4;$$
$$f(6)=7-f(f(5))=4.$$

Dự đoán rằng $f(n)=[n\alpha]-n+1$, với $\alpha=\frac{1+\sqrt5}{2}$.
Để chứng minh nhận định trên ta cần đến 2 bổ đề sau

Bổ đề 1.1. *Với mỗi số* $n\in\mathbb{N}^*$ *thì*

$$[\alpha([n\alpha]-n+1)]=n \text{ hoặc } n+1.$$

Chứng minh. Ta có $[\alpha([n\alpha]-n+1)]<\alpha(n\alpha-n+1)=n+\alpha<n+2$, và $[\alpha([n\alpha]-n+1)]>\alpha(n\alpha-1-n+1)-1=n-1$.
Từ đó bổ đề được chứng minh xong.

Bổ đề 1.2. *Với mỗi số* $n\in\mathbb{N}^*$

$$[(n+1)\alpha]=\begin{cases}[n\alpha]+2, \text{ nếu } [\alpha([n\alpha]-n+1)]=n;\\ [n\alpha]+1, \text{ trong các trường hợp còn lại.}\end{cases}$$

Chứng minh. Hiển nhiên $[(n+1)\alpha] = [n\alpha] + 1$ hoặc $[n\alpha] + 2$.
Nếu $[(n+1)\alpha] = [n\alpha] + 1$, ta có

$$\begin{aligned}[\alpha([n\alpha] - n + 1)] &= [\alpha([(n+1)\alpha] - n)] \\ &> \alpha((n+1)\alpha - 1 - n) - 1 = n.\end{aligned}$$

Theo bổ đề (1.1) ta suy ra $[\alpha([n\alpha] - n + 1)] = n + 1$.
Mặt khác, nếu $[(n+1)\alpha] = [n\alpha] + 2$ thì

$$\begin{aligned}[\alpha([n\alpha] - n + 1)] &= [\alpha([(n+1)\alpha] - n - 1)] \\ &< \alpha((n+1)\alpha - n - 1) = n + 1.\end{aligned}$$

Theo bổ đề 1.1 ta suy ra $[\alpha([n\alpha] - n + 1)] = n$.
Bây giờ ta chứng minh theo quy nạp kết quả dự đoán trên.
$\star$ Với $n = 1$, ta có $f(1) = 1 = [\alpha] = [\alpha] - 1 + 1$.
$\star$ Với $n = 2$, ta có $f(2) = 2 = 3 - 2 + 1 = [2\alpha] - 2 + 1$.
$\star$ Giả sử kết quả đúng với $1 \leq j \leq n$. Sử dụng (1.9) ta có

$$\begin{aligned}f(n+1) &= n + 2 - f(f(n)) = n + 2 - f([n\alpha] - n + 1) \\ &= n + 2 - [\alpha([n\alpha] - n + 1)] + [n\alpha] - n + 1 - 1.\end{aligned}$$

Từ $[n\alpha] - n + 1 < 2n - n + 1 = n + 1$, dẫn đến

$$f(n+1) = [n\alpha] + 2 - [\alpha([n\alpha] - n + 1)].$$

Giả sử n thỏa mãn $[\alpha([n\alpha] - n + 1)] = n$, ta có

$[(n+1)\alpha] = [n\alpha] + 2$.
Do đó $f(n+1) = [(n+1)\alpha] - n$.
Nếu n không thỏa mãn $[\alpha([n\alpha] - n + 1)] = n$ thì
$[\alpha([n\alpha] - n + 1)] = n + 1$ và $[(n+1)\alpha] = [n\alpha] + 1$.
Từ đó ta có $f(n+1) = [(n+1)\alpha] + 1 - (n+1)[(n+1)\alpha] - n$.
Ta kết thúc chứng minh. Vậy $f(n) = [n\alpha] - n + 1$, với $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Thử lại ta thấy hàm số trên thỏa điều kiện bài toán.

Các bài toán áp dụng Nguyên lý quy nạp toán học là rất phong phú. Dưới đây là một số bài toán đề xuất.

1.1.3 Bài tập

Bài toán 1.10. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(x + y^2 + z^3) = f(x) + f^2(y) + f^3(z),\ \forall x, y, z \in \mathbb{N}.$$

Bài toán 1.11. *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *thỏa mãn điều kiện*

$$f(x^4 + 5y^4 + 10z^4) = f^4(x) + 5f^4(y) + 10f^4(z),\ \forall x, y, z \in \mathbb{N}.$$

Bài toán 1.12. *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *thỏa mãn điều kiện*

$$f(f^2(m) + f^2(n)) = m^2 + n^2,\ \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Bài toán 1.13. *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *thỏa mãn các điều kiện*

a. $f(1) = 1$*;*

b. $f(m + n) + f(m - n) = \frac{1}{2}(f(2m) + f(2n)),\ \forall m, n \in \mathbb{N}.$

Bài toán 1.14. *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *thỏa mãn các điều kiện*

a. $f(1) = 1, f(2) = 4$*;*

b. $f(f(m) + f(n)) = f(f(m)) + f(n)),\ \forall m, n \in \mathbb{N}.$

Bài toán 1.15. *Tồn tại hay không hàm số* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *thỏa mãn các điều kiện*

a. $f(1) = 2$*;*

b. $f(f(n)) = f(n) + n$*;*

c. $f(n) < f(n + 1)$*.*

1.2 Nguyên lý sắp thứ tự tốt.

1.2.1 Lý thuyết.

Nguyên lý sắp thứ tự tốt là một nguyên lý đặc trưng của tập $\mathbb{Z}$ và tập $\mathbb{N}$. Cụ thể như sau:

Một tập con bất kỳ của tập $\mathbb{N}$ *đều có phần tử nhỏ nhất và nếu tập đó không phải là tập vô hạn thì nó có phần tử lớn nhất.*

Nguyên lý rất đơn giản này đôi khi là một công cụ mạnh mẽ để giải một số phương trình hàm trên tập số nguyên. Sau đây là một số bài toán minh họa.

1.2.2 Một số bài toán minh họa.

Bài toán 1.16. *Nếu* $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ *là hàm số thỏa mãn điều kiện* $f(n + 1) > f(f(n)),\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Chứng minh rằng : $f(n) = n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. *(IMO 1977)*

Giải. Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Gọi d là phần tử nhỏ nhất trong miền giá trị của hàm số f, tức là $d = \min\{f(n) : n \in \mathbb{N}^*\}$.
Theo nguyên lý sắp thứ tự tốt, d tồn tại và là duy nhất. Gọi $m \in \mathbb{N}^*$ sao cho $f(m) = d$.
Nếu $m > 1$ thì $d = f(m) > f(f(m-1))$, mâu thuẫn. Vậy $m = 1$.
Do đó $f(n)$ đạt giá trị nhỏ nhất duy nhất một điểm $m = 1$.
Bây giờ ta xét $\{f(n) : n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2\}$, bằng lập luận tương tự ta cũng có $f(2) = \min\{f(n) : n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2\}$.
Hơn nữa $f(2) > f(1)$. Vì nếu $f(2) = f(1)$ thì $f(1) = f(2) > f(f(1))$, mâu thuẫn.
Lặp lại quá trình lập luận như trên ta thu được

$$f(1) < f(2) < f(3) < \ldots < f(n) < \ldots \tag{1.10}$$

Vì $f(n) \in \mathbb{N}^*$ nên $f(1) \geq 1$. Với $f(1) \geq 1$ và (1.10) ta suy ra rằng $f(k) \geq k$.
Giả sử $f(k) > k$, khi đó $f(k) \geq k + 1$.
Mặt khác, theo điều kiện bài toán ta có $f(k+1) > f(f(k))$ và từ (1.10) ta cũng có $f(k+1) \leq f(f(k))$. Do đó $f(k) > k$ không thể xảy ra. Vậy $f(k) = k$ với $k \in \mathbb{N}^*$. Hay $f(n) = n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Thử lại, ta thấy $f(n) = n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài toán 1.17. *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ *thỏa mãn*

a. $f(1) = 1$.

b. $f(f(n))f(n+2) + 1 = f(n+1)f(f(n+1)),\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Ta chứng minh bằng quy nạp rằng

$$f(n+1) > f(f(n)). \tag{1.11}$$

$\star$ Với $n = 1$. Hiển nhiên.
$\star$ Giả sử (1.11) đúng với $n = k (k \geq 1)$. Ta chứng minh (1.11) đúng với $n = k + 1$. Thật vậy, ta có

$$f(f(k))f(k+2) = f(k+1)f(f(k+1)) - 1.$$

Do đó

$$\begin{aligned}
f(k+2) &= \frac{f(k+1)f(f(k+1))-1}{f(f(k))} \\
&\geq \frac{(f(f(k))+1)(f(f(k+1))-1}{f(f(k))} \\
&> \frac{(f(f(k)))(f(f(k+1))}{f(f(k))} = f(f(k+1)).
\end{aligned}$$

Từ đó ta suy ra $f(n+1) > f(f(n)), \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Vậy theo bài toán 1.16 ta có $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Thử lại ta thấy $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thỏa điều kiện bài toán.

Bài toán 1.18. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(n + f(n)) = f(n),\ \forall n \in \mathbb{N}^*;$$

và tồn tại $x_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho $f(x_0) = 1$.

Giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Gọi $x_1 = \min\{x, x \in \mathbb{N}^*, f(x) = 1\}$.
Suy ra $f(x_1 + 1) = f(x_1 + f(x_1)) = f(x_1) = 1$.
Hay $f(n) = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq x_1$.
Giả sử $x_1 > 1$. Suy ra $f(x_1 - 1 + f(x_1 - 1)) = f(x_1 - 1)$.
Nếu $x_1 - 1 + f(x_1 - 1) \geq x_1$ thì $f(x_1 - 1) = 1$, vô lý.
Nếu $x_1 - 1 + f(x_1 - 1) < x_1$ thì $f(x_1 - 1) < 1$, cũng vô lý.
Từ đó $f(n) \equiv 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Bài toán 1.19. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn*

$$2(f(m^2+n^2))^3 = f^2(m).f(n) + f(m).f^2(n), \forall m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa điều kiện bài toán.
Nếu $f(n) \equiv c$, với c là hằng số thì hiển nhiên thỏa mãn điều kiện bài toán.
Nếu tồn tại $m, n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $f(m) \neq f(n)$ thì ta gọi a, b là 2 số thỏa mãn $|f(a) - f(b)| = \min |f(m) - f(n)|, m, n \in \mathbb{N}^*$.
Giả sử $f(a) > f(b)$. Ta có $2f^3(b) < f^2(a).f(b) + f(a).f^2(b) < 2f^3(a)$.
Suy ra $f(b) < f(a^2 + b^2) < f(a)$.

Hay $f(a^2+b^2)-f(b)<f(a)-f(b)$, vô lý.
Do đó $f(n)\equiv c$ (với c là hằng số) là hàm số cần tìm.

Bài toán 1.20. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ thỏa mãn*

$$f(m+f(n))=f(f(m))+f(n),\ \ \forall m,n\in\mathbb{N}.$$

Giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn điều kiện bài toán.
Chọn $m=n=0$, ta có $f(0)=0$.
Chọn $m=0$, ta có $f(f(n))=f(n)$. Gọi k là điểm bất động bé nhất của hàm số.
• Nếu $k=0$ thì $f(n)\equiv 0,\ \forall n\in\mathbb{N}$.
• Nếu $k\neq 0$, dễ thấy $f(nk)=nk,\ \forall n\in\mathbb{N}$. Bây giờ ta xét a là điểm bất động bất kì của f. Biểu diễn $a=ks+r, 0\le r<k$.
Theo giả thiết $f(ks+r)=f(r+f(ks))=f(f(r))+ks$.
Hay $f(r)=r$. Suy ra $r=0$. Do đó một điểm bất động của f khi và chỉ khi nó là bội của k. Từ đó ta xây dựng hàm $f_0(n)$ như sau

Chọn $k-1$ số nguyên không âm tùy ý là $n_1,n_2,\dots,n_{k-1}$ và $n_0=0$, nếu $n=qk+r,\ 0\le r<k$ thì $f_0(n)=qk+n_rk$. Dễ thấy hàm $f_0(n)$ chính là nghiệm tổng quát của hàm số đã cho.

1.2.3 Bài tập.

Bài toán 1.21. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ thỏa mãn*

$$xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x^2+y^2),\ \forall x,y\in\mathbb{N}.$$

Bài toán 1.22. *Xét hàm số $f(n)=[n+\sqrt{n}]$, $n=1,2,\dots$. Cho $m\ge 1$ là số tự nhiên. Xét dãy các số $m,f(m),f(f(m)),\dots$. Chứng minh trong dãy có vô hạn số chính phương.*
Cho $D=\{1,2,3,\dots,2004\}$. Hàm số $f:D\to\mathbb{N}$ thỏa mãn

$$f(m)+f(n)\le f(m+n)\le f(m)+f(n)+1\ \forall m,n\in D.$$

Chứng minh tồn tại $x\in\mathbb{R}$ sao cho $f(n)=[nx],\ \forall n\in D$.

Bài toán 1.23. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ thỏa mãn*

$$f(n+f(n))=f(n),\ \forall n\in\mathbb{N},$$

và tồn tại $x_0\in\mathbb{N}$ sao cho $f(x_0)=a$.

1.3 Hệ đếm cơ số.

1.3.1 Lý thuyết.

Hệ đếm cơ số là một trong những khái niệm quan trọng trên tập số nguyên. Nó có nhiều ứng dụng liên quan đến các thuật toán trong số học và tin học.
Ta nhắc lại rằng, với b là một số nguyên dương lớn hơn hay bằng 2 thì mọi số nguyên dương N đều có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng

$$N = (a_1 \dots a_k)_b = a_1 b^{k-1} + a_2 b^{k-2} \dots + a_k,$$

với $1 \le a_1 \le b-1, 0 \le a_2, \dots, a_k \le b-1$.
Đó là định nghĩa hệ đếm cơ số dạng cơ bản nhất. Tuy nhiên, có thể lấy một dãy số nguyên bất kỳ (có trị tuyệt đối tăng nghiêm ngặt) làm hệ đếm cơ số, ví dụ hệ đếm cơ số (-2), hệ đếm cơ số Fibonacci $(3 = 4 - 2 + 1, 17 = 13 + 3 + 1, \dots)$.

Đối với một số bài toán giải phương trình hàm trên tập số nguyên, đôi khi sẽ dễ dàng nhận ra quy luật nếu nó được chuyển thành một bài toán theo một hệ đếm cơ số khác. Sau đây là một số bài toán kinh điển quan trọng thể hiện sâu sắc phương pháp này.

1.3.2 Một số bài toán minh họa.

Bài toán 1.24. *Giả sử $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ là hàm số thỏa mãn điều kiện $f(1) = 1$*

$$\text{và } f(n) = \begin{cases} 1 + f\left(\dfrac{n-1}{2}\right), \ n = 2k+1; \\ 1 + f\left(\dfrac{n}{2}\right), \ n = 2k. \end{cases}$$

Tìm $f(n)$.

Giải. Tính theo công thức truy hồi của đầu bài ta được

$$f(2k+1) = 1 + f(k) = f(2k), \ k = 1, 2, \dots$$

Ta có $f(2) = f(3) = 2$; $f(4) = f(5) = 3$; $f(6) = f(7) = 1 + f(3) = 3$; $f(8) = f(9) = f(10) = f(11) = f(12) = f(13) = f(14) = f(15) = 4$.
Sau khi tính xong các giá trị trên trong hệ cơ số 10, có lẽ ta vẫn chưa

thể hình dung ra quy luật giá trị của $f(n)$. Tuy nhiên, nếu viết trong hệ cơ số 2 thì ta được:

$$\begin{aligned} &f(2) = 2 = f(3) \Leftrightarrow f(10_2) = f(11_2) = 2;\\ &f(4) = f(5) = f(6) = f(7) = 3\\ &\quad \Leftrightarrow f(100_2) = f(101_2) = f(110_2) = f(111_2) = 3; \end{aligned}$$

Điều này dẫn ta đến

Quy luật: $f(n)$ chính là số chữ số của n viết trong hệ nhị phân.

Chứng minh: Khẳng định trên đúng cho $n = 1, 2, 3, \dots, 15$ hay $2^0 \le n < 2^4$.

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo q như sau. Giả sử $2^q \le n < 2^{q+1}$, khi ấy trong hệ cơ số 2 thì n sẽ có $q+1$ chữ số.

Nếu $n = 2m$ thì $2^{q-1} \le m < 2^q$ và m có q chữ số trong hệ cơ số 2. Theo giả thiết quy nạp $f(m) = q$. Do đó theo đầu bài ta có

$$f(n) = 1 + f(\frac{n}{2}) = 1 + f(m) = 1 + q.$$

Nếu $n = 2m+1$ thì $\frac{2^q-1}{2} \le m < \frac{2^{q+1}-1}{2}$.

Do m là số nguyên nên $2^{q-1} < m < 2^q$ và m cũng sẽ có q chữ số trong cơ số 2. Theo giả thiết quy nạp $f(m) = q$. Do đó theo đầu bài ta lại có

$$f(n) = 1 + f\left(\frac{n-1}{2}\right) = 1 + f(m) = 1 + q.$$

Như vậy, trong mọi trường hợp ta đều có $f(n)$ bằng chính số chữ số của n viết trong cơ số 2.

Bài toán 1.25. *Dãy số $\{f_n\}$ được xác định $f_1 = 1, f_{2n} = 3f_n$, $f_{2n+1} = f_{2n} + 1$. Hãy tính f_{100}.*

Giải. Ta có $f(1) = f(1_2) = 1 = 1.3^0$;

$$\begin{aligned} &f(2) = f(10_2) = 3f(1) = 3 = 1.3^1 + 0.3^0;\\ &f(3) = f(11_2) = 3f(1) + 1 = 4 = 1.3^1 + 1.3^0; \end{aligned}$$

Ta thấy rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và n có biểu diễn trong hệ nhị phân là $n = \Big(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0\Big)_2$ thì

$$f(n) = a_k.3^k + a_{k-1}.3^{k-1} + \dots + a_1.3^1 + a_0.3^0. \tag{1.12}$$

Thật vậy,
⋆ Với mọi $n \leq 4$ thì (1.12) đúng.
⋆ Giả sử (1.12) đúng với mọi $i < n$. Ta chứng minh với $i = n$ thì (1.12) cũng đúng.

+ Nếu $n = 2m$ với m có biểu diễn trong hệ nhị phân là $m = \Big(a_k a_{k_1} \dots a_1 a_0\Big)_2$ thì $n = \Big(a_k a_{k_1} \dots a_1 a_0 0\Big)_2$, ta được

$$\begin{aligned} f(n) &= f(2m) \\ \Leftrightarrow f\Big((a_k a_{k_1} \dots a_1 a_0 0)_2\Big) &= 3f(m) = 3(a_k.3^k + \dots + a_1.3^1 + a_0.3^0) \\ &= a_k.3^{k+1} + \dots + a_1.3^2 + a_0.3^1 + 0.3^0. \end{aligned}$$

+ Nếu $n = 2m + 1$ với m có biểu diễn trong hệ nhị phân là $m = \Big(a_k a_{k_1} \dots a_1 a_0\Big)_2$ thì $n = \Big(a_k a_{k_1} \dots a_1 a_0 1\Big)_2$, ta được

$$f(n) = f(2m+1) \Leftrightarrow f\Big((a_k a_{k_1} \dots a_1 a_0 1)_2\Big) = 3f(m) + 1$$
$$\Leftrightarrow f\Big((a_k a_{k_1} \dots a_1 a_0 1)_2\Big) = a_k.3^{k+1} + \dots + a_1.3^2 + a_0.3^1 + 1.3^0.$$

Vậy (1.12) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
Do đó với $100 = \Big(1100100\Big)_2$, ta có $f(100) = 1.3^6 + 1.3^5 + 1.3^2 = 981$.

Bài toán 1.26. *Dãy số* $\{a_n\}$ *được xác định bởi* $0 \leq a_0 < 1, a_n = 2a_{n-1}$ *nếu* $2a_{n-1} < 1$ *và* $a_n = 2a_{n-1} - 1$ *nếu* $2a_{n-1} \geq 1$*. Hỏi có bao nhiêu giá trị* a_0 *để* $a_5 = a_0$*.*

Giải. Ta trình bày cách giải bài toán trên trong hệ nhị phân.

Nhận xét 1.4. Nếu $a_0 = \Big(0, d_1 d_2 d_3 \dots\Big)_2$ thì $a_1 = \Big(0, d_2 d_3 d_4 \dots\Big)_2$.

Thật vậy
-Nếu $2a_0 < 1$ thì $d_1 = 0$ và $a_1 = 2a_0 = \Big(0, d_2 d_3 d_4 \dots\Big)_2$.
-Nếu $2a_0 \geq 1$ thì $d_1 = 1$ và $a_1 = 2a_0 - 1 = \Big(0, d_2 d_3 d_4 \dots\Big)_2$.
Hoàn toàn tương tự, $a_2 = \Big(0, d_3 d_4 d_5 \dots\Big)_2, \dots, a_5 = \Big(0, d_6 d_7 d_8 \dots\Big)_2$.
Khi đó $a_5 = a_0$ khi và chỉ khi a_0 là phân số nhị phân tuần hoàn chu kỳ 5. Có $2^5 = 32$ chu kỳ tuần hoàn như vậy, trong đó chu kỳ 11111 cho chúng ta $a_0 = 1$ (loại). Vậy tất cả có 31 giá trị a_0 thỏa mãn yêu cầu

đề bài. Đó là $\Big(0,00000\Big)_2, \Big(0,00001\Big)_2, \ldots, \Big(0,11110\Big)_2$. Tính sang hệ thập phân các số đó ta được các giá trị tương ứng là

$$0, \frac{1}{31}, \frac{2}{31}, \ldots, \frac{30}{31}.$$

Bài toán 1.27. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện*
1) $f(1) = 1$;
2) $f(2n) = 2f(n) - 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$;
3) $f(2n+1) = 2f(n) + 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa yêu cầu bài toán.
Từ giả thiết ta có $f(1) = 1 \Rightarrow f(1_2) = 1_2 = 1.2^0$;

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 1 = f(2) = f((10)_2) = (01)_2 = 0.2^1 + 1.2^0;\\
&\Rightarrow 3 = f(3) = f((11)_2) = (11)_2 = 1.2^1 + 1.2^0;\\
&\Rightarrow 1 = f(4) = f((100)_2) = (001)_2 = 0.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0;\\
&\Rightarrow 3 = f(5) = f((101)_2) = (011)_2 = 0.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0;
\end{aligned}$$

Ta thấy rằng
-Nếu n có biểu diễn trong hệ nhị phân là $n = (a_k a_{k-1} \ldots a_1)_2$ với $a_k = 1$ thì

$$f((a_k a_{k-1} \ldots a_1)_2) = (a_{k-1} \ldots a_1 a_k)_2 = a_{k-1}.2^k + \ldots + a_1.2^1 + a_k.2^0. \tag{1.13}$$

Ta chứng minh nhận xét trên bằng quy nạp.
$\star$ (1.13) đúng với $n \leq 5$.
$\star$ Giả sử (1.13) đúng với $n = m, (m \geq 6)$. Ta chứng minh (1.13) đúng với $n = m + 1$. Ta có hai trường hợp
Trường hợp 1. $m+1$ là số chẵn, đặt $m+1 = 2q$ với $q = (a_k a_{k-1} \ldots a_1)_2$ và $m + 1 = 2q = (a_k a_{k-1} \ldots a_1 0)_2$, ta được

$$\begin{aligned}
f(m+1) = f(2q) = 2f(q) - 1 &= 2(a_{k-1}.2^k + \ldots + a_1.2^1 + a_k.2^0) - 1\\
&= (a_{k-1} \ldots a_1 01)_2 = (a_{k-1} \ldots a_1 0 a_k)_2.
\end{aligned}$$

Trường hợp 2. $m+1$ là số lẻ, đặt $m+1 = 2q+1$ với $q = (a_k a_{k-1} \ldots a_1)_2$ và $m + 1 = 2q + 1 = (a_k a_{k-1} \ldots a_1 1)_2$, ta được

$$\begin{aligned} f(m+1) = f(2q+1) &= 2f(q)+1 \\ &= 2(a_{k-1}.2^k + \ldots + a_1.2^1 + a_k.2^0) + 1 \\ &= (a_{k-1}\ldots a_1 11)_2 = (a_{k-1}\ldots a_1 1 a_k)_2. \end{aligned}$$

Vậy (1.13) đúng với $n = m+1$.
Do đó n có biểu diễn trong hệ nhị phân là $n = (a_k a_{k-1}\ldots a_1)_2$ với $a_k = 1$ thì

$$f((a_k a_{k-1}\ldots a_1)_2) = (a_{k-1}\ldots a_1 a_k)_2 = a_{k-1}.2^k + \ldots + a_1.2^1 + a_k.2^0.$$

Thử lại, ta thấy hàm số f thỏa điều kiện bài toán.

Bài toán 1.28. *Giả sử $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ là hàm số thoả mãn*

$$f(1) = 1,\ f(2n) = f(n) \text{ và } f(2n+1) = f(2n)+1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Tìm giá trị lớn nhất của $f(n)$ trong khoảng $1 \leq n \leq 2006$.

Giải. Vì $f(2n)$ được tính theo $f(n)$ và $f(2n+1)$ được tính theo $f(2n)$, tức là theo $f(n)$, nên ta nghĩ tới chuyện viết các số trong cơ số 2. Ta tính

$$f(10_2) = f(2) = f(1) = 1;\ f(11_2) = f(3) = f(2)+1 = 2;$$
$$f(100_2) = f(4) = f(2) = 1;\ f(101_2) = f(5) = f(2)+1 = 2;$$
$$f(110_2) = f(6) = f(3) = 2;\ f(111_2) = f(7) = f(3)+1 = 3;$$

Từ đây ta rút ra quy luật sau
Quy luật: $f(n)$ bằng số chữ số 1 trong biểu diễn cơ số 2 của n.
Chứng minh: Giả sử khẳng định đúng với mọi $k < n$. Ta sẽ chứng minh nó đúng với n.

Nếu n chẵn thì $n = 2m = 10_2 \times m$. Vì trong hệ cơ số 2, khi nhân một số với $2 = 10_2$, ta chỉ việc thêm số 0 vào cuối số đó nên m và $n = 10_2 \times m$ có cùng số chữ số 1 trong biểu diễn cơ số 2. Theo giả thiết quy nạp, $f(m)$ bằng đúng số chữ số 1 của m, mà $f(n) = f(2m) = f(m)$ nên $f(n)$ cũng bằng đúng số chữ số 1 của m, tức là cũng bằng đúng số chữ số 1 của n.

Nếu n lẻ, tức là $n = 2m+1 = 10_2 \times m + 1$ thì n có số chữ số 1 nhiều hơn m là 1 chữ số (thêm chữ số 1 ở hàng cuối cùng, tức là ở hàng đơn vị).
Theo đầu bài ta có $f(n) = f(2m+1) = f(m)+1$, mà theo quy nạp,

$f(m)$ bằng đúng số chữ số 1 của m nên $f(n)$ cũng bằng số chữ số 1 của m cộng thêm 1, tức là $f(n)$ cũng bằng đúng số chữ số 1 của n.
Bài toán dẫn đến phải tìm số có số chữ số 1 lớn nhất trong biểu diễn cơ số 2 của các số nhỏ hơn 2006.
Vì $11111111111_2 = 2^{11} - 1 = 2047$ gồm 11 chữ số 1, mà $2006 < 2047$ nên $f(n)$ có nhiều nhất là 10 chữ số 1.
Ta lại có $f(1023) = f(1111111111_2) = 10$.
Do đó giá trị lớn nhất của $f(n)$ trong khoảng $1 \leq n \leq 2006$ là 10 đạt được khi $n = 1023$.

Bài toán 1.29. *Giả sử $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ là hàm số thoả mãn $f(1) = 1$, $f(3) = 3$ và với mọi số nguyên dương n thì*

$$f(2n) = f(n);\ f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n);$$
$$f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n).$$

Tìm số $n \leq 1988$ mà $f(n) = n$. *(IMO 1988)*

Giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa yêu cầu bài toán.
Một số $k \in \mathbb{N}$ bất kì chỉ có thể có một trong bốn dạng

$$k = 4n = 2.2n; k = 4n+1; k = 4n+2 = 2(2n+1); k = 4n+3;$$

nên từ công thức trong đầu bài có thể thấy rằng hàm số đã cho được xác định một cách duy nhất. Ta sẽ sử dụng cơ số 2 để tìm biểu diễn của hàm số f. Ta có

$$f(1_2) = f(1) = 1 = 1_2;\ f(10_2) = f(2) = f(1) = 1 = 01_2;$$
$$f(11_2) = f(3) = 3 = 11_2;\ f(100_2) = f(4) = 1 = 001_2;$$
$$f(101_2) = f(5) = 5 = 101_2;\ f(110_2) = f(6) = 3 = 011_2;$$

Quy luật: Biểu diễn của $f(n)$ trong cơ số 2 chính là biểu diễn của n bằng cách viết ngược lại, tức là $f((a_k a_{k-1} ... a_1 a_0)_2) = (a_0 a_1 ... a_{k-1} a_k)_2$.
Chứng minh: Giả sử tính chất đúng cho mọi $k < n$. Ta sẽ chứng minh nó đúng cho n.
Nếu n chẵn $(n = 2m)$ thì theo giả thiết $f(n) = f(2m) = f(m)$. Vì $n = 2m$ nên nếu m được biểu diễn trong hệ cơ số 2 dưới dạng $m = a_k a_{k-1} ... a_1 a_0$ thì $n = a_k a_{k-1} ... a_1 a_0 0$.
Theo quy nạp

$f(m) = f(a_ka_{k-1}...a_1a_0) = a_0a_1...a_{k-1}a_k = 0a_0a_1...a_{k-1}a_k$.
Vậy $f(a_ka_{k-1}...a_1a_00) = f(n) = f(m) = f(a_ka_{k-1}...a_1a_0)$
$= a_0a_1...a_{k-1}a_k = 0a_0a_1...a_{k-1}a_k$.
Nếu $n = 4m+1$ với $m = a_ka_{k-1}...a_1a_0$ thì $n = 4m+1 = a_ka_{k-1}...a_1a_001$ và $2m+1 = a_ka_{k-1}...a_1a_01$.
Theo đầu bài và giả thiết quy nạp ta có:

$$\begin{aligned}
&f(a_ka_{k-1}...a_1a_001) = f(4m+1) = 2f(2m+1) - f(m)\\
&= 2.1a_0a_1...a_{k-1}a_k - f(m) = 1a_0a_1...a_{k-1}a_k0 - f(m)\\
&= \underbrace{10....0}_{k+3} + a_0a_1...a_{k-1}a_k0 - a_0a_1...a_{k-1}a_k\\
&= \underbrace{10....0}_{k+3} + a_0a_1...a_{k-1}a_k = 10a_0a_1...a_{k-1}a_k.
\end{aligned}$$

Nếu $n = 4m+3$ với $m = a_ka_{k-1}...a_1a_0$ thì $n = 4m+3 = a_ka_{k-1}...a_1a_011$ và $2m+1 = a_ka_{k-1}...a_1a_01$.
Từ giả thiết của đầu bài và giả thiết quy nạp suy ra:

$$\begin{aligned}
&f(a_ka_{k-1}...a_1a_011) = f(4m+3) = 3f(2m+1) - 2f(m)\\
&= f(2m+1) + 2f(2m+1) - 2f(m)\\
&= 1a_0a_1...a_{k-1}a_k + 1a_0a_1...a_{k-1}a_k0 - a_0a_1...a_{k-1}a_k0\\
&= 1a_0a_1...a_{k-1}a_k + \underbrace{10...0}_{k+3} = 11a_0a_1...a_{k-1}a_k.
\end{aligned}$$

Vậy quy luật được chứng minh.

Một số trong cơ số 2 được gọi là *palindromic* nếu nó không đổi khi ta đổi chỗ các chữ số theo thứ tự ngược lại. Với mỗi k sẽ có tất cả $2^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}$ số *palindromic* có độ dài k (số *palindromic* bậc k). Thật vậy, một số *palindromic* hoàn toàn được xác định nếu biết tất cả $\left[\frac{k+1}{2}\right]$ chữ số đầu tiên (bên phải), các chữ số còn lại được xác định bằng cách lấy đối xứng qua số đứng giữa. Vì chữ số ở vị trí đầu tiên bên phải bắt buộc phải là 1, nên chỉ còn lại $\left[\frac{k+1}{2}\right] - 1 = \left[\frac{k-1}{2}\right]$ vị trí tùy chọn là chữ số 0 hoặc chữ số 1. Có $\underbrace{2 \times 2 \times ... \times 2}_{\left[\frac{k-1}{2}\right]} = 2^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}$ khả năng chọn, tức là có tất cả $2^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}$ số *palindromic* bậc k.

Từ quy luật trên suy ra nghiệm của phương trình $f(n) = n$ với $n \leq 1988 = 11111001110_2$ chính là các số *palindromic* với tối đa 10 chữ số và những số có 11 chữ số nhưng nhỏ hơn $n \leq 1988$.

Vì có một số với 1 chữ số (số $1 = 1_2$) và một số với 2 chữ số trong cơ số 2 (số $3 = 11_2$) thỏa mãn phương trình $f(n) = n$ nên có tất cả $1+1+2^{\left[\frac{3-1}{2}\right]}+2^{\left[\frac{4-1}{2}\right]}+...+2^{\left[\frac{9-1}{2}\right]}+2^{\left[\frac{10-1}{2}\right]} = 2(1+2+...+16) = 62$ số có tối đa 10 chữ số trong cơ số 2, tức là có tất cả 62 số trong khoảng $0 \le n \le 1023$ thoả mãn phương trình $f(n) = n$.

Có tất cả $2^{\left[\frac{11-1}{2}\right]} = 32$ số trong khoảng $1024 \le n \le 2047$ (có 11 chữ số) là *palindromic*. Trong các số đó có hai số $11111111111_2 = 2047$ và $11111011111_2 = 2015$ vượt quá 1988. Vậy có tất cả 32-2=30 số trong khoảng $1024 \le n \le 1988$ thoả mãn phương trình $f(n) = n$.

Cuối cùng, phương trình $f(n) = n$ có tất cả 62+30=92 nghiệm.

Bài toán 1.30. *Hàm số* $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *thỏa mãn các điều kiện sau*

$$(i)\ F(4n) = F(2n) + F(n);$$
$$(ii)\ F(4n+2) = F(4n) + 1;$$
$$(iii)\ F(2n+1) = F(2n) + 1.$$

Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương m, *số các số nguyên* n *với* $0 \le n < 2^m$ *và* $F(4n) = F(3n)$ *bằng* $F(2^{m+1})$. *(IMO shortlist 2000)*

Giải. Giả sử tồn tại hàm số F thỏa yêu cầu bài toán.
Do (i) ta có $F(4.0) = F(2.0) + F(0)$. Suy ra $F(0) = 0$.
Tương tự, từ (ii) suy ra $F(2) = F(4.0+2) = F(4.0) + 1 = 1$.
Từ (iii) ta có: $F(3) = F(2+1) = F(2) + 1 = 2$.
Ta thấy $F(n)$ xác định một cách duy nhất từ ba điều kiện của đầu bài. Ta tính và quan sát bảng giá trị của $F(n)$ dưới đây

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
F(n)	0	1	1	2	2	3	3	4	3	4	4	5	5	6	6	7	5

Nhận xét 1.5. $F(2^r) = u_{r+1}$, trong đó u_r là số hạng thứ r của dãy Fibonacci ($u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$, $n \ge 1$).

Thật vậy,
với $r = 0$ ta có $F(2^0) = F(1) = 1 = u_1$;
với $r = 1$ ta có $F(2^1) = F(2) = 1 = u_2 = u_{1+1}$;
với $r = 2$ ta có $F(2^2) = F(4) = 2 = u_3 = u_{2+1}$;
với $r = 3$ ta có $F(2^3) = F(8) = 3 = u_4 = u_{3+1}$;
với $r = 4$ ta có $F(2^4) = F(16) = 5 = u_5 = u_{4+1}$.

Giả sử khẳng định trên đúng với mọi $1 \leq k \leq r$. Ta sẽ chứng minh nó đúng cho $r+1$. Điều này dễ dàng suy ra từ (i), từ giả thiết quy nạp và từ định nghĩa của dãy Fibonacci:
$F(2^{r+1}) = F(4.2^{r-1}) = F(2.2^{r-1}) + F(2^{r-1}) = u_{r+1} + u_{(r-1)+1} = u_{r+2}$.
Quan sát bảng giá trị của $F(n)$ tính theo n và u_n dưới đây

n	u_n	$(n)_2$	$F(n)$	$F(n) = a_k u_{k+1} + \ldots + a_0 u_1$
0	0	0_2	0	$F(0) = 0.u_1 = 0$
1	1	1_2	1	$F(1) = 1.u_1 = 1$
2	1	10_2	1	$F(2) = 1.u_2 + 0.u_1 = 1$
3	2	11_2	2	$F(3) = 1.u_2 + 1.u_1 = 2$
4	3	100_2	2	$F(4) = 1.u_3 + 0.u_2 + 0.u_1 = 2$
5	5	101_2	3	$F(5) = 1u_3 + 0.u_2 + 1.u_1 = 3$
6	8	110_2	3	$F(6) = 1.u_3 + 1.u_2 + 0.u_1 = 3$
7	13	111_2	4	$F(7) = 1.u_3 + 1.u_2 + 1.u_1 = 4$
8	21	1000_2	3	$F(8) = 1.u_4 + 0.u_3 + 0.u_2 + 0.u_1 = 3$
9	34	1001_2	4	$F(9) = 1.u_4 + 0.u_3 + 0.u_2 + 1.u_1 = 4$
10	55	1010_2	4	$F(10) = 1.u_4 + 0.u_3 + 1.u_2 + 0.u_1 = 4$
11	89	1011_2	5	$F(11) = 1.u_4 + 0.u_3 + 1.u_2 + 1.u_1 = 5$
12	144	1100_2	5	$F(12) = 1.u_4 + 1.u_3 + 0.u_2 + 0.u_1 = 5$
13	233	1101_2	6	$F(13) = 1.u_4 + 1.u_3 + 0.u_2 + 1.u_1 = 6$
14	377	1110_2	6	$F(14) = 1.u_4 + 1.u_3 + 1.u_2 + 0.u_1 = 6$
15	610	1111_2	7	$F(15) = 1.u_4 + 1.u_3 + 1.u_2 + 1.u_1 = 7$
16	987	10000_2	5	$F(16) = 1.u_5 + 0.u_4 + 0.u_3 + 0.u_2 + 0.u_1 = 5$

ta thấy $F(n)$ được biểu diễn dưới dạng tổng của các số hạng của dãy Fibonacci. Hơn nữa, ta có nhận xét tổng quát sau.

Nhận xét 1.6. Nếu n có biểu diễn cơ số 2 là $n = (a_k ... a_0)_2$ thì

$$F(n) = a_k u_{k+1} + ... + a_0 u_1. \qquad (1.14)$$

Chứng minh: Ta chứng minh rằng $F(n)$ được xác định theo công thức (1.14) sẽ thỏa mãn cả ba điều kiện (i), (ii), (iii) với mọi $n \geq 0$. Thật vậy, nếu $n = (a_k ... a_0)_2$ thì $4n = (a_k ... a_0 00)_2$; $4n+2 = (a_k ... a_0 10)_2$; $2n = (a_k ... a_0 0)_2$, do đó

$$F(4n) = a_k u_{k+3} + \ldots + a_0 u_3 \text{ và } F(2n) = a_k u_{k+2} + \ldots + a_0 u_2.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}F(4n) &= a_k(u_{k+2}+u_{k+1})+\ldots+a_0(u_2+u_1)\\ &= (a_ku_{k+2}+\ldots+a_0u_2)+(a_ku_{k+1}+\ldots+a_0u_1)=F(2n)+F(n).\end{aligned}$$

Vậy (i) được chứng minh.
Vì $u_2=1$ nên ta cũng có

$$F(4n+2)=a_ku_{k+3}+\ldots+a_0u_3+u_2=F(4n)+1,$$

hay (ii) được chứng minh.
Và cuối cùng, vì $u_1=1$ nên

$F(2n+1)=a_ku_{k+2}+\ldots+a_0u_2+u_1=F(2n)+1$, tức là (iii) đúng. Do (i)-(iii) xác định duy nhất $F(n)$ nên (1.14) chính là công thức tổng quát của $F(n)$.

Nhận xét 1.7. Nếu trong biểu diễn nhị phân của n không có hai chữ số 1 đứng liền nhau (ta gọi là chữ số 1 cô lập) thì $F(3n)=F(4n)$.

Chứng minh: Giả sử trong biểu diễn nhị phân của $n=(a_k\ldots a_0)_2$ không có hai chữ số 1 liên tiếp. Vì $3n=2n+n$, mà $2n=(a_k\ldots a_00)_2$, nên $3n=2n+n=(a_k\ldots a_00)_2+(a_k\ldots a_0)_2$.
Vì trong biểu diễn nhị phân của $n=(a_k\ldots a_0)_2$ không có hai chữ số 1 liên tiếp nên phép cộng trên là không có nhớ từ hàng này sang hàng sau, tức là nếu $n=(a_k\ldots a_0)_2$ thì

$$\begin{aligned}3n=2n+n&=(a_k\ldots a_00)_2+(a_k\ldots a_0)_2\\ &=a_k(a_{k-1}+a_k)\ldots(a_{i-1}+a_i)\ldots(a_0+a_1)a_0.\end{aligned}$$

Do đó $F(n)=a_ku_{k+1}+\ldots+a_0u_1$ và

$$\begin{aligned}F(3n)&=a_ku_{k+2}+(a_{k-1}+a_k)u_{k+1}+\ldots+(a_{i-1}+a_i)u_{i+1}+\ldots+a_0u_1\\ &=a_k(u_{k+2}+u_{k+1})+a_{k-1}(u_{k+1}+u_k)+\ldots+a_{i-1}(u_{i+1}+u_i)+\\ &+\ldots+a_0(u_2+u_1)=a_ku_{k+3}+\ldots+a_0u_3=F(4n).\end{aligned}$$

Nhận xét 1.8. Với mọi n thì $F(3n)\le F(4n)$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi trong biểu diễn số thập phân của n mọi chữ số 1 là cô lập.

Chứng minh: Ta sẽ chứng minh nhận xét (1.8) đúng với mọi $0\le n\le 2^m$ bằng quy nạp theo $m\ge 1$. Với $m=1,\,2,\,3,\,4$ $(0\le n\le 16)$ điều này dễ dàng thấy được qua bảng trên. Thật vậy

Với $n = 1 = 1_2$: $F(3) = F(4) = 2$;
Với $n = 2 = 10_2$: $F(6) = F(8) = 3$;
Với $n = 3 = 11_2$: $F(9) = 4 < 5 = F(12)$;
Với $n = 4 = 100_2$: $F(12) = F(16) = 5$.
Giả sử nhận xét (1.8) đúng với mọi $k \leq m$. Ta sẽ chứng minh nó đúng với $k = m + 1$.
Giả sử $2^m \leq n < 2^{m+1}$. Khi ấy $n = 2^m + p$ với $0 \leq p < 2^m$.
Giả sử

$$\begin{aligned} n = 2^m + p &= \Big(1\underbrace{00\ldots00}_{m}\Big)_2 + (a_{m-1}a_{m-2}\ldots a_1a_0)_2 \\ &= (1a_{m-1}a_{m-2}\ldots a_1a_0)_2. \end{aligned}$$

Vì $p = (a_{m-1}a_{m-2}\ldots a_1a_0)_2$ (hệ số a_{m-1} không nhất thiết bằng 0) nên $4p = (a_{m-1}a_{m-2}\ldots a_1a_000)_2$ và $4n = (1a_{m-1}a_{m-2}\ldots a_1a_000)_2$.
Do (1.14) ta có

$$\begin{aligned} F(4n) &= u_{m+3} + a_{m-1}u_{m+2} + a_{m-2}u_{m+1} + \ldots + a_1u_4 + a_0u_3 \\ &= u_{m+3} + F(4p). \end{aligned}$$

Xét ba trường hợp
1) $0 \leq p < \frac{2^m}{3}$. Khi ấy $3p < 2^m$, do đó $3p = (b_{m-1}b_{m-2}\ldots b_1b_0)_2$ và

$$\begin{aligned} 3n &= 3(2^m + p) = 2^{m+1} + 2^m + 3p \\ &= \Big(1\underbrace{00\ldots00}_{m+1}\Big)_2 + \Big(1\underbrace{00\ldots00}_{m}\Big)_2 + (b_{m-1}b_{m-2}\ldots b_1b_0)_2 \\ &= (11b_{m-1}b_{m-2}\ldots b_1b_0)_2. \end{aligned}$$

Vì $0 \leq p < 2^m$ nên theo giả thiết quy nạp ta có $F(3p) \leq F(4p)$.
Do đó, từ (1.14) suy ra

$$\begin{aligned} F(3n) &= u_{m+2} + u_{m+1} + b_{m-1}u_m + b_{m-2}u_{m-1} + \ldots + b_1u_2 + b_0u_1 \\ &= u_{m+3} + F(3p) \leq u_{m+3} + F(4p) = F(4n). \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $F(3p) = F(4p)$, nghĩa là nếu các chữ số 1 của p là cô lập. Nhưng vì $n = 2^m + p$ với $0 \leq p < 2^m$ nên các chữ số 1 của n cũng là cô lập.
Vậy $F(3n) = F(4n)$ khi và chỉ khi các chữ số 1 của n là cô lập.
2) $\frac{2^m}{3} \leq p < \frac{2^{m+1}}{3}$. Khi ấy $3p = 2^m + h$ với $0 \leq h < 2^m$ nên ta có biểu diễn nhị phân

$$3p = \Big(1\underbrace{0\ldots0}_{m}\Big)_2 + (h_{m-1}h_{m-2}\ldots h_1h_0)_2 = (1h_{m-1}h_{m-2}\ldots h_1h_0)_2.$$

Do đó

$$\begin{aligned} F(3p) &= u_{m+1} + h_{m-1}u_m + h_{m-2}u_{m-1} + \ldots + h_1u_2 + h_0u_1 \\ &= u_{m+1} + F(h). \end{aligned}$$

Vì

$$\begin{aligned} 3n &= 3(2^m + p) = 2^{m+1} + 2^m + 3p \\ &= \Big(1\underbrace{00\ldots00}_{m+1}\Big)_2 + \Big(1\underbrace{00\ldots00}_{m}\Big)_2 + \Big(1h_{m-1}h_{m-2}\ldots h_1h_0\Big)_2 \\ &= \Big(100h_{m-1}h_{m-2}\ldots h_1h_0\Big)_2, \end{aligned}$$

nên theo (1.14) và quy nạp ta có

$$\begin{aligned} F(3n) &= u_{m+3} + h_{m-1}u_m + h_{m-2}u_{m-1} + \ldots + h_1u_2 + h_0u_1 \\ &= u_{m+3} + F(h) = u_{m+3} + F(3p) - u_{m+1} = u_{m+2} + F(3p) \\ &\leq u_{m+2} + F(4p) < u_{m+3} + F(4p) = F(4n). \end{aligned}$$

Trong trường hợp này dấu bằng không bao giờ xảy ra.

3) $\frac{2^{m+1}}{3} \leq p < 2^m$. Khi ấy $2^{m+1} \leq 3p < 3.2^m$ và $3p = 2^{m+1} + q$ với $0 \leq q < 2^m$ nên ta có biểu diễn nhị phân

$$3p = \Big(1\underbrace{0\ldots0}_{m+1}\Big)_2 + \Big(q_{m-1}q_{m-2}\ldots q_1q_0\Big)_2 = \Big(10q_{m-1}q_{m-2}\ldots q_1q_0\Big)_2.$$

Do đó

$$F(3p) = u_{m+2} + q_{m-1}u_m + q_{m-2}u_{m-1} + \ldots + q_1u_2 + q_0u_1 = u_{m+2} + F(q).$$

Vì

$$\begin{aligned} 3n &= 3(2^m + p) = 2^{m+1} + 2^m + 3p \\ &= \Big(1\underbrace{00\ldots00}_{m+1}\Big)_2 + \Big(1\underbrace{00\ldots00}_{m}\Big)_2 + \Big(10q_{m-1}q_{m-2}\ldots q_1q_0\Big)_2 \\ &= \Big(101q_{m-1}q_{m-2}\ldots q_1q_0\Big)_2, \end{aligned}$$

nên theo (1.14) và quy nạp ta có

$$\begin{aligned} F(3n) &= u_{m+3} + u_{m+1} + q_{m-1}u_m + q_{m-2}u_{m-1} + \ldots + q_1u_2 + q_0u_1 \\ &= u_{m+3} + u_{m+1} + F(q) = u_{m+3} + u_{m+1} + F(3p) - u_{m+2} \\ &< u_{m+3} + F(4p) = F(4n). \end{aligned}$$

Dấu bằng không xảy ra.

Như vậy, trong mọi trường hợp ta đều có $F(3n) \leq F(4n)$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $0 \leq p < \frac{2^m}{3}$ và p chỉ có các chữ số 1 cô lập. Lúc đó các chữ số 1 trong n cũng là cô lập.

Bây giờ ta còn phải chứng minh rằng có $u_{m+2} = F(2^{m+1})$ số nguyên dương n trong khoảng $[0; 2^m)$, với các chữ số 1 bị cô lập trong biểu diễn nhị phân của chúng.
Thật vậy, với $m = 1$ ta có hai số 0 và 1 và $u_3 = 2$; với $m = 2$ ta có ba số 0; 1 và $3 = (10)_2$ là những số với các chữ số 1 bị cô lập trong biểu diễn nhị phân và $u_4 = 3$.
Giả sử điều này đúng với mọi $k = m$. Ta chứng minh nó đúng với $k = m$. Giả sử $n < 2^m$ và $n = (a_{m-1} \dots a_0)_2$.
Khi ấy $n < 2^{m-1}$ khi và chỉ khi $a_{m-1} = 0$. Trong trường hợp này theo qui nạp ta có u_{m+1} số với các chữ số 1 cô lập.
Nếu $2^{m-1} \leq n < 2^m$ thì $a_{m-1} = 1$, do đó $a_{m-2} = 0$ và lại theo qui nạp ta có u_m số với các chữ số 1 cô lập.

Vậy trong tất cả các số trong khoảng $0 \leq n < 2^m$ có tổng cộng $u_{m+1} + u_m = u_{m+2} = F(2^{m+1})$ số với các chữ số 1 cô lập.

1.3.3 Bài tập

Bài toán 1.31. *Hàm số $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ xác định như sau*
1, $f(0,0) = 0$.
2, $f(x,y) = \begin{cases} f([\frac{x}{2}],[\frac{y}{2}]) \text{ nếu } x+y \equiv 0(\mod 2), \\ f([\frac{x}{2}],[\frac{x}{2}]) + 1 \text{ nếu } x+y \equiv 1(\mod 2), \end{cases}$
với $x, y \in \mathbb{N}$. *Chứng minh:*
a. $f(x,y) = f([\frac{x}{2}],[\frac{y}{2}]) \Leftrightarrow x$ *và* y *cùng tính chẵn lẻ.*
b. $f(x,y) = f([\frac{x}{2}],[\frac{y}{2}]) + 1 \Leftrightarrow x$ *và* y *khác tính chẵn lẻ.*
c. $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Bài toán 1.32. *Hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ xác định như sau*
a. $f(1) = 2, f(2) = 1$.
b. $f(3n) = 3f(n)$, $f(3n+1) = 3f(n) + 2$, $f(3n+2) = 3f(n) + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
Tìm số các số $n \leq 2006$ thỏa mãn $f(n) = 2n$.

Bài toán 1.33. *Hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ là số các số 1 trong khai triển*

nhị phân của n. Chứng minh rằng
a. $f(n^2) \leq \frac{1}{2}f(n)(1+f(n))$ *và đẳng thức xảy ra tại vô số điểm.*
b. Tồn tại dãy vô hạn $(u_n)_{i=1}^{+\infty}$ *sao cho*

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{f(u_k^2)}{f(u_k)} = 0.$$

Bài toán 1.34. *Hàm số f xác định trên tập hợp các số nguyên dương như sau*
a. $f(1) = 1$.
b. $3f(n)f(2n+1) = f(2n)(1+3f(n)), \forall n \in \mathbb{Z}^+$.
c. $f(2n) < 6f(n), \forall n \in \mathbb{Z}^+$.
Tìm các số $k, m \in \mathbb{Z}^+$ *sao cho* $f(m) + f(k) = 293$. *(China 1995)*

Bài toán 1.35. *Hàm số* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *thỏa mãn các điều kiện*
a. $f(3n) = 2f(n)$.
b. $f(3n+1) = f(3n) + 1, \forall n \in \mathbb{N}$.
c. $f(3n+2) = f(3n) + 2, \forall n \in \mathbb{N}$.
Tìm tất cả các giá trị của $n \in \{0, 1, \ldots, 2003\}$ *sao cho* $f(2n) = 2f(n)$.

Bài toán 1.36. *Hàm số f xác định trên tập hợp các số nguyên dương như sau*
a. $f(2n+1)^2 - f^2(2n) = 6f(n) + 1$.
b. $f(2n) \geq f(n)$.
Hỏi có bao nhiêu giá trị n mà $f(n) \geq 2003$. *(Balkan MO)*

Chương 2

Áp dụng một số tính chất của dãy số và hàm số để giải phương trình hàm.

2.1 Áp dụng một số tính chất của dãy số.

2.1.1 Số hạng tổng quát của dãy số.

2.1.1.1 Lý thuyết.

Xét phương trình hàm trên $\mathbb{Z}$ chứa dạng

$$\sum_{i\in N} a_i f^{[i]} = g(n),$$

trong đó vế phải là một đa thức biến n nguyên và vế phải là các hàm hợp của f xác định bởi

$$f^{[i+1]}(n) = f\left(f^{[i]}(n)\right).$$

Một phương pháp để giải phương trình hàm dạng này là, trước hết, phải xác định được công thức tổng quát của dãy

$$a_1 = \alpha,\ \ a_i = f^{[i]}(n).$$

Sau đó tiếp tục giải theo từng bài toán đặt ra. Sau đây là một số bài toán minh họa.

2.1.1.2 Một số bài toán minh họa.

Bài toán 2.37. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(f(n)) + f(n) = 2n + 3k,\ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.1}$$

trong đó k là số tự nhiên cho trước.

Giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Đặt $a_1 = x$ và với $n \geq 1$ ta đặt $a_{n+1} = f(a_n)$. Khi đó từ phương trình (2.1) ta được

$$2a_n + 3k = a_{n+1} + a_{n+2}. \tag{2.2}$$

Và

$$2a_{n+1} + 3k = a_{n+2} + a_{n+3}. \tag{2.3}$$

Lấy (2.3) trừ (2.3) vế theo vế ta có $a_{n+3} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$. Suy ra

$$a_n = \lambda_1 + n\lambda_2 + \lambda_3(-2)^n. \tag{2.4}$$

Nhưng từ (2.4) ta cho n lẻ ta sẽ có $a_n < 0$, vô lý. Do đó $\lambda_3 = 0$.
Hay $a_n = \lambda_1 + n\lambda_2$. Thay vào phương trình (2.2), ta được

$$\begin{aligned} &2a_n + 3k = a_{n+1} + a_{n+2} \\ \Rightarrow &2\lambda_1 + 2n\lambda_2 + 3k = \lambda_1 + (n+2)\lambda_2 + \lambda_1 + (n+3)\lambda_2. \end{aligned}$$

Từ đó $\lambda_2 = k$. Bây giờ chú ý tới

$$a_2 - a_1 = \lambda_1 + 2k - (\lambda_1 + k) = k \Leftrightarrow f(n) - n = k.$$

Vậy $f(n) = n + k$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Thử lại ta thấy $f(n) = n + k$, $\forall n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Bài toán 2.38. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(f(f(n))) + 6f(n) = 3f(f(n)) + 4n + 2007, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn điều kiện bài toán.
Đặt $f(n) = g(n) + 669$. Ta có

$$g(g(g(n))) + 6g(n) = 3g(g(n)) + 4n.$$

Xét dãy số a_k xác định bởi: $a_0 = n$ với n là số tự nhiên bất kì và $a_{k+1} = g(a_k)$.
Ta có $a_{k+3} = 3a_{k+2} - 6a_{k+1} + 4a_k$.
Do đó

$$\begin{aligned} a_k = &\Big(\frac{2n}{3} + \frac{g(g(n))}{3} - 2\frac{g(n)-n}{3\sqrt{3}}\Big) + \\ &+ \Big(\frac{n}{3} + \frac{g(g(n))}{3} - 2\frac{g(n)-n}{3\sqrt{3}}\Big)2^k\cos(\frac{k\pi}{3}) + \frac{g(n)-n}{\sqrt{3}}2^k\sin(\frac{k\pi}{3}) \\ \Leftrightarrow &a_k = u(n) + 2^k(v(n)\cos(\frac{k\pi}{3}) + w(n)\sin(\frac{k\pi}{3})). \end{aligned}$$

Từ a_k và $v(n)\cos(\frac{k\pi}{3}) + w(n)\sin(\frac{k\pi}{3})$ không nguyên với mọi k nên $v(n) = w(n) = 0$. Do đó $g(n) = n$.
Hay $f(n) = n + 669$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Thử lại, ta thấy $f(n) = n + 669$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Bài toán 2.39. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(f(n)) + f(n) = 2n + 2001 \textit{ hoặc } 2n + 2002,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

(Balkan 2002)

Giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn điều kiện bài toán.
Ta xác định dãy các số tự nhiên $(a_n)_{n\geq 0}$ như sau: a_0 là một số tự nhiên bất kì và $a_{n+1} = f(a_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Đặt $c_n = a_n - a_{n-1} - 667, \forall n \geq 1$.
Từ đó $c_{n+1} + 2c_n = a_{n+1} + a_n - 2a_{n-1} - 2001$.
Với mọi $n \geq 1, c_{n+1} + 2c_n$ là số nguyên thỏa mãn $0 \leq c_{n+1} + 2c_n \leq 1$.
Giả sử $c_1 > 0$, suy ra $c_1 \geq 1$ và $c_2 \leq -2c_1 + 1 \leq -1, c_3 \geq -2c_2 \geq 2$.
Bằng quy nạp dễ thấy rằng $c_{2k+1} \geq 2^k$.
Mặt khác $a_{2k+2} - a_{2k} - 1334 = c_{2k+2} + c_{2k+1} \leq -2^k + 1$.
Do đó với $k \geq 11$, ta có $a_{2k+2} < a_{2k}$, vô lý.
Nếu $c_1 < 0$, suy ra $c_2 \geq -2c_1 > 0$, tương tự trên ta có

$$a_{2k+3} < a_{2k+1},\ \forall k \geq 11, \text{ cũng vô lý.}$$

Vậy $c_1 = 0$, nó tương đương với $a_1 = a_0 + 667$.
Hay $f(n) = n + 667$, $n \in \mathbb{N}$.

Bài toán 2.40. *Tồn tại hay không hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn*

$$f(f(n)) + 3n = 2f(n),\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa điều kiện bài toán.
Với mỗi $i \in \mathbb{N}^*$ ta xây dựng dãy $(a_n)_{i=1}^{+\infty} : a_1 = i$, $a_{n+1} = f(a_n)$.
Khi đó

$$a_{n+1} = f(a_n) = f(f(a_{n-1})) = 2f(a_{n-1}) - 3a_{n-1} = 2a_n - 3a_{n-1}.$$

Hay $a_{n+4} + 4a_{n+1} + 3a_n = 0$, $\forall n \geq 1$.
Do $a_n > 0$, $\forall n \geq 1$ nên đẳng thức không thể xảy ra. Suy ra không tồn tại hàm hàm số f thỏa mãn điều kiện bài toán.

2.1.2 Bài tập.

Bài toán 2.41. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn*
a. $f(f(n)) = f(n) + n, \forall n \in \mathbb{N}^*$;
b. $f(1) = 2$;
c. $f(n+1) > f(n), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Bài toán 2.42. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãns*

$$f(f(f(n))) + f(f(n)) + f(n) = 3n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Bài toán 2.43. *Cho hàm số $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ là hàm số thỏa mãn điều kiện*

$$f(0) = 1;\ f(f(x)) = x + 4f(x),\ \forall x \in \mathbb{Z}.$$

Tìm mọi số nguyên $n \geq 1$ sao cho $f_n(0)$ chia hết cho 20^{11}, ở đây $f_1(x) = f(x);\ f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$.

2.1.3 Tính chất của dãy số $[\alpha n]$.

2.1.3.1 Lý thuyết.

Dãy số dạng $x_n = [n\alpha]$ có nhiều tính chất số học rất thú vị. Nếu $\alpha > 1$ thì $\{[n\alpha]\}_{n\geq 1}$ là dãy các số nguyên dương phân biệt, có sự biến thiên gần giống một cấp số cộng nhưng lại không phải là một cấp số cộng. Dãy số này đặc biệt thú vị khi α là số vô tỉ bậc 2. Ta có một kết quả quen thuộc sau đây

Định lí 2.1. *Nếu α, β là các số vô tỉ dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ thì hai dãy số $x_n = [n\alpha]$, $y_n = [n\beta]$, $n = 1, 2, 3\ldots$ lập thành một phân hoạch của tập hợp các số nguyên dương.*

Chứng minh. Xét hai dãy số $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots$ và $\beta, 2\beta, 3\beta, \ldots$ Không một số hạng nào trong các số hạng trên là số nguyên. Với mỗi số nguyên dương N, có $[\frac{N}{\alpha}]$ số hạng của dãy thứ nhất nằm bên trái N và $[\frac{N}{\beta}]$ số hạng của dãy thứ hai.
Nhưng $\frac{N}{\alpha} + \frac{N}{\beta} = N$, vì α, β là các số vô tỉ, phần lẻ của các số $\frac{N}{\alpha}$ và $\frac{N}{\beta}$ là các số dương có tổng bằng 1 (do đẳng thức trên). Suy ra có $[\frac{N}{\alpha}] + [\frac{N}{\beta}] = N - 1$ số hạng của cả hai dãy nằm bên trái N. Vì bên trái $N + 1$ có N số hạng của cả hai dãy nên giữa N và $N + 1$ có đúng một số hạng của một trong hai dãy, từ đó ta suy ra điều phải chứng minh.

Hai dãy số trên vét hết tập hợp các số nguyên dương. Điều này cho chúng ta một hướng suy nghĩ: Nếu hai dãy số vét hết tập hợp các số nguyên dương thì có khả năng chúng sẽ có dạng trên. Và nhiều bài toán đã được xây dựng theo hướng này. Sau đây là các bài toán minh họa.

2.1.3.2 Một số bài toán minh họa.

Bài toán 2.44. *Giả sử* $\{f_n\}$ *và* $\{g_n\}$ *là hai dãy số nguyên dương được xác định như sau*
a. $f_1 = 1$;
b. $g_n = na - 1 - f_n$, *trong đó a là số nguyên lớn hơn 4;*
c. f_{n+1} *là số nguyên dương nhỏ nhất khác các số* $f_1, f_2, \dots, f_n$, $g_1, g_2, \dots, g_n$.
Chứng minh rằng tồn tại các hằng số α, β *sao cho*

$$f_n = [n\alpha], g_n = [n\beta], \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Giải. Theo cách xây dựng $\{f_n\}$ và $\{g_n\}$ thì $\{f_n\}, \{g_n\}$ lập thành một phân hoạch trên $\mathbb{N}^*$.
Giả sử ta đã tìm được α, $\beta\,(\alpha < \beta)$ thỏa điều kiện bài toán. Khi đó ta phải có

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.$$

Ngoài ra, ta lại có $na - 1 = f_n + g_n = [n\alpha] + [n\beta] = n - 1$ và với n đủ lớn thì $f_n + g_n \sim n\alpha + n\beta$, suy ra $\alpha + \beta = a$. Khi đó α, β là nghiệm của phương trình $x^2 - ax + a = 0$ (vì $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 \Rightarrow \alpha\beta = a$).
Xét phương trình $x^2 - ax + a = 0$ có hai nghiệm $\alpha < \beta$. Vì $a > 4$ và α, β là các số vô tỉ. Dãy số $\{f_n\}, \{g_n\}$ xác định một cách duy nhất, do đó để chứng minh khẳng định của bài toán, ta chỉ cần chứng minh $\{[n\alpha]\}$ và $\{[n\beta]\}$ thỏa mãn các điều kiện $(a), (b), (c)$ trong bài. Thật vậy

- Ta có

$$\begin{cases} \alpha + \beta > 4 \\ \alpha + \beta = \alpha\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta > 2 \\ \alpha = 1 + \frac{1}{\beta - 1} \end{cases} \Rightarrow [\alpha] = 1 \Rightarrow f_1 = [\alpha] = 1$$

• Ta có

$$g_n = [n\beta] = [n(a-\alpha)] = [na - n\alpha] = na + [-(n\alpha)] = na - [n\alpha] - 1$$
$$= na - 1 - f_n.$$

• Ta thấy $[n\alpha] \neq [m\beta]$, $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$. Thật vậy, giả sử $[n\alpha] = [m\beta] = k$. Đặt $n\alpha = k + r$, $m\beta = k + s$, $0 < r, s < 1$. Khi đó

$$\begin{aligned} n + m &= \frac{k}{\alpha} + \frac{r}{\alpha} + \frac{k}{\beta} + \frac{s}{\beta} = k(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}) + \frac{r}{\alpha} + \frac{s}{\beta} \\ &= k + \frac{r}{\alpha} + \frac{s}{\beta} \text{ (mâu thuẫn vì } 0 < \frac{r}{\alpha} + \frac{s}{\beta} < 1). \end{aligned}$$

Vậy $[n\alpha] \neq [m\beta]$, $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$.

Tiếp theo

$$\begin{cases} f_{n+1} = [(n+1)\alpha] \geq [n\alpha] + 1; \\ g_{n+1} = [(n+1)\beta] \geq [n\beta] + 2 > [n\alpha] + 1. \end{cases}$$

Mặt khác, giả sử k là một số nguyên dương bất kỳ và $n = [\frac{k+1}{\alpha}]$.

-Nếu $n > \frac{k}{\alpha}$ thì $k < n\alpha < \alpha.\frac{(k+1)}{\alpha} = k + 1 \Rightarrow [n\alpha] = k$.

-Nếu $n < \frac{k}{\alpha}$ thì

$$\begin{cases} (k-n)\beta > k\beta - \beta.\frac{k}{\alpha} = k\beta(1 - \frac{1}{\alpha}) = k \\ (k-n)\beta < k\beta - \beta(\frac{k+1}{\alpha} - 1) = k + 1 \end{cases} \Rightarrow [(k-n)\beta] = k.$$

Suy ra mỗi số $k \in \mathbb{Z}^+$ có mặt trong dãy số đúng 1 lần và hai dãy số $\{[n\alpha]\}$ và $\{[n\beta]\}$ thỏa điều kiện (c).

Bài toán 2.45. *Hãy xác định xem có tồn tại hay không hàm số* $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ *sao cho*

$$f(1) = 2;$$
$$f(f(n)) = f(n) + n, \ \forall n \in \mathbb{N}^*;$$
$$f(n) < f(n+1), \ \forall n \in \mathbb{N}^*. \qquad (IMO1993)$$

Giải. Đặt $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{1}{\alpha} = \alpha - 1$, α là số vô tỷ.

Trả lời: Có tồn tại. Thật vậy, ta xây dựng hàm số f như sau

Với $n \geq 1$, đặt $f(n) = [n\alpha + \frac{1}{2}]$, trong đó $[x]$ là kí hiệu phần nguyên của số thực x. Ta có

$$f(1) = [\alpha + \frac{1}{2}] = 2.$$
$$f(n+1) = [(n+1)\alpha + \frac{1}{2}] > [n\alpha + \frac{1}{2}] = f(n), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Với mọi $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, đặt $m = f(n)$. Ta có

$$m < n\alpha + \frac{1}{2} < m + 1 \Rightarrow n - \frac{1}{2\alpha} < \frac{m}{\alpha} < n + \frac{1}{2\alpha}$$
$$\Rightarrow n - \frac{1}{2}(\alpha - 1) < (\alpha - 1)m < n + \frac{1}{2} \Rightarrow n - \frac{1}{2} < (\alpha - 1)m < n + \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow n + m < \alpha m + \frac{1}{2} < m + n + 1.$$

Do đó $f(m) = m + n$.
Hay $f(f(n)) = f(m) = m + n = f(n) + n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Vậy $f(n) = [n\alpha + \frac{1}{2}]$ thỏa điều kiện bài toán.

2.2 Áp dụng một số tính chất của hàm số.

2.2.1 Tính đơn điệu của hàm số.

2.2.1.1 Lý thuyết.

Tính đơn điệu của hàm số đôi khi là một công cụ khá hiệu quả để giải một số bài toán về phương trình hàm trên tập số nguyên. Sau đây là một số bài toán minh họa.

2.2.1.2 Một số bài toán minh họa.

Bài toán 2.46. *Chứng minh rằng không tồn tại hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sao cho*

$$f(f(n)) = n + 1987.$$

(IMO 1987)

Giải. Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Khi đó ta chứng minh hàm số đó tăng nghiêm ngặt trên $\mathbb{N}$. Thật vậy
-Giả sử tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $f(n+1) = f(n)$, ta được

$$f(f(n+1)) = f(f(n)) \Rightarrow n + 1 + 1987 = n + 1987$$
$$\Rightarrow 1988 = 1987 \text{ (vô lí)}.$$

Do đó $f(n+1) \neq f(n)$.
-Giả sử $f(n+1) < f(n)$, ta có
$n + 1987 = f(f(n)) \Rightarrow f(f(f(n))) = f(n) + 1987,$

hay $f(n+1987) = f(n) + 1987$.
Mà $f(n) > f(n+1) \Rightarrow f(n) \geq f(n+1) + 1$. Suy ra
$f(n) \geq f(n+1) + 1 \geq f(n+2) + 2 \geq \ldots \geq f(n+1987) + 1987$.
Từ đây, ta có $f(n+1987) - 1987 \geq f(n+1987) + 1987$ (vô lí).
Vậy $f(n+1) > f(n), \forall n \in \mathbb{N}$. Hay $f(n+1) \geq f(n) + 1$.
Ta lại có

$$f(n+1987) \geq f(n+1986) + 1 \geq \ldots \geq f(n) + 1987, \qquad (2.5)$$

ta suy ra (2.5) phải xảy ra ở tất cả các dấu bằng. Tức là

$$f(n+1) = f(n) + 1 = f(n-1) + 2 = \ldots = f(1) + (n+1) - 1$$
$$\Rightarrow f(n) = n + f(1) - 1 = n + a, \text{ với } a = f(1) - 1 \in \mathbb{N}.$$

Mà $f(f(n)) = n + 2a = n + 1987 \Rightarrow a = \frac{1987}{2} \notin \mathbb{N}$.
Vậy không tồn tại hàm số f thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Bài toán 2.47. *Tìm tất cả các hàm số tăng thực sự $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn*

$$f(n + f(n)) = 2f(n), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn điều kiện bài toán.
Do f tăng thực sự nên

$$f(n+1) \geq f(n) + 1 \Rightarrow f(n+1) - n - 1 \geq f(n) - n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Suy ra $f(n) - n$ là một hàm số tăng.
Mặt khác, đặt $a_0 = 1$, $a_{n+1} = a_n + f(a_n)$.
Khi đó $a_0 < a_1 < \ldots$, và $f(a_{n+1}) = 2f(a_n)$,
do đó $f(a_{n+1}) - a_{n+1} = f(a_n) - a_n$.
Suy ra có vô hạn bộ (m, n) sao cho $f(n) - n = f(m) - m$, nên

$$f(n) = n + k, \text{ với } k \in \mathbb{N}.$$

Bài toán 2.48. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn*
a. $f(0) = 0$, $f(1) = 1$;
b. $f(0) \leq f(1) \leq f(2) \leq \ldots$
c. $f(x^2 + y^2) = f^2(x) + f^2(y), \ \forall x, y \in \mathbb{N}^*$.

Giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn điều kiện bài toán.
Ta có $f(2) = f(1+1) = 2; f(5) = f(1^2 + 2^2) = 5$,

suy ra với $x_0 = 1$, $x_{n+1} = x_n^2 + 1$ thì $f(x_n) = x_n$.
Hiển nhiên $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. Do đó, nếu $f(m) = f(m+1)$ thì

$$\begin{aligned}&f((m+1)^2+1) = 1 + f^2(m+1) = 1 + f^2(m) = f(m^2+1)\\ \Rightarrow &f(m^2+k) = f(m^2+1),\ k = 1, \ldots, 2m+2.\end{aligned}$$

Bằng quy nạp ta có tồn tại vô hạn số m sao cho

$$f(m^2+k) = f(m^2+1),\ k = 1, \ldots, 2m+2.$$

Chọn m đủ lớn sao cho tồn tại n sao cho

$$x_n,\ x_{n+1} \in [m^2+1, m^2+2m+2].$$

Khi đó $x_n = x_{n+1}$, đó là điều vô lý. Suy ra f tăng thực sự.
Hiển nhiên ta có $f(n) = n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
Thử lại ta thấy hàm số $f(n) = n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Bài toán 2.49. *Cho hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn*

$$f(n+2) - 2f(n+1) + f(n) = f(f(n-1)).$$

Chứng minh tồn tại a và b thỏa mãn với mọi $n > a$ ta có $f(n) = b$.

Giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa điều kiện bài toán.
Ta có

$$f(n+2) - f(n+1) = f(n+1) - f(n) + f(f(n-1)) \geq f(n+1) - f(n).$$

Suy ra $f(n+1) - f(n)$ là một hàm số tăng. Khi đó tồn tại n_0 sao cho với mọi $n \geq n_0$ thì $f(n+1) - f(n) \geq 0$.
Giả sử tồn tại số n_1 sao cho $f(n_1+1) - f(n_1) \geq 1$. Do đó $f(n)$ tăng thực sự với $n > n_1$. Suy ra tồn tại $n_2 > n_1 + 2$ sao cho $f(n_2 - 1) > n_1$.
Từ đó

$$\begin{aligned}&f(n_2+2) - f(n_2+1) = f(n_2+1) - f(n_2) + f(f(n_2-1))\\ &\geq f(n_2+1) - f(n_2) + 1 \geq 2,\ (\text{vì } f(f(n_2-1)) > f(n_1) \geq 0).\end{aligned}$$

Từ $f(n+1) - f(n)$ là hàm số tăng, nó có nghĩa là $f(n) \geq 2n - c$ với một c nào đó. Suy ra, $f(n) \geq n + 4$ với n đủ lớn.
Vì thế, với n đủ lớn thì

$$\begin{aligned}f(n+2) - f(n+1) = f(n+1) - f(n) + f(f(n-1)) &\geq f(f(n-1))\\ &\geq f(n+3) > f(n+2),\ \text{vô lý}.\end{aligned}$$

Suy ra $f(n+1) = f(n) = f(a) = b$, $\forall n \geq a$. (Điều cần chứng minh).

2.2.2 Tính chất của ánh xạ.

Bài toán 2.50. *Chứng minh rằng tồn tại một và chỉ một hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ sao cho với mọi m, n nguyên dương*

$$f(m + f(n)) = n + f(m + 95). \tag{2.6}$$

Giá trị của tổng $\sum_{k=1}^{19} f(k)$ bằng bao nhiêu ? *(IMO 1995 SL)*

Giải. Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu của bài toán.
Ta chứng minh hàm số f là đơn ánh. Thật vậy, giả sử $f(n_1) = f(n_2)$, ta có

$$\begin{aligned} &f(f(n_1) + f(1)) = f(f(n_2) + f(1)) \\ \Leftrightarrow &n_1 + f(f(1) + 95) = n_2 + f(f(1) + 95) \Rightarrow n_1 = n_2. \end{aligned}$$

Vậy f là đơn ánh.
Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$\begin{aligned} f(f(n) + f(1)) &= n + f(f(1) + 95) = n + 1 + f(95 + 95) \\ &= f(95 + f(n + 1)), \\ \Rightarrow f(n + 1) + 95 &= f(n) + f(1) \Rightarrow f(n + 1) - f(n) = f(1) - 95 = a, \\ &\text{với } a = f(1) - 95. \end{aligned}$$

Khi đó $f(n) - f(n - 1) = \ldots = f(2) - f(1) = f(1) - 95 = a$,
suy ra $f(n) - 95 = na \Rightarrow f(n) = na + 95$.
Với $f(n) = na + 95$, thay vào phương trình (2.6) ta có

$$\begin{aligned} &f(m + f(n)) = n + f(m + 95) \\ &\Leftrightarrow na^2 + (m + 95)a + 95 = n + (m + 95)a + 95; \\ \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = 1 \ &(\text{vì nếu } a = -1 \text{ thì } f(n) \notin \mathbb{N}^* \text{ khi } n \geq 95). \end{aligned}$$

Vậy $f(n) = n + 95$.
Thử lại, ta thấy $f(n) = n + 95$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Và theo cách giải trên thì $f(n) = n + 95$ là hàm số duy nhất.
Khi đó

$$\sum_{k=1}^{19} f(k) = \sum_{k=1}^{19} (k + 95) = 1995.$$

Bài toán 2.51. *Xét tất cả các hàm số* $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ *thỏa mãn điều kiện*

$$f(mf(n)) = nf(m),\ \forall m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của $f(2007)$. *(CH Sec 2007)*

Giải. Gọi S là tập hợp các hàm số f thỏa điều kiện bài toán. Giả sử $f(n) \in S$, đặt $a = f(1)$.
-Chọn $m = 1$ ta được

$$f(1.f(n)) = n.f(1) = na \Rightarrow f(f(n)) = na. \tag{2.7}$$

-Chọn $n = 1$ ta được

$$f(mf(1)) = 1.f(m) \Rightarrow f(ma) = f(m). \tag{2.8}$$

Ta chứng minh $f(n)$ là đơn ánh. Thật vậy, giả sử $f(n_1) = f(n_2)$,
ta được $f(f(n_1)) = f(f(n_2)) \Rightarrow n_1 a = n_2 a \Rightarrow n_1 = n_2$.
Vậy $f(n)$ là đơn ánh.
Từ (2.8) ta có $f(na) = f(n) \Rightarrow na = n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
suy ra $a = 1$ hay $f(1) = 1$.
Ta có $f(f(m).f(n)) = n.f(f(m)) = n.am = m.n = f(m.n)$.
Suy ra

$$f(m.n) = f(m).f(n) \tag{2.9}$$

Với p là số nguyên tố bất kì, giả sử $f(p) = u.v$, với $u, v \in \mathbb{N}^*$.
Ta có $p = f(f(p)) = f(u.v) = f(u).f(v)$.
Do đó $f(u) = 1$ hoặc $f(v) = 1$.
Giả sử $f(u) = 1$, ta được $u = f(f(u)) = f(1) = 1$.
Suy ra $f(p)$ là số nguyên tố.
Khi đó $f(n)$ là hàm chuyển các số nguyên tố khác nhau thành các số nguyên tố khác nhau.
Ta lại có $2007 = 3^2.223$ và $f(2007) = f^2(3).f(223)$. Do đó để nhận được giá trị nhỏ nhất của $f(2007)$ ta phải chọn hàm $f(n)$ sao cho $f(3), f(223)$ là các số nguyên tố nhỏ nhất, khác nhau. Hiển nhiên, nếu ta chọn được hàm $\overline{f}(n)$ sao cho $\overline{f}(3) = 2, \overline{f}(2) = 3, \overline{f}(223) = 5, \overline{f}(5) = 223$ thì giá trị nhỏ nhất của $f(2007) = 2^2.5 = 20$ (vì $f(n) \geq \overline{f}(n)$).

Ta xây dựng hàm $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ như sau

$f(1)=1, f(2)=3, f(3)=2, f(5)=223, f(223)=5,$
$f(p)=p, \forall p\in P\backslash\{2;3;5;223\},$
và với $n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\dots p_m^{k_m}$ thì $f(n)=f^{k_1}(p_1)f^{k_2}(p_2)\dots f^{k_m}(p_m)$.

Khi đó $f(n)$ thỏa các điều kiện
$f(1)=1;\ f(f(n))=n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*; f(mn)=f(m).f(n),\ \forall m,n\in\mathbb{N}^*$.
Do đó $f(n)\in S$. Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(2007)=20$.

Bài toán 2.52. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ sao cho*

$$f(f(m)+f(n))=m+n,\ \forall m,n\in\mathbb{N}^*. \tag{2.10}$$

Giải. Giả sử tồn tại hàm số $f(n)$ thỏa yêu cầu bài toán.
Khi đó $f(n)$ là đơn ánh. Thật vậy, giả sử $f(n_1)=f(n_2)$. Ta có

$$f(f(n_1)+f(1))=f(f(n_2)+f(1))\Leftrightarrow n_1+1=n_2+1\Leftrightarrow n_1=n_2.$$

Vậy $f(n)$ là đơn ánh.
Từ (2.10), chọn $m=n$, ta được

$$f(2f(n))=2n \tag{2.11}$$

$$f(2f(n))=2n=(n+1)+(n-1)=f(f(n+1)+f(n-1))$$
$$\Rightarrow 2f(n)=f(n+1)+f(n-1)$$
$$\Leftrightarrow f(n+1)-f(n)=f(n)-f(n-1),\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Suy ra $f(n)-f(n-1)=\dots=f(2)-f(1)=a$. Do đó

$$f(n)-f(1)=(n-1)a\Rightarrow f(n)=(n-1)a+f(1).$$

Với $f(n)=(n-1)a+f(1)$ thay vào (2.11), ta được

$$f(2f(n))=2n\Leftrightarrow 2na^2-2a^2+(2f(1)-1)a+f(1)=2n$$
$$\Rightarrow\begin{cases}a^2=1\\-2a^2+(2f(1)-1)a+f(1)=0\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}a=1\\f(1)=1\ (\text{vì } a=-1 \text{ thì } f(1)=-1\in\mathbb{N}^*).\end{cases}$$

Do đó $f(n)=n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.
Thử lại, ta thấy $f(n)=n$ thỏa mãn điều kiện bài toán.
Vậy $f(n)=n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ là hàm số cần tìm.

2.2.2.1 Bài tập

Bài toán 2.53. *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ *sao cho*

$$f(m + f(n)) = n + f(m + 1),\ \forall m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Bài toán 2.54. *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *sao cho với mọi*

$$f(f(x) + y) = x + f(y + 2006),\ \ \forall x, y \in \mathbb{Z}.$$

Bài toán 2.55. *Xây dựng một hàm số* $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ *thỏa mãn điều kiện*

$$f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}, \forall x, y \in \mathbb{Q}^+.$$

2.2.3 Tính chất số học liên quan đến hàm số.

Việc áp dụng một số tính chất số học liên quan đến hàm số đôi khi là một công cụ rất hiệu quả đối với một số dạng toán về phương trình hàm trên tập số nguyên. Sau đây là một số bài toán minh họa.

2.2.3.1 Một số bài toán minh họa.

Bài toán 2.56. *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ *thỏa mãn*

$$x^2 + f(y) | f^2(x) + y,\ \forall x, y \in \mathbb{N}^*.$$

Giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn điều kiện bài toán.
Kí hiệu $P(x, y)$ là cách cho bộ $(x, y) \in \mathbb{N}^{*2}$ vào điều kiện bài toán đã cho được.

$$P(1, 1) \Rightarrow 1^2 + f(1) | f^2(1) + 1 \Rightarrow f(1) = 1;$$
$$P(1, y) \Rightarrow 1^2 + f(y) | f^2(1) + y \Rightarrow y \geq f(y), \forall y \in \mathbb{N}^*;$$
$$P(x, 1) \Rightarrow x^2 + f(1) | f^2(x) + 1 \Rightarrow f(x) \geq x, \forall x \in \mathbb{N}^*.$$

Từ đó ta suy ra $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{N}^*$.
Thử lại, ta thấy $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Bài toán 2.57. *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ *thỏa mãn*

a. $f(x + 22) = f(x)$;

b. $f(x^2 y) = f^2(x) f(y)$, *với mọi* $x, y \in \mathbb{N}^*$.

Giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn điều kiện bài toán.
Cho $x = y = 1$ ta được

$$f(1^2.1) = f^2(1)f(1) \Rightarrow f(1)(f(1)-1) = 0 \Rightarrow f(1) = 1.$$

Với mỗi x $(2 \le x \le 22)$ thì tồn tại $k \in \mathbb{N}^*$ sao cho $22|x(kx-1)$. Khi đó $x + 22t = kx^2$, ta có

$$f(x) = f(x+22t) = f(x^2k) = f^2(x).f(k) \Leftrightarrow f(x) = 1.$$

Vậy $f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{N}^*$.
Thử lại, ta thấy $f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Bài toán 2.58. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn rằng tồn tại một số $k \in \mathbb{N}$ và 1 số nguyên tố p sao cho $\forall n \ge k$, $f(n+p) = f(n)$ và nếu $m|n$ thì $f(m+1)|f(n)+1$.*

Giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Giả sử $n \ge k$ và p không là ước của $(n-1)$. Khi đó, tồn tại k sao cho $(n-1)|(n+kp)$. Suy ra $f(n)|f(n+kp)+1$.
Mà $f(n) = f(n+kp)$, suy ra $f(n)|1$ và $f(n) = 1$.
Với một số $n \ne 1$ bất kì, ta có

$$(n-1)|(n-1)kp \Rightarrow f(n)|f((n-1)kp)+1 = 2;$$

do đó với $n \ne 1, f(n) \in \{1, 2\}$. Lúc này, ta xét hai trường hợp
• Trường hợp 1. $f(n) = 2, \forall n \ge k$ và $p|(n-1)$.
Xác định $n \ge k$ sao cho p không là ước của $(n-1)$. Khi đó tồn tại m sao cho $(n-1)|m$ và $p|(m-1)$. Vì vậy $f(n)|f(m)+1 = 3$ và $f(n) = 1$.
Hay $f(n) = 1$. Ta xác định được hàm f như sau

$$f(n) = \begin{cases} 2, & \forall n \ge k \text{ và } p|(n-1); \\ 1, & \forall n > k \text{ và } p \text{ không là ước của } (n-1); \\ f(n+p), & \forall n < k. \end{cases}$$

•Trường hợp 2. $f(n) = 1, \forall n \ge k$ và $p|(n-1)$.
Trong trường hợp này, $f(n) = 1, \forall n \ge k$, và nếu ta giả sử $S = \{a|f(a) = 2\}$ thì sẽ không tồn tại $m, n \in S$ thỏa mãn $m-1|n$.
Ta xác định được hàm f như sau
1. $f(n) \in \{1, 2\}, \forall n \in \mathbb{N}$.
2. Với S là một tập con vô hạn của $\mathbb{N}$ sao cho không tồn tại $m, n \in S$ thỏa mãn $(m-1)|n$ và với $n > 1$, $f(n) = 2$ khi và chỉ khi $n \in S$,

$f(n) = 1$ với các $n \neq 1$ còn lại và $f(1)$ là một số bất kì xác định bởi $f(2)|f(1)+1$.

Bài toán 2.59. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn*

$$f^2(m) + f(n)|(m^2+n)^2, \ \forall m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Giải. Kí hiệu $P(m,n)$ là cách cho bộ $(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}$ vào điều kiện đã cho.

$\bullet P(1,1) \Rightarrow f(1) = 1$.

$\bullet P(1,n) \Rightarrow f(n) + 1|(n+1)^2$.

$\bullet P(m,1) \Rightarrow f^2(m) + 1|(m^2+1)^2$.

Gọi p là số nguyên tố bất kì, ta có $f(p-1)+1|p^2$.

Giả sử $f(p-1)+1 = p^2$. Khi đó $(p^2-1)^2+1|((p-1)^2+1)^2$.

Mà

$$\begin{aligned}&(p^2-1)^2+1 > (p-1)^2.(p+1)^2 > \\ &> p^2.(p-1)^2 = (p^2-p)^2 > ((p-1)^2+1)^2, \ \text{vô lý}.\end{aligned}$$

Do đó $f(p-1) = p-1$ với mọi p là số nguyên tố hay tồn tại vô số k sao cho $f(k) = k$. Với mỗi k như thế và số tự nhiên $n \neq 0$ bất kì ta có:

$$\begin{aligned}&k^2 + f(n)|(k^2+n)^2 \\ \Leftrightarrow &k^2 + f(n)|((p-1)^2+f(n))((p-1)^2+2n-f(n)) + (f(n)-n)^2.\end{aligned}$$

Khi chọn k đủ lớn ta sẽ phải có $f(n) = n$. Vậy $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Bài toán 2.60. *Cho p là một số nguyên tố lẻ. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn đồng thời*

a. $f(m) = f(n)$ *nếu* $m \equiv n(\mod p)$.

b. $f(mn) = f(m).f(n)$,

với m,n là các số nguyên.

Giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa yêu cầu bài toán.

Ta có $f(p(k+1)) = f(pk) \Leftrightarrow f(p)(f(k+1) - f(k)) = 0$.

Xét hai trường hợp

• Trường hợp 1. $f(p) \neq 0$.

Ta thấy rằng nếu $f(1) = 0$ thì $f(n) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$, vô lý. Xét riêng khi $f(1) = 1$, với mỗi $x \in \mathbb{Z}$, p không là ước của x ta có $y \in \mathbb{Z}$ sao cho

$xy \equiv 1(\mod p)$. Do đó $f(x)f(y) = f(xy) = f(1) = 1$.
Suy ra $f(n) = \pm 1$, với p không là ước của n.
Mặt khác, với mọi p không là ước của n thì $f(n^2) = f^2(n) = 1$. Do đó, nếu $m \equiv t^2(\mod p)$ và p không là ước của m thì $f(m) = 1$.
Nếu không tồn tại $i \in \mathbb{Z}$ và p không là ước của i sao cho $f(i) = -1$ thì ta có ngay $f(n) = 1, \forall n \in \mathbb{Z}$, và p không là ước của n.
Xét i không đồng dư với một số chính phương (mod p) và k cũng là một số không đồng dư với một số chính phương (mod p), p không là ước của k bất kì, suy ra $ik \equiv t^2(\mod p)$.
Ta lại có $f(k) = -f(i).f(k) = -f(ik) = -1$.
Hay ta có
$f(x) = 1$, nếu x đồng dư với một số chính phương (mod p) và p không là ước của x.
$f(x) = -1$, nếu x không đồng dư với một số chính phương (mod p).
Xét x_0 sao cho $f(x_0) = -1$. Cho $m = x_0, n = p$ vào điều kiện b, ta được $f(p) = f(px_0) = f(p)f(x_0) \Rightarrow f(p) = 1$.
Suy ra
$f(x) = 1$, nếu $x \equiv t^2(\mod p)$.
$f(x) = -1$, nếu x là số không đồng dư với 1 số chính phương $(\mod p)$.
• Trường hợp 2. $f(p) = 0$.
Suy ra $f(n) = 0, \forall p|n$.
Nếu $f(1) = 0$ thì $f(n) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$..
Nếu $f(1) \neq 0$, giả sử tồn tại x_0 sao cho $f(x_0) = 0$ và p không là ước của x_0. Suy ra $f(nx_0) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$.
Mà ta có dãy $x_0, 2x_0, \ldots, (p-1)x_0$ là dãy thặng dư đầy đủ $\mod p$.
Suy ra $f(1) = 0$, vô lý. Vậy $f(n) = 0 \Leftrightarrow p|n$.
Tương tự như trên ta cũng có rằng, $f(n) = \pm 1, f(0) = 1$, vô lý. Do đó $f(x) = 0 \Leftrightarrow p|x$ và $f(x) = 1$ với các x còn lại.
Vậy có bốn hàm số sau thỏa mãn điều kiện bài toán
1. $f(n) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$.
2. $f(n) = 1, \forall n \in \mathbb{Z}$.
3. $f(n) = 0$ nếu $p|n$, $f(n) = 1$ trong trường hợp còn lại.
4. $f(n) = 1$ nếu $n \equiv t^2(\mod p)$, $f(n) = -1$ trong trường hợp còn lại.

Bài toán 2.61. *Tìm tất cả các số nguyên không âm n nhỏ nhất sao* *cho tồn tại hàm số* $f : \mathbb{Z} \to [0, +\infty)$ *khác hằng số thỏa mãn*

a. $f(xy) = f(x).f(y)$;

b. $2.f(x^2 + y^2) - f(x) - f(y) \in \{0, 1, \ldots, n\}$,

với mọi số nguyên x, y.

Với số n tìm được, tìm mọi hàm số thỏa mãn.

Giải. Với $n = 1$, ta có ngay một hàm số thỏa mãn: Với p là một số nguyên tố dạng $4k + 3$, hàm f được xác định như sau

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } p|x; \\ 1 & \text{trong các trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Hiển nhiên hàm số trên thỏa mãn điều kiện bài toán.

Bây giờ ta giả sử rằng với $n = 0$ thì cũng tồn tại hàm số thỏa mãn. Từ đó

$$2f(x^2 + y^2) = f(x) + f(y). \tag{2.12}$$

Từ điều kiện (a), cho $x = y = 0$ ta được $f(0) = f^2(0)$.

Có hai khả năng sau

$\star$ Khả năng 1. $f(0) = 1$.

Cho $y = 0$ vào (2.12), ta được

$$2f(x^2) = f(x) + 1 \Rightarrow 2f^2(x) = f(x) + 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 1; \\ f(x) = -\dfrac{1}{2} \notin [0, +\infty). \end{array}\right.$$

Suy ra $f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{Z}$, trái với giả thiết.

$\star$Khả năng 2. $f(0) = 0$.Tương tự ta cũng suy ra điều mâu thuẫn.

Vậy $n \geq 1$. Để trọn vẹn bài toán, ta giải bài sau

Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Z} \to [0; \infty)$ *sao cho*

a. $f(xy) = f(x).f(y)$;

b. $2f(x^2 + y^2) - f(x) - f(y) \in \{0, 1\}$.

Giải. Dễ dàng chứng minh các nhận xét sau

$$f(0) = 0 \text{ và } f(1) = 1.$$

Kí hiệu $P_a(x, y), P_b(x, y)$ lần lượt là cách cho bộ $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ và điều kiện (a), (b).

$\bullet P_a(x,x) \Rightarrow f^2(x) = f(x^2)$.

$\bullet P_b(x,0) \Rightarrow 2f^2(x) - f(x) \in \{0,1\}$. Từ đó ta có $f(x) \in \{0,1\}$.

$\bullet P_a(-1,-1) \Rightarrow f(-1) = 1$.

$\bullet P_a(-1,-x) \Rightarrow f(-x) = f(x)$.

Do f không là hằng số nên tồn tại p nguyên tố sao cho $f(p) = 0$. Giả sử cũng tồn tại $q \neq p, q$ nguyên tố và $f(q) = 0$.

$\bullet P_b(p,q) \Rightarrow f(p^2+q^2) = 0$. Với mỗi $a, b \in \mathbb{Z}$ ta luôn có

$$2f(a^2+b^2).f(p^2+q^2) = 2f((qp+bq)^2 + (aq-bp)^2) = 0.$$

Do $0 \leq f(x) + f(y) \leq 2f(x^2+y^2)$ nên $f(aq-bp) = 0$.

Vì $(p,q) = 1$ nên $a, b \in \mathbb{Z}$ sao cho $aq - bp = 1$, hay

$$1 = f(1) = f(aq-bp) = 0, \text{ điều này vô lý.}$$

Suy ra tồn tại duy nhất 1 số nguyên tố p thỏa mãn $f(p) = 0$.

Nếu p có dạng $4k+1$ thì tồn tại $a \in \mathbb{Z}$ sao cho $p|a^2+1$ hay $f(a^2+1) = 0$.
Mặt khác

$\bullet P_b(1,a) \Rightarrow f(a^2+1) = 1$, vô lý. Vậy p có dạng $4k+3$. Từ đó dễ thấy $f(x) = 0 \Leftrightarrow p|x$ và $f(x) = 1$ với các x còn lại. Hay ta có duy nhất hàm số thỏa mãn là

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } p|x; \\ 1 & \text{trong các trường hợp còn lại,} \end{cases}$$

với p là số nguyên tố dạng $4k+3$.

Sau đây là một ví dụ mang sắc màu bậc của phần tử.

Bài toán 2.62. *Cho $f, g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ là hai hàm số thỏa mãn*

i. g là toàn ánh.

ii. $2f^2(n) = n^2 + g^2(n)$ với mọi số nguyên dương n.

Nếu $|f(n) - n| \leq 2004\sqrt{n}$ với mọi n thì f có vô số điểm bất động.

Giải. Theo nguyên lý Dirichlet về số nguyên tố thì dãy số (p_i) với p_i là các số nguyên tố dạng $8k+3$ là một dãy vô hạn. Từ đó với mọi n thì

$$\left(\frac{2}{p_n}\right) = (-1)^{\frac{p_n^2-1}{8}} = -1.$$

Ở đây, $\left(\frac{2}{p_n}\right)$ là kí hiệu **Legendre**.

Sử dụng điều kiện (i), ta tìm được dãy $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sao cho $g(x_n) = p_n, \forall n$.

Ta có

$2f^2(x_n) = x_n^2 + p_n^2, \Rightarrow 2f^2(x_n) \equiv x_n^2(\mod p_n)$.

Vì $\left(\frac{2}{p_n}\right) = -1$ nên

$$\begin{cases} p_n | f(x_n) \\ p_n | x_n. \end{cases}$$

Suy ra tồn tại hai dãy số nguyên dương (a_n) và (b_n) sao cho

$$\begin{cases} x_n = a_n . p_n \\ f(x_n) = b_n . p_n \end{cases}$$

Từ (ii), ta được $2b_n^2 = a_n^2 + 1$.

Cuối cùng, sử dụng giả thiết $|f(n) - n| \leq 2004\sqrt{n}$, ta có

$$\frac{2004}{\sqrt{x_n}} \geq \left|\frac{f(x_n)}{x_n} - 1\right| = \left|\frac{b_n}{a_n} - 1\right| \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{a_n^2+1}}{a_n} = \sqrt{2}$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

Suy ra tồn tại N_0 sao cho $a_n = b_n = 1, \forall n \geq N_0$.

Vậy $f(p_n) = p_n, \forall n \geq N_0$ (Điều phải chứng minh).

Sau đây là một ví dụ mang đậm màu sắc số học từ đề bài cho đến lời giải.

Bài toán 2.63. *Tìm tất cả các toàn ánh $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sao cho với mọi $m, n \in \mathbb{N}$ thì*

$$f(m)|f(n) \Leftrightarrow m|n.$$

Giải. Kí hiệu $P \subset \mathbb{N}$ là tập tất cả các số nguyên tố .

Xét đơn ánh $g : P \to P$.

Nếu $n = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$ thì $f(n) = \prod_{i=1}^k g^{\alpha_i}(p_i)$.

Kí hiệu $\tau(n)$ là ước số nguyên dương của n. Ta có nhận xét sau

$$\tau(n) = f(\tau(n))$$

(do f là toàn ánh). Với mỗi số nguyên tố p, $f(p)$ chỉ có đúng 2 ước số nguyên tố nên nó cũng là số nguyên tố. Xác định g như trên, từ đó ta có $f(p) = g(p)$. Ta sẽ chứng minh g là song ánh. Thật vậy, do f là toàn ánh nên g là toàn ánh. Vì vậy g là song ánh.

Tiếp theo ta chứng minh bằng quy nạp rằng $f(p^k) = g^k(p)$ với k là số

nguyên dương.
$\bullet k = 1$: Hiển nhiên.
$\bullet$ Giả sử $k-1$ đúng. Ta có $f(p^k)$ chia hết cho $1, g(p), g^2(p), \ldots, g^{k-1}(p)$ và ngoài ra không chia hết cho số nguyên dương nào khác.
Do đó $\tau(f(p^k)) = \tau(p^k) = k+1$.
Nếu $k > 1$, khi $f(p^k)$ có thêm 1 ước nguyên tố nữa thì
$\tau(f(p^k)) \geq 2k > k+1$, vô lý. Từ đó $f(p^k)$ là lũy thừa của $g(p)$ và nó có $k+1$ ước nên $f(p^k) = g^k(p)$.
Giả sử n là một số nguyên dương, p là 1 số nguyên tố không chia hết n. ta sẽ chứng minh $f(n)f(p^k) = f(np^k), \forall k \in \mathbb{Z}$.
Từ $(n, p^k) = 1$ ta có $\tau(n).\tau(p^k) = \tau(n.p^k)$.
Mặt khác ta lại có $g^k(p)|f(n.p^k)$ và $g(p)f(n)$. Do vậy, mọi ước của $f(n)$ và $g^k(p)$ chia hết $f(np^k)$ và mọi ước của $g^k(p)$ và $f(n)$ là ước của $f(n.p^k)$.
Ta lại có $\tau(f(n).f(p^k)) = \tau(n.p^k) = \tau(f(n.p^k))$.
Nếu $f(np^k)$ có ước khác với các ước của $f(n)$ và $g^k(p)$ thì

$\tau(f(n).f(p^k)) > \tau(f(n.p^k))$, vô lý.

Vậy $f(np^k) = f(n).g^k(p) = f(np^k)$.
Từ các nhận xét trên ta có hàm f được xây dựng như trên là duy nhất.

Bài toán 2.64. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn*

a. Nếu $a|b$ thì $f(a) \geq f(b)$.

b. $f(ab) + f(a^2+b^2) = f(a) + f(b)$,

với mọi a, b là các số tự nhiên.

Giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn điều kiện bài toán.
Khi đó $f(x)$ là một nghiệm hàm thì $f(x) + c$ (với c là một hằng số) cũng là một nghiệm hàm. Do đó ta có thể giả sử rằng $f(1) = 0$. Chú ý rằng từ $1|n, f(n) \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.
1. Từ

$$f(1 \times 1) + f(1+1) = f(1) + f(1) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(2) = f(1); \\ f(2) = 0. \end{array}\right.$$

2. Gọi n là số nguyên sao cho $u^2 \equiv -1 (\mod n)$. Do đó tồn tại a thỏa mãn $a^2 = -1 + kn$. Suy ra

$f(a) + f(a^2+1) = f(a) + f(1) \Leftrightarrow f(a^2+1) = f(kn) = f(1) = 0.$
Nhưng $f(n) \geq f(kn) = f(a^2+1)$ và $f(n) \leq f(1)$ nên $f(n) = f(1) = 0$.
Do đó, nếu tồn tại u sao cho $u^2 = -1(\mod n)$ thì $f(n) = 0$.
3. Từ (2) dễ thấy $f(p) = 0$ với mọi p nguyên tố và $p = 1(\mod 4)$.
4. Giả sử $f(a) = f(b) = 0$ và $f(ab) < f(a) = f(b) = 0$ thì

$f(a^2+b^2) > 0$, vô lý. Do đó, nếu $f(a) = f(b) = 0$ thì $f(ab) = 0$.
5. Gọi a, b là 2 số nguyên thỏa mãn ƯCLN$(a, b) = 1$. Khi đó, gọi p là một số chia hết a^2+b^2. Ta có $a^2+b^2 = 0(\mod p)$.
Ta có bổ đề quen thuộc: *"Nếu p là một số nguyên tố dạng $4k+3$ thì với mọi bộ a, b thỏa mãn $p|a^2+b^2$ ta sẽ có $p|a$ và $p|b$."*
Vì ƯCLN$(a, b) = 1$ nên nếu $p|a^2+b^2$ thì p chỉ có dạng $4k+1$. Từ (4) ta có a^2+b^2 là tích các số nguyên tố p_i thỏa mãn $f(p_i) = 0$ nên $f(a^2+b^2) = 0$. Từ $f(ab) + f(a^2+b^2) = f(a) + f(b)$,
ta có ƯCLN$(a, b) = 1 \Rightarrow f(ab) = f(a) + f(b)$.
6. Cho $a = bc$ vào phương trình đã cho, ta được

$$f(b^2c) + f(b^2(c^2+1)) = f(bc) + f(b).$$

Nhưng $f(b) \geq f(b^2(c^2+1))$ và $f(bc) \geq f(b^2c)$. Do đó $f(b^2c) = f(bc)$.
Chọn $c = 1, f(b^2) = f(b)$.
Tiếp theo ta chọn $c = b$, ta được $f(b^3) = f(b^2)$.
Bằng quy nạp ta có $f(b^k) = f(b), \forall k \geq 1$.
7. Sử dụng (5), (6) ta có $f(\prod p_i^{n_i}) = \sum f(p_i)$, ở đây p_i là các số nguyên tố.
Xét hàm số $f(x)$ xác định bởi
•$f(1) = f(2) = 0$;
•$f(p) = 0$, với các số nguyên tố p sao cho $p = 1(\mod 4)$.
•$f(p) = a_p \leq 0$ với mọi số nguyên tố p còn lại (ở đây a_p là các số nguyên không dương.)
•$f(\prod p_i^{n_i}) = \sum f(p_i)$, với p_i là các số nguyên tố.
Ta có thể chứng minh $f(x)$ thỏa mãn các điều kiện:
+) Hiển nhiên, nếu $a|b$ thì $f(a) \geq f(b)$.
+) $f(1 \times 1) + f(1^2+1^2) = f(1) + f(1) = 0$.
+) $f(a \times 1) + f(a^2+1) = f(a) + f(1)$, ta có mọi ước nguyên tố p của a^2+1 đều thỏa mãn $p = 1(\mod 4)$.
Với 2 số nguyên $a, b > 1$ bất kì, gọi:

+) p_i là các ước nguyên tố của a không chia hết b.
+) q_i là các ước nguyên tố của b không chia hết cho a.
+) r_i là các ước nguyên tố của a và b.
Ta có

$$f(a) = \sum f(p_i) + \sum f(r_i).$$
$$f(b) = \sum f(q_i) + \sum f(r_i).$$
$$f(ab) = \sum f(p_i) + \sum f(q_i) + \sum f(r_i).$$
$$f(a^2+b^2) = \sum f(r_i) + \sum f(s_i),$$

ở đây s_i là các ước nguyên tố của

$$A = \Big(\frac{a}{\text{ƯCLN}(a,b)}\Big)^2 + \Big(\frac{b}{\text{ƯCLN}(a,b)}\Big)^2.$$

Tương tự (5), ta có các ước nguyên tố của A là các số nguyên tố thỏa $s_i = 1(\mod 4)$ và do đó $f(A) = 0$.
Suy ra $f(a^2+b^2) = \sum f(r_i)$. Hay $f(ab) + f(a^2+b^2) = f(a) + f(b)$.
Và ta có nghiệm của phương trình hàm là:
Cho M là một số nguyên, hàm f được xác định như sau:
•$f(1) = f(2) = M$.
•$f(p) = M$, với mọi số nguyên tố p thỏa mãn $p = 1(\mod 4)$.
•$f(p) = M + a_p$, với mọi số nguyên tố p còn lại (ở đây a_p là các số nguyên không dương).
•$f(\prod p_i^{n_i}) = M + \sum(f(p_i) - M)$, với p_i là các số nguyên tố.

2.2.3.2 Bài tập.

Bài toán 2.65. *Cho hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ là một song ánh. Chứng minh 2 điều kiện sau là tương đương*

i. $f(m.n) = f(m).f(n)$.

ii. $f(m)|f(n) \Leftrightarrow m|n$.

Bài toán 2.66. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn*

a. $f(x+22) = f(x)$;

b. $f(x^2y) = f^2(x).f(y)$,

với mọi $x, y \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 2.67. *Cho* $A = \{1; 2; \ldots; 17\}$ *và hàm số* $f : A \to A$. *Xác định* $f^{[1]}(x) = f(x)$ *và* $f^{[k+1]}(x) = f(f^{[k]}(x))$ *với* $k \in \mathbb{N}$. *Tìm số tự nhiên lớn nhất* M *sao cho tồn tại đơn ánh* $f : A \to A$ *thỏa mãn các điều kiện sau:*
1. Nếu $m < M$ *và* $1 \le i \le 16$ *thì*

$$f^{[m]}(i+1) - f^{[m]}(i) \not\equiv \pm 1 (\mod 17).$$

2. Với $1 \le i \le 16$ *thì*

$$f^{[M]}(i+1) - f^{[M]}(i) \equiv \pm 1 (\mod 17).$$

Bài toán 2.68. *Với mỗi số nguyên dương k tồn tại hay không hàm số* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ *thỏa mãn*

a. $f(1995) = 1996$;

b. $f(xy) = f(x) + f(y) + kf(\text{ƯCLN}(x, y)), \forall x, y \in \mathbb{N}$.

Bài toán 2.69. *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *thỏa mãn*

a. $f(m) = 1 \Leftrightarrow m = 1$;

b. Nếu $d = \text{ƯCLN}(m, n)$ *thì* $f(mn) = \frac{f(m)f(n)}{d}$.

c. Với mọi $m \in \mathbb{N}$, *ta có* $f^{2000}(m) = m$.

Bài toán 2.70. *Cho hàm số* $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{N}$ *và thỏa mãn điều kiện*

a. $f(0) = 0, f(1) = 1$;

b. $f(n+2) = 23.f(n+1) + f(n),\ \ n = 0, 1, \ldots$.

Chứng minh rằng với mọi $m \in \mathbb{N}$, *tồn tại số* $d \in \mathbb{N}$ *sao cho*

$$m | f(f(n)) \Leftrightarrow d | n.$$

Bài toán 2.71. *Cho hàm số* $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ *thỏa mãn*

1. $f(1) = a$;

2. $f(n^2 f(m)) = mf^2(n)$.

Chứng minh rằng

a. $f(m).f(n) = af(mn)$.

b. $a | f(n),\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Bài toán 2.72. *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *thỏa mãn*

$$f(x + y + f(y)) = f(x) + 2y,\ \forall x, y \in \mathbb{Z}.$$

Bài toán 2.73. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ thỏa mãn*

$$ƯCLN(f(m),f(n))=1 \Leftrightarrow ƯCLN(m,n)=1.$$

Bài toán 2.74. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ thỏa mãn*

a. $f(f(n))+f(n+1)=2n+3$;

b. $f(n)\geq n-1,\ \forall n\in\mathbb{Z}$.

Bài toán 2.75. *Cho hàm số $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ thỏa mãn các điều kiện*

1. $f(p)=1$*, với mọi số nguyên tố* p.

2. $f(ab)=a.f(b)+b.f(a),\ \forall a,b\in\mathbb{Z}$.

Chứng minh rằng

a. Tồn tại duy nhất một hàm số f.

b. Tìm n sao cho $f(n)=n$.

Bài toán 2.76. *Cho g(n) là hàm số xác định bởi*

$$g(1)=0, g(2)=1,$$

và

$$g(n+2)=g(n)+g(n+1)+1, \forall n\geq 1.$$

Chứng minh rằng:

Nếu $n>5$ là số nguyên tố thì n chia hết $g(n).(g(n)+1)$.

Bài toán 2.77. *Cho đa thức $P(x)\in\mathbb{Z}[x]$,*
$P(x)=a_0+\ldots+a_{p-1}x^{p-1}$ *và số nguyên tố $p>2$ thỏa mãn:*
Nếu p không chia hết (a-b) thì p không chia hết P(a)-P(b).
Chứng minh rằng $p|a_{p-1}$.

Bài toán 2.78. *Cho hàm số $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ và f không là một đa thức. Giả sử với mọi $a,b,m\in\mathbb{Z}, a\equiv b(\mod m)$ thì ta có $f(a)\equiv f(b)(\mod m)$. Chứng minh với các số nguyên dương k ta có*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|f(n)|}{n^k}=+\infty.$$

Bài toán 2.79. *Cho hàm số $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ xác định bởi*

a. $f(0)=2$;

b. $f(1)=503$;

c. $f(n+2) = 503f(n+1) - 1996f(n)$.

Với $k \in \mathbb{N}$, *chọn các số nguyên* $s_1, s_2, \ldots, s_k$ *không bé hơn* k *và cho* p_i *là ước nguyên tố của* $f(2^{s_i})$. *Chứng minh rằng*

$$\sum p_i | 2^t \Leftrightarrow k | 2^t.$$

Bài toán 2.80. *Cho số nguyên* m *và dãy số* $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *xác định bởi* $a_0 = a \in \mathbb{N}$ *và*

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}, & \text{nếu } a_n \equiv 0(\mod 2),\\ a_n + m, & \text{trong các trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Tìm mọi giá trị của a *sao cho* a_n *là dãy tuần hoàn.*

Chương 3

Áp dụng lý thuyết phương trình sai phân để giải phương trình hàm.

3.1 Một số phép chuyển đổi dãy số.

3.1.1 Dãy số chuyển đổi các phép tính số học.

Khi gặp phương trình dãy với cặp chỉ số tự do, với các thay thế chỉ số ta sẽ đưa các phương trình dãy về các phương trình sai phân quen biết. Việc thay thế như vậy không phải khi nào cũng thu được phương trình dãy tương đương với phương trình ban đầu. Vì vậy trong trường hợp tổng quát, nghiệm tìm được phải thử lại.

Bài toán 3.81. *Xác định số hạng tổng quát của dãy* $\{x_n\}$*, khi biết* $x_1 = a$ *và*

$$x_{m+n} = x_m + x_n + mn,\ \forall m, n \in \mathbb{N}^*. \tag{3.1}$$

Giải. Giả sử tồn tại dãy số $\{x_n\}$ thỏa mãn điều kiện bài toán. Từ phương trình (3.1) ta được $x_{n+1} = x_n + x_1 + n$, suy ra

$$\begin{cases} x_{n+1} - x_n = a + n \\ x_1 = a. \end{cases} \tag{3.2}$$

Phương trình $x_{n+1} - x_n = a + n$ là một phương trình sai phân tuyến tính không thuần nhất, cấp một. Vì phương trình đặc trưng có nghiệm $\lambda = 1$ nên ta có nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $x_{n+1} - x_n = 0$ là

$$\widehat{x}_n = c. \tag{3.3}$$

Nghiệm riêng của (3.2) có dạng $x_n^* = n(dn + e)$.
Thay x_n^* vào (3.2), ta được

$$(n+1)[d(n+1)+e] - n(dn+e) = a+n$$
$$\Leftrightarrow 2dn + d + e = a + n \Rightarrow \begin{cases} d = \frac{1}{2} \\ e = a - \frac{1}{2}; \end{cases}$$

suy ra

$$x_n^* = \frac{1}{2}n^2 + \Big(a - \frac{1}{2}\Big)n. \tag{3.4}$$

Vì $x_n = \widehat{x}_n + x_n^*$ nên từ (3.3) và (3.4) ta có nghiệm phương trình (3.2) là

$$x_n = c + \frac{1}{2}n^2 + \Big(a - \frac{1}{2}\Big)n. \tag{3.5}$$

Vì $x_1 = a$ nên từ (3.5) ta có $c = 0$. Thay $c = 0$ vào (3.5) ta được nghiệm của (3.2) là $x_n = \frac{1}{2}n^2 + \Big(a - \frac{1}{2}\Big)n$.
Thử lại, ta thấy nghiệm $x_n = \frac{1}{2}n^2 + \Big(a - \frac{1}{2}\Big)n$ thỏa điều kiện bài toán.

Bài toán 3.82. *Tồn tại hay không một dãy số $\{x_n\}$ thỏa mãn điều kiện*

$$x_{m+n} = x_m + x_n + m + n, \ \forall m, n \in \mathbb{N}^*. \tag{3.6}$$

Giải. Giả sử tồn tại dãy số $\{x_n\}$ thỏa mãn điều kiện bài toán. Từ phương trình (3.6) ta được $x_{n+1} = x_n + x_1 + n + 1$, suy ra

$$x_{n+1} - x_n = a + n \text{ với } a = x_1 + 1. \tag{3.7}$$

Phương trình $x_{n+1} - x_n = a + n$ là một phương trình sai phân tuyến tính không thuần nhất, cấp một. Vì phương trình đặc trưng có nghiệm $\lambda = 1$ nên ta có nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $x_{n+1} - x_n = 0$ là

$$\widehat{x}_n = c. \tag{3.8}$$

Nghiệm riêng của (3.7) có dạng $x_n^* = n(dn + e)$.
Thay x_n^* vào (3.7), ta được

$$(n+1)[d(n+1)+e] - n(dn+e) = a+n$$
$$\Leftrightarrow 2dn + d + e = a + n \Rightarrow \begin{cases} d = \frac{1}{2} \\ e = a - \frac{1}{2}; \end{cases}$$

suy ra

$$x_n^* = \frac{1}{2}n^2 + \Big(a - \frac{1}{2}\Big)n. \tag{3.9}$$

Vì $x_n = \widehat{x}_n + x_n^*$ nên từ (3.8) và (3.9) ta có nghiệm phương trình (3.7) là

$$x_n = c + \frac{1}{2}n^2 + \Big(a - \frac{1}{2}\Big)n. \tag{3.10}$$

Vì $x_1 = a - 1$ nên từ (3.10) ta có $c = 1$. Thay $c = 1$ vào (3.10) ta được nghiệm của (3.7) là $x_n = \frac{1}{2}n^2 + \Big(a - \frac{1}{2}\Big)n + 1$.

Thử lại, ta thấy nghiệm $x_n = \frac{1}{2}n^2 + \Big(a - \frac{1}{2}\Big)n + 1$ không thỏa điều kiện bài toán. Do đó không tồn tại dãy số thỏa mãn

$$x_{m+n} = x_m + x_n + m + n,\ \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Bài toán 3.83. *Xác định dãy các số dương $\{x_n\}$ thỏa mãn điều kiện*

$$x_{mn} = x_m x_n,\ \forall m, n \in \mathbb{N}^*. \tag{3.11}$$

Giải. Giả sử tồn tại dãy số $\{x_n\}$ thỏa mãn điều kiện bài toán.
Ta có $x_{1.n} = x_1 x_n \Rightarrow x_1 = 1$.
Ta nhận xét rằng: Nếu $n = p^k$ với p là số nguyên tố thì $x_n = x_p^k = (x_p)^k$.
Ta chứng minh nhận xét trên bằng quy nạp.
Với $k = 1$ ta có $x_n = x_{p^1} = (x_p)^1$.
Giả sử nhận xét đúng với $k = q$ $(q \geq 1)$. Khi đó, với $n = p^{k+1}$, ta có

$$x_n = x_{p^{k+1}} = x_{p^k} x_p = (x_p)^k x_p = (x_p)^{k+1}.$$

Do đó với $n = p^k$ thì $x_n = x_p^k = (x_p)^k$.
Từ đây suy ra, nếu $n = p_1^{m_1} \ldots p_s^{m_s}$ thì $x_n = (x_{p_1})^{m_1} \ldots (x_{p_s})^{m_s}$.
Vậy x_p có thể nhận giá trị tùy ý khi p là một số nguyên tố.
Do vậy, ta kết luận như sau: x_p có thể nhận giá trị tùy ý khi p là một số nguyên tố và $x_n = (x_{p_1})^{m_1} \ldots (x_{p_s})^{m_s}$ khi $n = p_1^{m_1} \ldots p_s^{m_s}$.

Bài toán 3.84. *Xác định dãy $\{x_n\}$ thỏa mãn điều kiện*

$$x_{n+m} + x_{n-m} = x_{3n},\ \forall m, n \in \mathbb{N}^*, n \geq m. \tag{3.12}$$

Giải. Giả sử tồn tại dãy số $\{x_n\}$ thỏa mãn điều kiện bài toán.
Cho $m = 0$, ta có $2x_n = x_{3n}$. Suy ra $x_0 = 0$.
Đặt $m = n$, ta được $x_{2n} = x_{3n}$.
Từ đây suy ra $x_{4m} = x_{6m} = x_{9m}$ và $x_{4m} + x_{6m} = x_{9m}$.
Do đó ta suy ra $x_n = \frac{1}{3}x_{3n} = \frac{1}{2}x_{2n} = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

3.1.2 Dãy số chuyển đổi các đại lượng trung bình

3.1.2.1 Phép chuyển các đại lượng trung bình cộng

Bài toán 3.85. *Xác định dãy số $\{u_n\}$ thỏa mãn điều kiện sau*

$$u\Big(\frac{m+n}{2}\Big) = \frac{u(m)+u(n)}{2},\ \forall m, n, \frac{m+n}{2} \in \mathbb{N}^*. \tag{3.13}$$

Giải. Giả sử tồn tại dãy số $\{u(n)\}$ thỏa mãn điều kiện bài toán. Đặt $u(1) = \alpha, u(2) = \beta$. Ta có

$$u(2) = u\Big(\tfrac{3+1}{2}\Big) = \tfrac{u(3)+u(1)}{2}, \Rightarrow u(3) = 2u(2) - u(1) = 2\beta - \alpha.$$

$$u(3) = u\Big(\tfrac{4+2}{2}\Big) = \tfrac{u(4)+u(2)}{2}, \Rightarrow u(4) = 2u(3) - u(2) = 3\beta - 2\alpha.$$

Từ đây ta dự đoán rằng

$$u(n) = (n-1)\beta - (n-2)\alpha,\ \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{3.14}$$

Thật vây, (3.14) đúng với $n = 1, 2, 3, 4$.
Giả sử (3.14) đúng với $n = k$ $(k \geq 4)$. Ta chứng minh (3.14) đúng với $n = k + 1$. Thật vậy, ta có

$$u(k) = u\Big(\frac{(k+1)+(k-1)}{2}\Big) = \frac{u(k+1)+u(k-1)}{2}$$
$$\Rightarrow u(k+1) = 2u(k) - u(k-1)$$
$$= 2((k-1)\beta - (k-2)\alpha) - ((k-2)\beta - (k-3)\alpha) = k\beta - (k-1)\alpha.$$

Do đó (3.14) đúng với $n = k + 1$.
Vậy $u(n) = (n-1)\beta - (n-2)\alpha,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Suy ra

$$\begin{cases} u(n) = (n-1)\beta - (n-2)\alpha,\ \forall n \in \mathbb{N}^*. \\ u(1) = \alpha, u(2) = \beta. \end{cases}$$

Đặt $\alpha = a + b$, $\beta = 2a + b$ thì $a = \beta - \alpha$ và $b = 2\alpha - \beta$. Vậy nên nghiệm của phương trình (3.13) là

$$u(n) = an + b,\ \text{với } a, b \text{ tùy ý.}$$

3.1.2.2 Phép chuyển đại lượng trung bình cộng sang trung bình điều hòa.

Bài toán 3.86. *Xác định dãy số $\{u(n)\}$ thỏa mãn điều kiện sau*

$$u\Big(\frac{m+n}{2}\Big) = \frac{2u(m)u(n)}{u(m)+u(n)},\ \forall m, n, \frac{m+n}{2} \in \mathbb{N}^*. \tag{3.15}$$

Giải. Giả sử tồn tại dãy số $\{u(n)\}$ thỏa mãn điều kiện bài toán. Ta có

$$u\Big(\frac{m+n}{2}\Big)=\frac{2u(m)u(n)}{u(m)+u(n)}\Leftrightarrow u\Big(\frac{m+n}{2}\Big)=\frac{2}{\frac{1}{u(m)}+\frac{1}{u(n)}}. \qquad (3.16)$$

Đặt $v(n)=\frac{1}{u(n)}$, thì phương trình (3.16) trở thành

$$v\Big(\frac{m+n}{2}\Big)=\frac{v(m)+v(n)}{2}. \qquad (3.17)$$

Theo bài toán 3.85, $v(n)=an+b$ với $a,b\geq 0, a+b>0$. Vậy nghiệm phương trình (3.15) là

$$u(n)=\frac{1}{an+b},\ a,b\geq 0,\ a+b>0.$$

3.1.2.3 Phép chuyển đại lượng trung bình cộng sang trung bình nhân.

Bài toán 3.87. *Xác định dãy số $\{u(n)\}$ thỏa mãn điều kiện sau*

$$u\Big(\frac{m+n}{2}\Big)=\sqrt{u(m)u(n)},\ \forall m,n,\frac{m+n}{2}\in\mathbb{N}^*. \qquad (3.18)$$

Giải. Giả sử tồn tại dãy số $\{u(n)\}$ thỏa mãn điều kiện bài toán. Ta có

$$u(n)=u\Big(\tfrac{n+n}{2}\Big)=\sqrt{u(n)u(n)}=\sqrt{|u(n)|^2}=|u(n)|\geq 0.$$

Đặt $u(1)=\alpha,\ u(2)=\beta\ (\alpha\geq 0,\beta\geq 0)$.

a. Nếu $\alpha=0$ thì

$$u(n)=u\Big(\tfrac{1+2n-1}{2}\Big)=\sqrt{u(1)u(2n-1)}=0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Vậy $u(n)\equiv 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình (3.18).

b. Nếu $\alpha>0,\ \beta=0$ thì

$$u(n)=u\Big(\tfrac{2+2n-2}{2}\Big)=\sqrt{u(2)u(2n-2)}=0,\ \forall n\geq 2, n\in\mathbb{N}^*.$$

Suy ra

$$u(n)=\begin{cases}\alpha \text{ với } n=1,\\ 0 \text{ với } n\geq 2,\end{cases}$$

là nghiệm của phương trình (3.18).

c. Xét trường hợp $\alpha>0,\beta>0$. Giả sử tồn tại $n_0\geq 3$ sao cho $u(n_0)=0$. Khi đó

$u(n_0-1) = u\Big(\frac{n_0+n_0-2}{2}\Big) = \sqrt{u(n_0)u(n_0-2)} = 0.$

Ta chọn $n_0 = 3$ thì $u(n_0-1) = u(2) = 0 \Rightarrow \beta = 0$ (mâu thuẫn).

Do đó ta có thể giả thiết rằng $u(n) > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có $u(2) = u\Big(\frac{1+3}{2}\Big) = \sqrt{u(3)u(1)}$, suy ra $u(3) = \frac{u^2(2)}{u(1)} = \frac{\beta^2}{\alpha}$.

Mặt khác $u(3) = u\Big(\frac{4+2}{2}\Big) = \sqrt{u(4)u(2)}$.

Suy ra $u(4) = \frac{u^2(3)}{u(2)} = \frac{\beta^3}{\alpha^2}$.

Từ đây ta dự đoán rằng

$$u(n) = \frac{\beta^{n-1}}{\alpha^{n-2}},\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3. \tag{3.19}$$

Thật vậy, (3.19) đúng với $n = 3, 4$.

Giả sử (3.19) đúng với $n = k$ $(k \geq 4)$. Ta chứng minh (3.19) đúng với $n = k+1$. Thật vậy, ta có

$$u(k) = u\Big(\frac{(k+1)+(k-1)}{2}\Big) = \sqrt{u(k+1)u(k-1)}$$

$$\Rightarrow u(k+1) = \frac{u^2(k)}{u(k-1)} = \frac{\Big(\frac{\beta^{k-1}}{\alpha^{k-2}}\Big)^2}{\frac{\beta^{k-2}}{\alpha^{k-3}}} = \frac{\beta^k}{\alpha^{k-1}}.$$

Vậy (3.19) đúng với $n = k+1$.

Do đó

$$u(n) = \frac{\beta^{n-1}}{\alpha^{n-2}},\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3.$$

Từ đây, ta lại có

$$\frac{\beta^{n-1}}{\alpha^{n-2}} = \Big(\frac{\alpha^2}{\beta}\Big).\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^n.$$

Đặt

$$\begin{cases} \alpha = ab, \\ \beta = ab^2, \end{cases} \quad (a > 0, b > 0).$$

Suy ra $\frac{\alpha^2}{\beta} = a,\ \frac{\beta}{\alpha} = b$.

Vậy nghiệm của phương trình (3.18) là

$$u(n) = \begin{cases} \alpha \text{ nếu } n = 1 \\ 0 \text{ nếu } n \geq 2 \end{cases} \quad , (\forall \alpha \geq 0)$$

hoặc $u(n) = a.b^n$ $(a > 0, b > 0)$.

3.1.2.4 Phép chuyển đại lượng trung bình cộng sang trung bình bậc hai.

Bài toán 3.88. *Xác định dãy số* $\{x_n\}$ *thỏa mãn điều kiện*

$$u\Big(\frac{m+n}{2}\Big) = \sqrt{\frac{u^2(m)+u^2(n)}{2}},\ \forall m,n,\frac{m+n}{2}\in\mathbb{N}^*. \tag{3.20}$$

Giải. Giả sử tồn tại dãy số $\{u(n)\}$ thỏa mãn điều kiện bài toán.
Ta có

$$u(n) = u\Big(\tfrac{n+n}{2}\Big) = \sqrt{\tfrac{u^2(n)+u^2(n)}{2}} = \sqrt{u^2(n)} = |u(n)| \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Đặt $u(1)=\alpha \geq 0,\ u(2)=\beta \geq 0$. Ta có

$$u(2) = u\Big(\frac{1+3}{2}\Big) = \sqrt{\frac{u^2(3)+u^2(1)}{2}}.$$

Suy ra
$u^2(3) = 2u^2(2) - u^2(1) = 2\beta^2 - \alpha^2, \Rightarrow u(3) = \sqrt{2\beta^2-\alpha^2}\ (\alpha \leq \beta\sqrt{2})$.
Tương tự ta cũng có

$$\begin{aligned}u(3) &= u\Big(\frac{4+2}{2}\Big) = \sqrt{\frac{u^2(4)+u^2(2)}{2}}\\ \Rightarrow u^2(4) &= 2u^2(3) - u^2(2) = 3\beta^2 - 2\alpha^2,\\ \Rightarrow u(4) &= \sqrt{3\beta^2-2\alpha^2}\ (\alpha \leq \beta\sqrt{\frac{3}{2}}).\end{aligned}$$

Ta dự đoán rằng

$$u(n) = \sqrt{(n-1)\beta^2 - (n-2)\alpha^2},\ \forall n \geq 3. \tag{3.21}$$

Ta chứng minh (3.21) bằng quy nạp.
Thật vậy, ta thấy (3.21) đúng với $n = 3, 4$.
Giả sử (3.21) đúng với $n = k$ $(k \geq 4)$. Ta chứng minh (3.21) đúng với $n = k+1$. Ta có

$$\begin{aligned}u(k) &= u\Big(\frac{(k+1)+(k-1)}{2}\Big) = \sqrt{\frac{u^2(k+1)+u^2(k-1)}{2}},\\ \Rightarrow u^2(k+1) &= 2u^2(k) - u^2(k-1)\\ &= 2[(k-1)\beta^2 - (k-2)\alpha^2] - [(k-2)\beta^2 - (k-3)\alpha^2]\\ &= k\beta^2 - (k-1)\alpha^2,\\ \Rightarrow u(k+1) &= \sqrt{k\beta^2 - (k-1)\alpha^2}.\end{aligned}$$

Suy ra (3.21) đúng với $n = k + 1$.
Vậy $u(n) = \sqrt{(n-1)\beta^2 - (n-2)\alpha^2},\ \forall n \geq 3$.
Ta lại có $\sqrt{(n-1)\beta^2 - (n-2)\alpha^2} = \sqrt{(\beta^2 - \alpha^2)n + 2\alpha^2 - \beta^2}$.
Đặt

$$\begin{cases} \alpha^2 = a + b \\ \beta^2 = 2a + b. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \beta^2 - \alpha^2 \\ b = 2\alpha^2 - \beta^2. \end{cases}$$

Vậy nghiệm phương trình (3.20) là

$$u(n) = \sqrt{an + b},\ a \geq 0, a + b \geq 0.$$

3.1.3 Bài tập

Bài toán 3.89. *Tìm các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện*

$$f(x+y) + f(x-y) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{Z},\ f(0) \neq 0,\ f(1) = \frac{5}{2}.$$

Bài toán 3.90. *Cho $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(n+2) = f(n+1) - f(n),\ f(1) = 1,\ f(2) = 0.$$

Chứng minh rằng $\mid f(n) \mid \leq \frac{2\sqrt{3}}{3},\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Bài toán 3.91. *Cho $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(n+1) - 2f(n) + f(n-1) = n + 1;\ \ f(1) = 1;\ \ f(2) = 0.$$

Chứng minh rằng $(6f(n) - 24)$ *chia hết cho* n *với* $n \geq 6$.

Bài toán 3.92. *Tìm tất cả các hàm f xác định trên $\mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện*

$$2f(n).f(k+n) - 2f(k-n) = 3f(n).f(k);\ \ f(1) = 1.$$

Bài toán 3.93. *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(k+n) - 2f(n)f(k) + f(k-n) = 3n.2^k;\qquad f(1) = 1.$$

Bài toán 3.94. *(Australia -1989). Xác định tất cả các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn điều kiện sau*

(i) $f(k+n) + f(k-n) = 2f(k).f(n), \forall k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$.

(ii) Tồn tại số nguyên N sao cho $|f(n)| < N, \forall n \in \mathbb{Z}$.

3.2 Áp dụng phương trình sai phân bậc cao.

Giả sử ta xét bài toán sau

Tìm hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau

$$\begin{cases} f(n+s) = f(n) \ ; \ s \in \mathbb{N}^*, \\ f(1) = a_1, \ldots, f(s) = a_s, \end{cases}$$

trong đó $a_1, \ldots, a_s$ là các số thực cho trước.

Dưới góc độ phương trình sai phân, những bài toán này đưa về bài toán tìm nghiệm của những phương trình sai phân cấp cao mà lời giải của chúng là không dễ dàng.
Dưới đây là một số dạng toán giải phương trình sai phân cấp cao cơ bản.

Bài toán 3.95. *Tìm dãy số (x_n) thỏa mãn các điều kiện sau*

$$\begin{cases} x_{n+s} = x_n \ ; \ n, s \in \mathbb{N}^*, \\ x_1 = a_1, \ldots, x_s = a_s. \end{cases} \tag{3.22}$$

Giải. Phương trình (3.22) là phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất hệ số hằng cấp s, có phương trình đặc trưng là $\lambda^s = 1$.
a) Nếu s chẵn thì nghiệm của phương trình (3.22) là

$$x_n = C_1.1^n + C_2.(-1)^n + \sum_{k=1}^{(s-2)/2} \left(C_{k1}.\cos\tfrac{n.2k\pi}{s} + C_{k2}.\sin\tfrac{n.2k\pi}{s} \right).$$

Biết s giá trị ban đầu $x_1 = a_1, \ldots, x_s = a_s$, ta xác định được các hệ số C_i và C_{ij}.
b) Nếu s lẻ thì nghiệm của phương trình (3.22) là

$$x_n = C_1.1^n + \sum_{k=1}^{(s-1)/2} \left(C_{k1}.\cos\tfrac{n.2k\pi}{s} + C_{k2}.\sin\tfrac{n.2k\pi}{s} \right).$$

Biết s giá trị ban đầu $x_1 = a_1, \ldots, x_s = a_s$, ta xác định được các hệ số C_i và C_{ij}.

Bài toán 3.96. *Tìm dãy số (x_n) thỏa mãn các điều kiện sau*

$$\begin{cases} x_{n+s} = x_n + b, \ b \neq 0 \ ; \ n, s \in \mathbb{N}^*, \\ x_1 = a_1, \ldots, x_s = a_s. \end{cases} \tag{3.23}$$

Giải. Đặt $y_n = x_n - \frac{b}{s}n$. Thế thì (3.23) trở thành

$$\begin{cases} y_{n+s} = y_n, \ ; \ n, s \in \mathbb{N}^*, \\ y_1 = a_1 - \frac{b}{s}.1, \ldots, y_s = a_s - b. \end{cases} \tag{3.24}$$

Theo bài toán 3.95, nghiệm của phương trình (3.24) là

Nếu s chẵn, thì

$$y_n = C_1.1^n + C_2.(-1)^n + \sum_{k=1}^{(s-2)/2} \left(C_{k1}.\cos\frac{n.2k\pi}{s} + C_{k2}.\sin\frac{n.2k\pi}{s}\right).$$

Biết s giá trị ban đầu $y_1, \ldots, y_s$, ta xác định được các hệ số C_i và C_{ij}.

Nếu s lẻ, thì $y_n = C_1.1^n + \sum\limits_{k=1}^{(s-1)/2} \left(C_{k1}.\cos\frac{n.2k\pi}{s} + C_{k2}.\sin\frac{n.2k\pi}{s}\right)$.

Biết s giá trị ban đầu $y_1, \ldots, y_s$, ta xác định được các hệ số C_i và C_{ij}.
Vậy

⋆ Với s chẵn, thì

$$x_n = C_1.1^n + C_2.(-1)^n + \sum_{k=1}^{(s-2)/2} \left(C_{k1}.\cos\frac{n.2k\pi}{s} + C_{k2}.\sin\frac{n.2k\pi}{s}\right) + \frac{b}{s}n.$$

⋆ Với s lẻ, thì

$$x_n = C_1.1^n + \sum_{k=1}^{(s-1)/2} \left(C_{k1}.\cos\frac{n.2k\pi}{s} + C_{k2}.\sin\frac{n.2k\pi}{s}\right) + \frac{b}{s}n.$$

Bài toán 3.97. *Tìm dãy số (x_n) thỏa mãn các điều kiện sau*

$$\begin{cases} x_{n+s} = ax_n, \ a > 0 \ ; \ n, s \in \mathbb{N}^*, \\ x_1 = a_1, \ldots, x_s = a_s. \end{cases} \tag{3.25}$$

Giải. Đặt $y_n = \frac{1}{a^{n/s}}x_n$. Thế thì (3.25) trở thành

$$\begin{cases} y_{n+s} = y_n, \ ; \ n, s \in \mathbb{N}^*, \\ y_1 = \frac{1}{a^{1/s}}a_1, \ldots, y_s = \frac{1}{a}a_s \end{cases} \tag{3.26}$$

Theo bài toán 3.95, nghiệm của phương trình (3.26) là

Nếu s chẵn, thì

$$y_n = C_1.1^n + C_2.(-1)^n + \sum_{k=1}^{(s-2)/2} \left(C_{k1}.\cos\frac{n.2k\pi}{s} + C_{k2}.\sin\frac{n.2k\pi}{s}\right).$$

Biết s giá trị ban đầu $y_1, \ldots, y_s$, ta xác định được các hệ số C_i và C_{ij}.

Nếu s lẻ, thì

$$y_n = C_1.1^n + \sum_{k=1}^{(s-1)/2} \big(C_{k1}.\cos\tfrac{n.2k\pi}{s} + C_{k2}.\sin\tfrac{n.2k\pi}{s}\big).$$

Biết s giá trị ban đầu $y_1, \dots, y_s$, ta xác định được các hệ số C_i và C_{ij}. Vậy

⋆ Với s chẵn, thì

$$x_n = a^{\frac{n}{s}}\Big[C_1.1^n + C_2.(-1)^n + \sum_{k=1}^{(s-2)/2} \big(C_{k1}.\cos\tfrac{n.2k\pi}{s} + C_{k2}.\sin\tfrac{n.2k\pi}{s}\big)\Big].$$

⋆ Với s lẻ, thì

$$x_n = a^{\frac{n}{s}}\Big[C_1.1^n + \sum_{k=1}^{(s-1)/2} \big(C_{k1}.\cos\tfrac{n.2k\pi}{s} + C_{k2}.\sin\tfrac{n.2k\pi}{s}\big)\Big].$$

Bài toán 3.98. *Tìm dãy số (x_n) thỏa mãn các điều kiện sau*

$$\begin{cases} x_{n+s} = ax_n + b,\ \ a > 0;\ \ n, s \in \mathbb{N}^*, \\ x_1 = a_1, \dots, x_s = a_s. \end{cases} \tag{3.27}$$

Giải. Xét trường hợp $a = 1$, theo kết quả bài toán 3.96, ta có

$x_n = \frac{b}{s}n + y_n$, với y_n là dãy tuần hoàn cộng tính chu kỳ s.

Xét trường hợp $a \neq 1$. Đặt $y_n = x_n - \frac{b}{1-a}$.

Khi đó ta có

$y_{n+s} + \frac{b}{1-a} = a(y_n + \frac{b}{1-a}) + b,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$, hay $y_{n+s} = ay_n$.

Theo kết quả của bài toán 3.97, ta có $y_n = a^{\frac{n}{s}}u_n$, với $u_{n+s} = u_n$.

Vậy nên

$$x_n = \frac{b}{1-a} + a^{\frac{n}{s}}u_n,\ \text{ với } u_{n+s} = u_n.$$

Kết luận

-Nếu $a = 1$ thì $x_n = \frac{b}{s}n + y_n$ với y_n là dãy tuần hoàn cộng tính chu kỳ s.

-Nếu $a \neq 1$ thì $x_n = \frac{b}{1-a} + a^{\frac{n}{s}}u_n$, với $u_{n+s} = u_n$.

3.2.1 Bài tập

Bài toán 3.99. *Tìm dãy số $\{x_n\}$ thỏa mãn các điều kiện sau*

$$\begin{cases} x_{kn+s} = x_n,\ \ k, n, s \in \mathbb{N}^*, \frac{s}{1-k} \in \mathbb{Z}; \\ x_1 = a_1, \dots, x_s = a_s. \end{cases}$$

Bài toán 3.100. *Tìm dãy số* $\{x_n\}$ *thỏa mãn các điều kiện sau*

$$\begin{cases} x_{kn+s} = x_n + b,\ \ b \neq 0, k, n, s \in \mathbb{N}^*, \frac{s}{1-k} \in \mathbb{Z}; \\ x_1 = a_1, \ldots, x_s = a_s. \end{cases}$$

Bài toán 3.101. *Tìm dãy số* $\{x_n\}$ *thỏa mãn các điều kiện sau*

$$\begin{cases} x_{kn+s} = ax_n,\ \ a > 0, k, n, s \in \mathbb{N}^*, \frac{s}{1-k} \in \mathbb{Z}; \\ x_1 = a_1, \ldots, x_s = a_s. \end{cases}$$

Bài toán 3.102. *Tìm dãy số* $\{x_n\}$ *thỏa mãn các điều kiện sau*

$$\begin{cases} x_{kn+s} = ax_n + b,\ \ a, b > 0, k, n, s \in \mathbb{N}^*, \frac{s}{1-k} \in \mathbb{Z}; \\ x_1 = a_1, \ldots, x_s = a_s. \end{cases}$$

KẾT LUẬN

Luận văn đã đề cập đến một số phương pháp giải phương trình hàm trên tập số nguyên. Các nội dung và kết quả cơ bản của luận văn có thể tóm tắt như sau

1. Áp dụng một số nguyên lý và tính chất đặc trưng của tập số nguyên để giải một số dạng toán phương trình hàm trên tập số nguyên. Đó là nguyên lý quy nạp toán học, nguyên lý sắp thứ tự tốt và lý thuyết về hệ đếm cơ số.

2. Áp dụng một số tính chất của dãy số và hàm số để giải một số dạng toán phương trình hàm trên tập số nguyên. Các tính chất đó là số hạng tổng quát của dãy số, tính chất của dãy số $[\alpha n]$, tính đơn điệu của hàm số, tính chất của ánh xạ, tính chất số học liên quan đến hàm số.

3. Áp dụng lý thuyết phương trình sai phân để giải một số bài toán phương trình hàm trên tập số nguyên. Đó là dùng phương trình sai phân để giải một số bài toán về phép chuyển đổi của dãy số như dãy số chuyển đổi các phép tính số học, dãy số chuyển đổi các đại lượng trung bình, hay đặc biệt hơn là dùng phương trình sai phân cấp cao để giải một số bài toán phương trình hàm trên tập số nguyên.

Qua luận văn, tác giả hy vọng rằng luận văn này sẽ trở thành một tài liệu có chất lượng cho quý thầy cô giáo, các em học sinh giỏi phổ thông có được tài liệu tham khảo, nắm được sự vận dụng các nguyên lý, tính chất đặc trưng của tập số nguyên, lý thuyết về hệ đếm cơ số, tính chất dãy số và hàm số, cũng như phương trình sai phân khi giải các bài toán về phương trình hàm trên tập số nguyên.

Mặc dù đã có cố gắng rất nhiều, song do khuôn khổ của luận văn, thời gian và năng lực có hạn, nên những kết quả đạt được của luận văn còn rất khiêm tốn và chắc chắn rằng không thể tránh khỏi những thiếu sót, xin quý thầy cô và các bạn đọc lượng thứ. Rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của quý thầy cô và bạn đọc.

Quy Nhơn, tháng 03 năm 2011.

Trương Thanh Vũ

Tài liệu tham khảo

[1] Trần Nam Dũng, Dương Bửu Lộc, " Chuyên đề phương trình hàm trên tập số nguyên".

[2] Nguyễn Văn Mậu (2003), *Phương trình hàm*, NXB Giáo Dục Việt Nam.

[3] Nguyễn Văn Mậu (2004), *Một số bài toán chọn lọc về dãy số*, NXB Giáo Dục Việt Nam.

[4] Nguyễn Văn Mậu, Nguyễn Văn Tiến (2009), *Một số chuyên đề giải tích bồi dưỡng học sinh giỏi THPT*, NXB Giáo Dục Việt Nam.

[5] Nguyễn Trọng Tuấn, 2008, *Bài toán hàm số qua các kì thi Olimpic*, NXB Giáo Dục.

[6] Titu Andresscu, *Contests Around the World 1996-1997, 1997-1998, 1999-2000.*

[7] Titu Andresscu, Razvan Gelca *Birkhauser Mathematical Olympiad Challenges.*

[8] Valentine Boju, Luis Funar, *The Math Problems Notebook.*

[9] Christopher G. Small (2000), *Functional Equations and How To Solve Them*, Department of Statistics & Actuarial Science.

[10] Edward Lozansky, Cecil Rousseau *Winning Solutions.*

[11] Marko Radovanovic (2007), *Functional Equations*, The Author and The IMO Compendium Group.